

福建省三明市普通高中 2012 届高三上学期期末联考数学

(文) 试题

(考试时间: 2012 年 1 月 11 日下午 3:00-5:00 满分: 150 分)

说明:

柱体体积公式 $V = Sh$ 锥体体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ (其中 S 为底面面积, h 为高)

球体表面积、体积公式: $S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3$

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题 (本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{3, 5\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{3, 7\}$ D. $\{3, 9\}$

2. 已知 i 是虚数单位, 则 $(1-i)i =$

- A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1+i$ D. $1-i$

3. 在样本的频率分布直方图中, 共有 11 个小长方形, 若中间一个小长方形的面积等于其它 10 个小长方形的面积和的 $\frac{1}{4}$, 且样本容量为 160, 则中间一组的频数为

- A. 32 B. 0.2 C. 40 D. 0.25

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , a_2 、 a_4 是方程

$x^2 - x - 2 = 0$ 的两个根, $S_5 =$

- A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. $-\frac{5}{2}$ D. -5

5. 一个棱锥的三视图如右图所示, 则这个棱锥的体积是

- A. 6 B. 12 C. 24 D. 36

6. 下列选项叙述错误的是

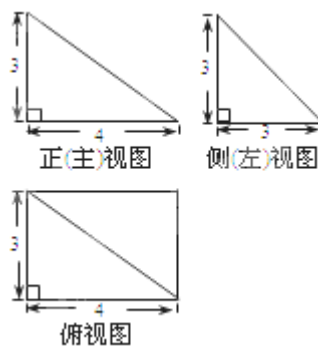
A. 命题 “若 $x \neq 1$, 则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ” 的逆否命题是

“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 1$ ”

B. 若命题 $P: \forall x \in R, x^2 + x + 1 \neq 0$, 则 $\neg P: \exists x \in R, x^2 + x + 1 = 0$

C. 若 $p \vee q$ 为真命题, 则 p, q 均为真命题

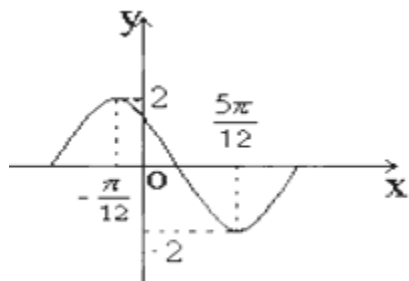
D. “ $x > 2$ ” 是 “ $x^2 - 3x + 2 > 0$ ” 的充分不必要条件



7. 设 α 、 β 、 γ 是三个互不重合的平面， m 、 n 是两条不重合的直线，下列命题中正确的是

- A. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $\beta \perp \gamma$ ，则 $\alpha \perp \gamma$ B. 若 $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ， $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$
C. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \perp \alpha$ ，则 $m \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \not\subset \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel \beta$

8. 右图是函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图象，



此函数的解析式可为

- A. $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ B. $y = 2 \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$
C. $y = 2 \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ D. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

9. 函数 $f(x) = 3^x - \log_2(-x)$ 的零点所在区间是

- A. $(-\frac{5}{2}, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, \frac{5}{2})$

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上的一点 P 到它的右焦点的距离为 8，则点 P 到它的左焦点的距离是

- A. 4 B. 12 C. 4 或 12 D. 6

11. 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \lg x$ ，则 $f(f(\frac{1}{100}))$ 的值等于

- A. $\frac{1}{\lg 2}$ B. $-\frac{1}{\lg 2}$ C. $\lg 2$ D. $-\lg 2$

12. 关于 x 的方程 $\vec{a}x^2 + \vec{b}x + \vec{c} = \vec{0}$ ，(其中 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量)，且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线，则该方程的解的情况是

- A. 至多有一个解 B. 至少有一个解
C. 至多有两个解 D. 可能有无数个解

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在答题卡相应的位置)

13. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$ ， $\vec{b} = (1, 3)$ ， $\vec{c} = (k, 7)$ ，若 $(\vec{a} - \vec{c}) \parallel \vec{b}$ ，则 $k =$ _____.

14. 经过点 $P(2, -3)$ 作圆 $x^2 + 2x + y^2 = 24$ 的弦 AB ，

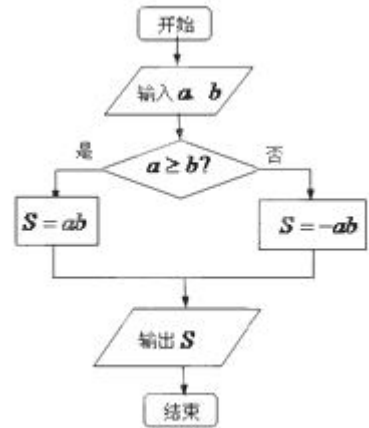
使得点 P 平分弦 AB ，则弦 AB 所在直线的方程为 _____.

15. 定义一种运算 $S = a \otimes b$ ，运算原理如右框图所示，
 则 $\cos 45^\circ \otimes \sin 15^\circ + \sin 45^\circ \otimes \cos 15^\circ =$ _____.

16. 观察下列等式

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 9 \\ 3+4+5+6+7 &= 25 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 49 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

照此规律，第 n 个等式为 _____.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{-2, 0, 2\}$ ， $B = \{-1, 1\}$.

(I) 若 $M = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ ，用列举法表示集合 M ；

(II) 在 (I) 中的集合 M 内，随机取出一个元素 (x, y) ，求以 (x, y) 为坐标的点位于区

域 $D: \begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$ 内的概率.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ，且 $2S_n = 2 - a_n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 $b_n = a_n + n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本题满分 12 分)

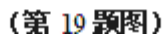
如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \parallel DC$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

$DC = 1$ ， $AB = 2$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = 1$.

(I) 求证： $AB \parallel$ 平面 PCD ；

(II) 求证： $BC \perp$ 平面 PAC ；

(III) 若 M 是 PC 的中点，求三棱锥 $M-ACD$ 的体积.



已知向量 $\vec{a} = (\sin x, -1)$, $\vec{b} = (\sqrt{3} \cos x, -\frac{1}{2})$, 函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - 2$.

(II) 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A 、 B 、 C 的对边, 其中 A 为锐角, $a=2\sqrt{3}$, $c=4$, 且 $f(A)=1$, 求 A , b 和 $\triangle ABC$ 的面积 S .

已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点。斜率为 $\sqrt{2}$

(II) $\triangle ABD$ 面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 请说明理由?

已知函数 $f(x) = a \ln x + bx^2$ 图象上点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y - 3 = 0$.

(II) 函数 $g(x) = f(x) + m - \ln 4$, 若方程 $g(x) = 0$ 在 $[\frac{1}{e}, 2]$ 上恰有两解, 求实数 m 的取值范围.

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{3, 5\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{3, 7\}$ D. $\{3, 9\}$

2. 已知 i 是虚数单位，则 $(1-i)i =$

- A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1+i$ D. $1-i$

3. 在样本的频率分布直方图中，共有 11 个小长方形，若中间一个小长方形的面积等于其它 10 个小长方形的面积和的 $\frac{1}{4}$ ，且样本容量为 160，则中间一组的频数为

- A. 32 B. 0.2 C. 40 D. 0.25

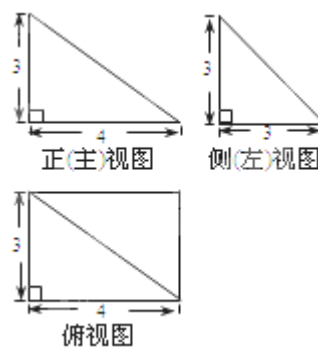
4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , a_2 、 a_4 是方程

$x^2 - x - 2 = 0$ 的两个根， $S_5 =$

- A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. $-\frac{5}{2}$ D. -5

5. 一个棱锥的三视图如右图所示，则这个棱锥的体积是

- A. 6 B. 12 C. 24 D. 36



6. 下列选项叙述错误的是

A. 命题“若 $x \neq 1$ ，则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”的逆否命题是

“若 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，则 $x = 1$ ”

B. 若命题 $P: \forall x \in R, x^2 + x + 1 \neq 0$ ，则 $\neg P: \exists x \in R, x^2 + x + 1 = 0$

C. 若 $p \vee q$ 为真命题，则 p, q 均为真命题

D. “ $x > 2$ ”是“ $x^2 - 3x + 2 > 0$ ”的充分不必要条件

7. 设 α, β, γ 是三个互不重合的平面， m, n 是两条不重合的直线，下列命题中正确的是

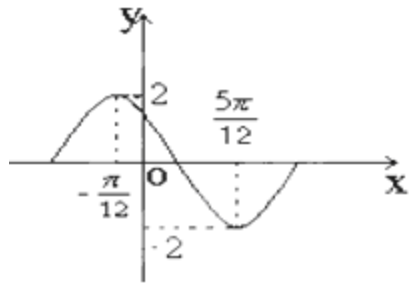
A. 若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$ ，则 $\alpha \perp \gamma$

B. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$

C. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$ ，则 $m \parallel \beta$

D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \not\subset \beta, m \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel \beta$

8. 右图是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在一个周期内的图象,



此函数的解析式可为 B

- A. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ B. $y = 2\sin(2x + \frac{2\pi}{3})$
 C. $y = 2\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ D. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

9. 函数 $f(x) = 3^x - \log_2(-x)$ 的零点所在区间是 B

- A. $(-\frac{5}{2}, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, \frac{5}{2})$

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上的一点 P 到它的右焦点的距离为 8, 则点 P 到它的左焦点的距离是 C

- A. 4 B. 12 C. 4 或 12 D. 6

11. 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \lg x$, 则 $f(f(\frac{1}{100}))$ 的值等于 D

- A. $\frac{1}{\lg 2}$ B. $-\frac{1}{\lg 2}$ C. $\lg 2$ D. $-\lg 2$

12. 关于 x 的方程 $\vec{a}x^2 + \vec{b}x + \vec{c} = \vec{0}$, (其中 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量), 且 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, 则该方程的解的情况是 A

- A. 至多有一个解 B. 至少有一个解
 C. 至多有两个解 D. 可能有无数个解

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在答题卡相应的位置)

13. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 3)$, $\vec{c} = (k, 7)$, 若 $(\vec{a} - \vec{c}) \parallel \vec{b}$, 则 $k = \underline{5}$.

14. 经过点 $P(2, -3)$ 作圆 $x^2 + 2x + y^2 = 24$ 的弦 AB ,

使得点 P 平分弦 AB , 则弦 AB 所在直线的方程为 $\underline{x - y - 5 = 0}$.

15. 定义一种运算 $S = a \otimes b$ ，运算原理如右框图所示，

$$\text{则 } \cos 45^\circ \otimes \sin 15^\circ + \sin 45^\circ \otimes \cos 15^\circ = -\frac{1}{2} \text{———}.$$

16. 观察下列等式

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 9 \\ 3+4+5+6+7 &= 25 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 49 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

照此规律，第 n 个等式为

$$\underline{\quad} n + (n+1) + (n+2) + \dots + (3n-2) = (2n-1)^2 \underline{\quad}$$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{-2, 0, 2\}$ ， $B = \{-1, 1\}$.

(I) 若 $M = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ ，用列举法表示集合 M ；

(II) 在 (I) 中的集合 M 内，随机取出一个元素 (x, y) ，求以 (x, y) 为坐标的点位于区

$$\text{域 D: } \begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ y \geq -1 \end{cases} \text{ 内的概率.}$$

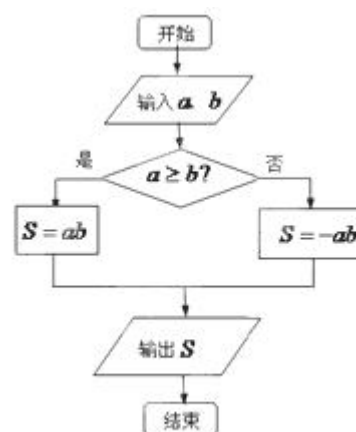
17. 解：(I) $M = \{(-2, -1), (-2, 1), (0, -1), (0, 1), (2, -1), (2, 1)\}$ 6 分

(II) 记“以 (x, y) 为坐标的点位于区域 D 内”为事件 A .

集合 M 中共有 6 个元素，即基本事件总数为 6，区域 D 含有集合 M 中的元素 $(-2, -1), (0, -1), (0, 1), (2, -1)$ ，共 4 个，9 分

$$\text{所以 } P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

故以 (x, y) 为坐标的点位于区域 D 内的概率为 $\frac{2}{3}$12 分



18(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ，且 $2S_n = 2 - a_n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 $b_n = a_n + n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解：(I) 当 $n=1$ 时， $2S_1 = 2 - a_1$ ， $2a_1 = 2 - a_1$ ， $\therefore a_1 = \frac{2}{3}$ ； 1 分

当 $n \geq 2$ 时， $\begin{cases} 2S_n = 2 - a_n \\ 2S_{n-1} = 2 - a_{n-1} \end{cases}$ ， 2 分，两式相减得 $2a_n = a_{n-1} - a_n (n \geq 2)$ ，

即 $3a_n = a_{n-1} (n \geq 2)$ ，又 $a_{n-1} \neq 0$ $\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} (n \geq 2)$ ， 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 5 分

$\therefore a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 6 分

(II) 由 (I) 知 $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$ ， 7 分

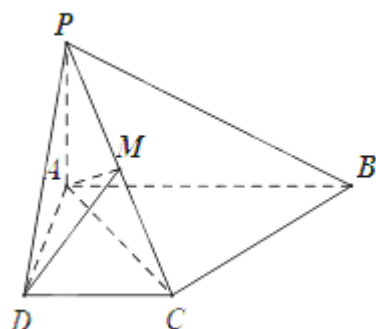
$\therefore T_n = 2 \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ 9 分

$= 2 \times \frac{\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{(n+1)n}{2} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n^2 + n}{2}$ 12 分

19. (本题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 45^\circ$,
 $DC = 1$, $AB = 2$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 1$.

- (I) 求证: $AB \parallel$ 平面 PCD ;
 (II) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;
 (III) 若 M 是 PC 的中点, 求三棱锥 $M-ACD$ 的体积.



(第 19 题图)

证明: (I) 由已知 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC$, 1 分

又 $AB \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD 3 分

$\therefore AB \parallel$ 平面 PCD 4 分

(II) 在直角梯形 $ABCD$ 中, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 5 分

则四边形 $ADCE$ 为矩形, $\therefore AE = DC = 1$

又 $AB = 2$, $\therefore BE = 1$,

在 $Rt\triangle BEC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ \therefore CE = BE = 1, CB = \sqrt{2}$, $\therefore AD = CE = 1$

则 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2}$, $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\therefore BC \perp AC$ 7 分

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BC$ 8 分

又 $PA \cap AC = A \therefore BC \perp$ 平面 PAC 9 分

(III) $\because M$ 是 PC 中点,

$\therefore M$ 到面 ADC 的距离是 P 到面 ADC 距离的一半 10 分

$$V_{M-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot \left(\frac{1}{2} PA\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

..... 12 分

20(本小题满分 12 分)

已知向量 $\vec{a} = (\sin x, -1)$, $\vec{b} = (\sqrt{3} \cos x, -\frac{1}{2})$, 函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - 2$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期 T ;

(II) 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A 、 B 、 C 的对边, 其中 A 为锐角, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 4$, 且 $f(A) = 1$, 求 A , b 和 $\triangle ABC$ 的面积 S .

解: (I) $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - 2 = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2$
 $= \sin^2 x + 1 + \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2} - 2$ 2 分

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$$
4 分

因为 $\omega = 2$, 所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 6 分

(II) $f(A) = \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$ 8 分

则由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 所以 $12 = b^2 + 16 - 2 \times 4b \times \frac{1}{2}$,

即 $b^2 - 4b + 4 = 0$ 则 $b = 2$ (由正弦定理也得分)10 分

$\therefore S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点。斜率为 $\sqrt{2}$

直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点，且 A 、 B 、 D 三点不重合。

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) $\triangle ABD$ 面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由？

21. 解：(I) $\because e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}, \therefore a = \sqrt{2}c, b^2 = a^2 - c^2 = c^2$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$ 2 分

又点 $(1, \sqrt{2})$ 在椭圆上 $\therefore \frac{1}{c^2} + \frac{2}{2c^2} = 1, \therefore c^2 = 2$

$\therefore a = 2, b = \sqrt{2}, \therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(II) 设直线方程为 $y = \sqrt{2}x + b$ 5 分

$\therefore \begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0$ 6 分

$\therefore \Delta = -8b^2 + 64 > 0 \Rightarrow -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

$x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b, x_1x_2 = \frac{b^2 - 4}{4}$ 7 分

$\therefore |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{64 - 8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8 - b^2},$ 8 分

设 d 为点 A 到直线 $y = \sqrt{2}x + b$ 的距离， $\therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}}$ 9 分

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8 - b^2)b^2}$ 10 分

$\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{8 - b^2 + b^2}{2} = \sqrt{2}$ 11 分

当且仅当 $b = \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 时， $\triangle ABD$ 的面积最大，最大值为 $\sqrt{2}$ 12 分

22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + bx^2$ 图象上点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y - 3 = 0$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(II) 函数 $g(x) = f(x) + m - \ln 4$, 若方程 $g(x) = 0$ 在 $[\frac{1}{e}, 2]$ 上恰有两解, 求实数 m 的取值范围.

22. 解: (I) 当 $x = 1$ 时, $f(1) = 2x - 3 = -1$1 分

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx, \quad \text{.....2 分}$$

$$\therefore \begin{cases} f'(1) = a + 2b = 2 \\ f(1) = b = -1 \end{cases} \quad \text{.....4 分}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = -1 \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore y = f(x) = 4 \ln x - x^2. \quad \text{.....6 分}$$

$$(II) \quad g(x) = f(x) + m - \ln 4 = 4 \ln x - x^2 + m - \ln 4. \quad \text{.....7 分}$$

令 $g(x) = 0$ 得 $m = x^2 - 4 \ln x + \ln 4$, 则此方程在 $[\frac{1}{e}, 2]$ 上恰有两解。8 分

$$\text{记 } \varphi(x) = x^2 - 4 \ln x + \ln 4$$

$$\varphi'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x} = \frac{2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{x} = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{2} \in [\frac{1}{e}, 2] \quad \text{.....10 分}$$

在 $(\frac{1}{e}, \sqrt{2})$ 上, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减;

在 $(\sqrt{2}, 2)$ 上, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增。11 分

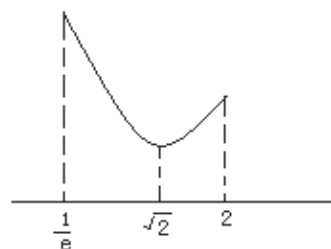
$$\text{又 } \varphi(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} + 4 + 2 \ln 2,$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = 2 - 4 \ln \sqrt{2} + 2 \ln 2 = 2,$$

$$\varphi(2) = 4 - 4 \ln 2 + 2 \ln 2 = 4 - 2 \ln 2$$

$\therefore \varphi(x)$ 的图像如图所示 (或 $\therefore \varphi(\frac{1}{e}) \geq \varphi(2)$)13 分

$$\therefore 2 < m \leq 4 - 2 \ln 2. \quad \text{.....14 分}$$



三明市普通高中 2011-2012 学年第一学期联合命题考试

高三数学（文科）参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	A	B	C	D	B	B	C	D	A

二、填空题（本大题共 4 小题，共 16 分）

13. 5

14. $x - y - 5 = 0$

21. $-\frac{1}{2}$

16. $n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (3n-2) = (2n-1)^2$

三、解答题：

17. 解：（I） $M = \{(-2, -1), (-2, 1), (0, -1), (0, 1), (2, -1), (2, 1)\}$ 6 分

（II）记“以 (x, y) 为坐标的点位于区域 D 内”为事件 A.

集合 M 中共有 6 个元素，即基本事件总数为 6，区域 D 含有集合 M 中的元素 $(-2, -1), (0, -1), (0, 1), (2, -1)$ ，共 4 个，9 分

所以 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

故以 (x, y) 为坐标的点位于区域 D 内的概率为 $\frac{2}{3}$12 分

18. 解：（I）当 $n=1$ 时， $2S_1 = 2 - a_1$ ， $2a_1 = 2 - a_1$ ， $\therefore a_1 = \frac{2}{3}$ ； 1 分

当 $n \geq 2$ 时， $\begin{cases} 2S_n = 2 - a_n \\ 2S_{n-1} = 2 - a_{n-1} \end{cases}$ ，..... 2 分，两式相减得 $2a_n = a_{n-1} - a_n (n \geq 2)$ ，

即 $3a_n = a_{n-1} (n \geq 2)$ ，又 $a_{n-1} \neq 0 \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} (n \geq 2)$ ， 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 5 分

$\therefore a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 6 分

（II）由（I）知 $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$ ， 7 分

$\therefore T_n = 2 \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + (1+2+3+\cdots+n)$ 9 分

$$= 2 \times \frac{\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{(n+1)n}{2} = 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{n^2 + n}{2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 证明: (I) 由已知 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $AB \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore AB \parallel$ 平面 PCD $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) 在直角梯形 $ABCD$ 中, 过 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

则四边形 $ADCE$ 为矩形, $\therefore AE = DC = 1$

又 $AB = 2$, $\therefore BE = 1$,

在 $Rt\triangle BEC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ \therefore CE = BE = 1, CB = \sqrt{2}$, $\therefore AD = CE = 1$

则 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2}$, $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\therefore BC \perp AC$ $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BC$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

又 $PA \cap AC = A \therefore BC \perp$ 平面 PAC $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

(III) $\because M$ 是 PC 中点,

$\therefore M$ 到面 ADC 的距离是 P 到面 ADC 距离的一半 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$V_{M-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot \left(\frac{1}{2} PA \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - 2 = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2$

$$= \sin^2 x + 1 + \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2} - 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \omega = 2, \text{ 所以 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) f(A) = \sin \left(2A - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{\pi}{3}$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

则由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 所以 $12 = b^2 + 16 - 2 \times 4b \times \frac{1}{2}$,

$$\text{即 } b^2 - 4b + 4 = 0 \quad \text{则 } b = 2 \quad (\text{由正弦定理也得分}) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots$$

12 分

21. 解: (I) $\Theta e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}, \therefore a = \sqrt{2}c, b^2 = a^2 - c^2 = c^2$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又点 $(1, \sqrt{2})$ 在椭圆上 $\therefore \frac{1}{c^2} + \frac{2}{2c^2} = 1, \therefore c^2 = 2$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{2}, \therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设直线方程为 $y = \sqrt{2}x + b$ \dots\dots\dots 5 分

$$\therefore \begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \Delta = -8b^2 + 64 > 0 \Rightarrow -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b, \quad x_1x_2 = \frac{b^2 - 4}{4} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\Theta |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{64 - 8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8 - b^2}, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 d 为点 A 到直线 $y = \sqrt{2}x + b$ 的距离, $\therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8 - b^2)b^2} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \bullet \frac{8 - b^2 + b^2}{2} = \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当且仅当 $b = \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 时, $\triangle ABD$ 的面积最大, 最大值为 $\sqrt{2}$ \dots\dots 12 分

22. 解: (I) 当 $x = 1$ 时, $f(1) = 2x - 3 = -1$. \dots\dots\dots 1 分

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} f'(1) = a + 2b = 2 \\ f(1) = b = -1 \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow a = 4, b = -1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore y = f(x) = 4 \ln x - x^2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \quad g(x) = f(x) + m - \ln 4 = 4 \ln x - x^2 + m - \ln 4. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

令 $g(x) = 0$ 得 $m = x^2 - 4 \ln x + \ln 4$, 则此方程在 $[\frac{1}{e}, 2]$ 上恰有两解。 $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{记 } \varphi(x) = x^2 - 4 \ln x + \ln 4$$

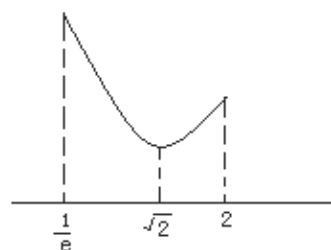
$$\varphi'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 4}{x} = \frac{2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{x} = 0 \text{ 得 } x = \sqrt{2} \in [\frac{1}{e}, 2] \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

在 $(\frac{1}{e}, \sqrt{2})$ 上, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减;

在 $(\sqrt{2}, 2)$ 上, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{又 } \varphi(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} + 4 + 2 \ln 2,$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = 2 - 4 \ln \sqrt{2} + 2 \ln 2 = 2,$$



$$\vee \varphi(2) = 4 - 4 \ln 2 + 2 \ln 2 = 4 - 2 \ln 2$$

$\therefore \varphi(x)$ 的图像如图所示 (或 $\therefore \varphi(\frac{1}{e}) \geq \varphi(2)$) $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\therefore 2 < m \leq 4 - 2 \ln 2. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$