廖老师网上千题解答分类十二、超纲数列

7、已知 $a_1=\frac{11}{7}, a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}$，

求证：$(-1)a_1+(-1)^2a_2+(-1)^3a_3+\cdots+(-1)^na_n<1$

证法 1：先证 $0<a_{2n-1}<2$，$a_{2n}>2$（*）

当 n=1 时

∵$0<a_1=\frac{11}{7}<2$，$a_2=\frac{25}{11}>2$

∴当 n=1 时（*）式成立

假设当 n=k 时（*）式成立即 $0<a_{2k-1}<2$，$a_{2k}>2$

则当 n=k+1 时

∵ $a_{2k+1}=1+\frac{2}{a_{2k}}>0$，$a_{2k+1}-2=\frac{2}{a_{2k}}-1=\frac{2-a_{2k}}{a_{2k}}<0$

$$a_{2k++2}-2=\frac{2}{a_{2k+1}}-1=\frac{2-a_{2k+1}}{a_{2k+1}}=\frac{1-\frac{2}{a_{2k}}}{1+\frac{2}{a_{2k}}}=\frac{a_{2k}-2}{a_{2k}+2}>0$$

∴$0<a_{2k+1}<2$，$a_{2k++2}>2$

设 $b_n=a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{(a_{2n}-2)(a_{2n}+1)}{a_{2n}-1}$

$$b_{n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}=\frac{2(a_{2n}-2)(a_{2n}+1)}{a_{2n}(a_{2n}+2)}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2(a_{2n}-1)}{a_{2n}(a_{2n}+2)}=\frac{2}{a_{2n}-1+\frac{3}{a_{2n}-1}+4}\le\frac{2}{2\sqrt{3}+4}=2-\sqrt{3}$$

注意 $a_2=\frac{25}{11}$，$b_1=a_2-a_1=\frac{54}{77}$

$$b_n=b_1\bullet\frac{b_2}{b_1}\bullet\frac{b_3}{b_2}\bullet\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=\le\frac{54}{77}\bullet(2-\sqrt{3})^{n-1}$$

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<\frac{54}{77[1-(2-\sqrt{3})]}=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{11}<1$$

因此当 n 为偶数时：$(-1)a_1+(-1)^2a_2+\cdots+(-1)^na_n<1$ 成立
当 n 为偶奇数时多了个负加数因此原式也成立，故原命题总成立

19、用特征方程求通项

引例：已知数列$\{a_n\}$,满足关系$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$(p、q是常数),a、b是方程$x^2=px+q$的不等的实根两根求证: (1)数列$\{a_{n+1}-aa_n\}$是以b为公比的等比数列

(2)数列$\{a_n\}$的通项公式具有$a_n=aa^n+bb^n$的形式

证明：因a、b是方程$x^2=px+q$的两根

故$a+b=p$， $p-a=b$， $q=-ab$

$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}==(a+b)a_n-ab\ \ a_{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}-aa_n}{a_n-aa_{n-1}}=\frac{(a+b)a_n-aba_{n-1}-aa_n}{a_n-aa_{n-1}}=\frac{ba_n-aba_{n-1}}{a_n-aa_{n-1}}=b$$

数列$\{a_{n+1}-aa_n\}$是以b为公比的等比数列

同理可证数列$\{a_{n+1}-ba_n\}$是以a为公比的等比数列

（2）$a_{n+1}-aa_n=(a_2-aa_1)b^{n-1}$

$a_{n+1}-ba_n=(a_2-ba_1)a^{n-1}$

相减得$(b-a)a_n=(a_2-aa_1)b^{n-1}-(a_2-ba_1)a^{n-1}$

当$a\neq b$时有$a_n=aa^n+bb^n$的形式，证毕

因此，$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$条件下常可用待定系数法求$\{a_n\}$的通项公式

举例已知数列$\{a_n\}$，$a_1=0,a_2=1$，$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$，求$a_n$

解：由特征方程$x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$解得$x_1=1,x_2=-\frac{1}{2}$

由上面的定理可设$a_n=a\bullet 1^n+b(-\frac{1}{2})^n$

由$a_1=0,a_2=1$得$\begin{cases}a-\frac{1}{2}b=0\\a+\frac{1}{4}b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$ $\therefore a_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n$

37、 由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$ 求通项

解：由 $x=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$,解得$x=\pm 1$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})=\frac{a_n{}^2+1}{2a_n}$$

$$a_{n+1}+1=\frac{a_n{}^2+1}{2a_n}+1=\frac{(a_n+1)^2}{2a_n}$$

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n{}^2+1}{2a_n}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}$$

相除得 $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=(\frac{a_n+1}{a_{n1}-1})^2$

$$\therefore \frac{a_n+1}{a_n-1}=(\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1})^2=(\frac{a_{n-2}+1}{a_{n-2}-1})^{2\times 2}=(\frac{a_{n-3}+1}{a_{n-3}-1})^{2\times 2\times 2}=\mathbf{L}=(\frac{a_1+1}{a_1-1})^{2^n}$$

故 a_n 可解出

注：这种方法叫做不动点法

147、 $a_n+\frac{1}{a_{n-1}}=2$

解： $a_n-1=1-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}$

当 a_1 ¹ 1时，

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=\frac{a_{n-1}-1+1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{a_{n-1}-1}+1$$

$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}+(n-1)$， $a_n-1=\frac{1}{\frac{1}{a_1-1}+n-1}$

$a_n=\frac{1}{\frac{1}{a_1-1}+n-1}+1$，当 $a_1=1$ 时 $a_n=1$

这是一个典型的用不动点法解的题目， $x+\frac{1}{x}=2$ 解出不动点 $x=1$，然后利用不动点 $x=1$进行配凑

163、f(1)=2002， $f(n)$ ＝f(1)+f(2)+…+f(n) $=n^2 f(n)$，求 f(2002)

分析：这是一个数列问题

f(1)+f(2)+…….+f(n)是前 n 项和 S_n， f(n)就是 a_n

解：当 n>1 时

$f(n)$ ＝f(1)+f(2)+…….+f(n) $=n^2 f(n)$

f(1)+f(2)+…….+f(n-1) $=(n-1)^2 f(n-1)$

相减得 f(n)＝ $n^2 f(n)$ - $(n-1)^2 f(n-1)$

故 $(n^2-1)f(n)=(n-1)^2 f(n-1)$

$\frac{f(n)}{f(n-1)}=\frac{n-1}{n+1}$,

f(2002)＝ $f(1)\bullet\frac{f(2)}{f(1)}\bullet\frac{f(3)}{f(2)}\bullet\cdots\bullet\frac{f(2002)}{f(2001)}$ ＝2002 $\bullet\frac{1}{3}\bullet\frac{2}{4}\bullet\frac{3}{5}\bullet\cdots\bullet\frac{2001}{2003}$

＝ $\frac{2}{2003}$、

168、特征方程在数列方程、差分方程、微分方程中的对照(大学数学)

例 1、解齐次数列方程 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

解：特征方程为 $l^2-5l+6=0$ 得特征根 $l_1=2, l_2=3$

故方程的通解为 $a_n=C_1\bullet 2^n+C_2\bullet 3^n$ （c_1 与 c_2 是两个任意常数）

例 2、解齐次差分方程 $E^2y-5Ey+6y=0$

解：特征方程为 $l^2-5l+6=0$ 得特征根 $l_1=2, l_2=3$

通解为 $y(n)=C_1\bullet 2^n+C_2\bullet 3^n$ （c_1 与 c_2 是两个任意常数）

例 3、解齐次微分方程 $y^{//}-5y^{/}+6y=0$

解：特征方程为 $l^2-5l+6=0$ 得特征根 $l_1=2, l_2=3$

故方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ （c_1 与 c_2 是两个任意常数）

222、数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n{}^2}{a_n+2}$，

(1)若 $\lim\limits_{n®+¥} a_n$ 存在，求 $\lim\limits_{n®+¥} a_n$

(2) 判定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是否存在，若存在求出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (高考不要求)

解：(1)因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，因此可设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=A$

在 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n{}^2}{a_n+2}$ 的两边取极限，得 $A=\dfrac{2A^2}{A+2}$,解得 $A=2$

(2) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2a_n{}^2}{a_n+2}-a_n=\dfrac{a_n{}^2-2a_n}{a_n+2}=\dfrac{a_n(a_n-2)}{a_n+2}$

$1°$ 当 $a_1=2$,时则 $a_1=a_2=\mathbf{L}=a_n=\mathbf{L}$

这时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} 2=2$

$2°$ 当 $a_1>2$,时 $a_{n+1}-a_n>0$，则 $\{a_n\}$ 递增，

考察函数 $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x+2}$， $f^{/}(x)=\dfrac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$，当 $x>2$ 时 $f'(x)>0$， $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x+2}$ 在 $x>2$ 上递增

因此 $a_{n+1}-a_n$ 越来越大，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在

3° 当 $0<a_1<2$,时 $a_{n+1}-a_n<0$，则 $\{a_n\}$ 递减，

又有下界故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$

在 $a_{n+1}=\dfrac{2{a_n}^2}{a_n+2}$ 的两边取极限，得 $A=\dfrac{2A^2}{A+2}$,解得 $A=2$

233、求数列通项： 已知 a_1=1， $a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}$，求 a_n (高考不要求)

解：由方程 $x=1+\dfrac{2}{x}$ 解得： $x=2$ 或 $x=-1$

$a_{n+1}-2=1+\dfrac{2}{a_n}-2=\dfrac{2-a_n}{a_n}$， $a_{n+1}+1=2+\dfrac{2}{a_n}==\dfrac{2a_n+2}{a_n}$

$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{a_n-2}{a_n+1})$，数列 $\{\dfrac{a_n-2}{a_n+1}\}$ 是以 $\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=-\dfrac{1}{2}$ 为首项 $-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $\dfrac{a_n-2}{a_n+1}=(-\dfrac{1}{2})^n$， $\therefore a_n=\dfrac{2+(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})^2}$

280、若数列前 n 项之积为 $\dfrac{1}{(n!)^2(n+1)}$,则 $\lim\limits_{n®¥}S_n=$ ______

解：设这个数列为 $\{a_n\}$

当 $n\ge 2$ 时

则 $a_n=\dfrac{1}{(n!)^2(n+1)}\div\dfrac{1}{[(n-1)!]^2n}=\dfrac{[(n-1)!]^2\bullet n}{(n!)^2\bullet(n+1)}=\dfrac{n}{n^2\bullet(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

当 $n=1$ 时， $a_1=\dfrac{1}{(1!)^2(1+1)}=\dfrac{1}{2}$ 上式也成立，因此 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ （$n\in N_+$）

$S_n=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\mathbf{L}+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\mathbf{L}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$

375、数列$b_n=3n-1$，$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})(a>1)$，$S_n$是数列$\{a_n\}$前 n 项和

求证：$S_n>\frac{\log_a b_{n+1}}{3}$　(高考难题)

$$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})=\log_a(1+\frac{1}{3n-1})=\log_a\frac{3n}{3n-1}$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{6}{5}+\cdots+\log_a\frac{3n}{3n-1}$$

$$=\log_a(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})$$

由假分数的性质得

$\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}>\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}$　(1)

$\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}>\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+2}{3n+1}$　(2)

又$\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}$　(3)

(1)×(2)×(3) 得

$(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})^3>\frac{3\times4\times5\times\cdots\times(3n+2)}{2\times3\times4\times\cdots\times(3n-1)}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2\times3}$

当 n≥2 时 $(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})^3>\frac{(3n+1)(3n+2)}{2\times3}$>3n+2=$b_{n+1}$

因为$a>1$

故有$3\log_a(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})>\log_a b_{n+1}$，即$S_n>\frac{\log_a b_{n+1}}{3}$

当 n=1 时$S_1=\log_a\frac{3}{2}<\frac{\log_a 5}{3}$

综上当 n≥2 时原式成立

379、求$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n})$ (竞赛)

解：$\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\geq\frac{1}{n^3+n}+\frac{2^2}{n^3+n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)}$

$$\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\leq\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}=\frac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)}$$

因$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)}=\frac{1}{3}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)}=\frac{1}{3}$

故$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n})=\frac{1}{3}$

421、已知 $y=f(x)$， $f(-1)=1$，对任意实数 x,y 满足： $f(x+y)=f(x)+f(y)-3$

(1)当 $n\in N$ 时求 $f(n)$ 的表达式

(2)若 $b_1=1$， $b_{n+1}=b_n+f(n-1)$， 求 b_n

(3)求证当 $n\in N_+$ 时 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{7}{4}$ (高考难题)

解：（1）令 $x=y=0$， 得 $f(0)=3$

令 $x=1,y=-1$ 得 $f(0)=f(1)+f(-1)-3$， $f(1)=5$

故 $f(n+1)=f(n)+f(1)-3=f(n)+2$， $f(n+1)-f(n)=2$

当 $n\in N$ 时 $f(n)=f(-1)+[f(0)-f(-1)]+[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]$

$+\cdots+[f(n)-f(n-1)]=1+2(n+1)=2n+3$

(2) $b_{n+1}=b_n+f(n-1)\,)=b_n+2n+1$

$b_{n+1}-b_n=2n+1$

故 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_2-b_1)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$

$=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

（3）当 $n=1$ 或 2 时易证 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{7}{4}$

当 $n\geq 3$ 时 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\times 3}++\frac{1}{4\times 4}+++\cdots+\frac{1}{n\times n}$

$<\frac{5}{4}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+++\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{5}{4}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})<\frac{7}{4}$

473、 问题 1 求 (竞赛)

$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}}}}}}}$$

解：设 $a_n=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots\sqrt{3\sqrt{5}}}}}}$ （$2n$ 层根号）

则 $a_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{2n+1}}}\bullet 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}}=a_n=3^{\frac{2}{3}(1-\frac{1}{4^n})}\bullet 5^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n})}$

$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}}}=\lim_{n\to\infty}a_n==\lim_{n\to\infty}3^{\frac{2}{3}(1-\frac{1}{4^n})}\bullet\lim_{n\to\infty}5^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n})}$

$=3^{\frac{2}{3}}\bullet 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{45}$

问题 2

设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2}}}}$ （n 层根号）

求 a_n 和 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2\,\mathbf{L}}}}}$

解：$a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{p}{4}$

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{p}{4}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{p}{4})}=\sqrt{2\bullet 2\cos^2\frac{p}{8}}=2\cos\frac{p}{8}$$

$$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+a_2}=\sqrt{2(1+\cos\frac{p}{8})}=\sqrt{2\bullet 2\cos^2\frac{p}{16}}=2\cos\frac{p}{16}$$

……，$a_n=2\cos\frac{p}{2^{n+1}}$ （*）

下面用数学归纳法证明（*）

（1）当 $n=1$ 时（*）显然成立

（2）假设当 $n=k$ 时（*）成立，即 $a_k=2\cos\frac{p}{2^{k+1}}$

则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}=\sqrt{2(1+\cos\frac{p}{2^{k+1}})}==\sqrt{2\bullet 2\cos^2\frac{p}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{p}{2^{k+2}}$

即当 $n=k+1$ 时（*）也成立

综上，当 $n\in N_+$ 时 $a_n=2\cos\frac{p}{2^{n+1}}$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2\,\mathbf{L}}}}}=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{p}{2^{n+1}}=2\cos 0=2$$

问题 3；已知 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2\,\mathbf{L}}}}}$ 的值存在，求其值

解 1（初中）：设 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2\,\mathbf{L}}}}}=x$

则 $\sqrt{2+x}=x$，解得 $x=2$

解 2（高中）：设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2}}}}$ （n 层根号）

依题意 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设为 x

因 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，两边取极限得 $\sqrt{2+x}=x$，解得 $x=2$

故 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\mathbf{L}+\sqrt{2\,\mathbf{L}}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x=2$

549、已知：数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式(数列) (联赛)

解：由于$a_{n+1}=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$（1）考虑到求根公式

知a_{n+1}是方程$x^2-px+q=0$的大根，由韦达定理

$$p=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}+\frac{1+4a_n-\sqrt{1+24a_n}}{16}=\frac{1+4a_n}{8}$$

$$q=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}\bullet\frac{1+4a_n-\sqrt{1+24a_n}}{16}=\frac{a_n{}^2-a_n}{16}$$

于是$a_{n+1}{}^2-\frac{1+a_n}{8}\bullet a_{n+1}+\frac{1}{16}(a_n{}^2-a_n)=0$

化为$a_n{}^2-(8a_{n+1}+1)a_n+16a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}=0$

$a_n=\frac{1+8a_{n+1}-\sqrt{1+24a_{n+1}}}{2}$（由（1）知应舍去加根号之根）

故$a_{n-1}=\frac{1+8a_n-\sqrt{1+24a_n}}{2}$（2）

由（1）（2）消去$\sqrt{1+24a_n}$得

$8a_{n+1}-6a_n+a_{n-1}=1$（3）

齐次递推式$8a_{n+1}-6a_n+a_{n-1}=0$（4）的特征方程为$8x^2-6x+1=0$，特征根是

$x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{4}$

于是方程（4）的解是$a_n=a(\frac{1}{2})^{n-1}+b(\frac{1}{4})^{n-1}$

方程（3）的解是$a_n=a(\frac{1}{2})^{n-1}+b(\frac{1}{4})^{n-1}+c$　　（5）

因$a_1=1$，$a_2=\frac{5}{8}$，$a_3=\frac{15}{32}$代入（5）求出$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{6},c=\frac{1}{3},$

因此$a_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}$

解 2：　设$b_n=\sqrt{1+24a_n}>0$

则　$b_1=5$，$b_n^2=1+24a_n$　，即 $a_n=\frac{b_n^2-1}{24}$

$\therefore \frac{b_{n+1}^2-1}{24}=\frac{1}{16}(1+\frac{b_n^2-1}{6}+b_n)$

化简得　$(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$

$\therefore 2b_{n+1}=b_n+3$，即　$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$

数列 $\{b_n-3\}$ 是以 2 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列。

$b_n-3=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{2-n}$　　即　$b_n=2^{2-n}+3$

$\therefore a_n=\frac{b_n^2-1}{24}=\frac{2^{2n-1}+3\times 2^{n-1}+1}{3\times 2^{2n-1}}$

550、已知 $a_{n+1}+a_n+2b_n=24$，　$b_{n+1}+2a_n-2b_n=9$，　$a_0=10, b_0=9$，求 a_n

(数列) (联赛)

解：由 $a_{n+1}+a_n+2b_n=24$，　$b_{n+1}+2a_n-2b_n=9$ 消去 b_n，　b_{n+1} 得

$a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=-42$（1）

齐次递推式 $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$（1）的特征方程为 $x^2-x-6=0$，特征根是

$x_1=3, x_2=-2$

于是方程（1）的解是 $a_n=a\bullet 3^n+b(-2)^{n`}+c$（2）

因 $a_1=10$，　$a_1=-4$，　$a_2=14$ 代入（5）求出 $a=-1$，　$b=4, c=7$

因此 $a_n=-3^n+4(-2)^{n`}+7$

551、已知：数列 $\{x_n\}$ 中，　$x_0=0$，　$x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n{}^2+1}$ 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式

(联赛)

解 1：由于 $x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n{}^2+1}$（1）考虑到求根公式

知 x_{n+1} 是方程 $x^2-px+q=0$ 的大根，由韦达定理

$p=3x_n+\sqrt{8x_n{}^2+1}+3x_n-\sqrt{8x_n{}^2+1}=6x_n$

$q=(3x_n+\sqrt{8x_n{}^2+1})\ (3x_n-\sqrt{8x_n{}^2+1})=x_n{}^2-1$

于是 $x^2-px+q=0$ 就是

$x^2-6x_n\bullet x+x_n{}^2-1=0$（2）

所以 $x_{n+1}{}^2-6x_n\bullet x_{n+1}+x_n{}^2-1=0$

化为 $x_n{}^2-6x_{n+1}\bullet x_n+x_{n+1}{}^2-1=0$

即 $x_{n-1}{}^2-6x_n\bullet x_{n-1}+x_n{}^2-1=0$

可见 x_{n-1} 是方程（1）的另一个根，于是

$x_{n-1}=3x_n-\sqrt{8x_n{}^2+1}$（3）

由（1）（3）消去 $\sqrt{8x_n{}^2+1}$ 得

$x_{n+1}-6x_n+x_{n-1}=0$（3）

它的特征方程为 $x^2-6x+1=0$，特征根是 $3\pm2\sqrt{2}$

于是 $x_n=a(3+2\sqrt{2})^n+b(3-2\sqrt{2})^n$　　（4）

把 $x_0=0$， $x_1=1$ 代入（4）求出 $a=\frac{\sqrt{2}}{8}$， $b=-\frac{\sqrt{2}}{8}$

因此 $x_n=\frac{\sqrt{2}}{8}[(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n]$

解 2：

$x_{n+1}-3x_n=\sqrt{8x_n{}^2+1}$

$x_{n+1}{}^2-6x_{n+1}x_n+9x_n{}^2=8x_n{}^2+1$

$x_{n+1}{}^2-6x_{n+1}x_n+x_n{}^2-1=0$(1)

让 n 为 $n-1$ 得

$x_n{}^2-6x_nx_{n-1}+x_{n-1}{}^2-1=0$

即 $x_{n-1}{}^2-6x_nx_{n-1}+x_n{}^2-1=0$(2)

由(1)(2)得 x_{n+1} 与 x_{n-1} 是方程 $t^2-6x_nt+x_n{}^2-1=0$ 的两根

于是 $x_{n+1}+x_{n-1}=6x_n$

下面与解 1 同

567、设数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0$，记$b_n=\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$，

求：$\{b_n\}$的通项公式，及$\{a_nb_n\}$的前n项和S_n　(数列)

解：$a_n=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2}$代入$8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0$得

$$8\left(\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\right)-16\left(\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\right)+5=0$$

$$b_{n+1}=2b_n-\frac{4}{3}$$

$$b_{n+1}-\frac{4}{3}=2(b_n-\frac{4}{3})$$

故$b_n-\dfrac{4}{3}=(b_1-\dfrac{4}{3})2^{n-1}=\dfrac{2}{3}\bullet 2^{n-1}$

$$b_n=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\bullet 2^{n-1}$$

$$a_nb_n=b_n\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}b_n=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\bullet 2^{n-1}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\bullet 2^{n-1}$$

$$S_n=\frac{5}{3}n+\frac{\frac{1}{3}(1-2^n)}{1-2}==\frac{5n+2^n-1}{3}$$

603、已知$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{3-an+4n^2})$则 a 的值是多少？(极限)

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{3-an+4n^2})=\lim\dfrac{4n^2-(3-an+4n^2)}{2n+\sqrt{3-an+4n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an-3}{2n+\sqrt{3-an+4n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an-3}{2n+\sqrt{3-an+4n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}}{2+\sqrt{\frac{3}{n^2}-\frac{a}{n}+4}}=\frac{a}{2+\sqrt{4}}=\frac{a}{4}=1$$，于是$a=4$

607、问题：我声明一点，我没学过这些东西，所以不能枉下定论
但，我认为 1 是不等于 0.9999999999999…的
科学证明人的基因结构与白鼠的基因结构只相差万分之一
那:白鼠=人吗？？？？显然是不对的。。。但是，我能证出他是相等的：
如下：令 0.99…=X，（1）9.99…=10X，（2）
（1）-（2）得 9=9X，X=1 我郁闷了~~~~~~~~(极限)

回答： 0.9999999999999…的意思是 0.9+0.09+0.009+0.0009+…表示无限个数的和。

如果是有限个的和，例如，0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+0.000009＝0.999999 当然比 1 少了哪么一点点，

但是 0.9999999999999…＝0.9+0.09+0.009+0.0009+…表示无限个数的和
这就与有限个的和 0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+0.000009＝0.999999 有着本质的区别了。

下面用两个方法讲一讲为什么 0.9999999999999…＝1

方法 1（对高三的学生）

0.9+0.09+0.009+0.0009+…就是无穷等比数列 0.9，0.09，0.009，0.0009，…

的各项和，因为其前 n 项和 $S_n=\frac{0.9(1-0.1^n)}{1-0.1}=1-0.1^n$

于是 0.999999999…＝0.9+0.09+0.009+0.0009+…＝$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-0.1^n)=1$

方法 2（对高三以下的学生）

我们把一根长为 1 米的绳子，第一次取出$\frac{1}{2}$（用剪刀剪下）即取出$\frac{1}{2}$米，第二次取出剩下的$\frac{1}{2}$（用剪刀剪下）即取出$\frac{1}{4}$米，第三次把剩下的全部取出即取出$\frac{1}{4}$米，于是，绳长 1 米＝（$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$）米

如果，我们把一根长为 1 米的绳子，第一次取出$\frac{1}{2}$（用剪刀剪下）即取出$\frac{1}{2}$米，第二次取出剩下的$\frac{1}{2}$（用剪刀剪下）即取出$\frac{1}{4}$米，第三次还是取出剩下的$\frac{1}{2}$（用剪刀剪下）即取出$\frac{1}{8}$米，如此一直取下去永不停下，每次取出绳子的长依次是

$\frac{1}{2}$米，$\frac{1}{4}$米，$\frac{1}{8}$米，…就可以得到无穷个数。于是，

绳长 1 米＝（$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$）米，也就是 1 等于$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$的总和。

同样的道理 1＝0.9+0.09+0.009+0.0009+…＝0.999999999…

609、数列$\{x_n\}$中（$x_n \neq 0$），满足等式

$$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$$

是数列$\{x_n\}$成等比数列的（　　）(数列) (不等式) (竞赛)

A 充分非必要条件 B 必要非充分 C 既非必要又非充分条件 D 充要条件

解：若数列$\{x_n\}$成等比数列，设公比为q则

$$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})$$

$$=(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})\bullet q^2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})=q^2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})^2$$

$$(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)^2=(qx_1^{\ 2}+qx_2^{\ 2}+\cdots+qx_{n-1}^{\ 2})^2=q^2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})^2$$

故$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$

若$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$

由柯西不等式知

$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})\geq(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$

当且仅当$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\cdots=\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$时，取等号

由于已有$(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_{n-1}^{\ 2})(x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$

因此有$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\cdots=\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$， 于是数列$\{x_n\}$成等比数列

综上：是充要条件

624、数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=2,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$， 求$a_n$

（对高一的学生用如下解法）(数列) (竞赛)

解：设$a_{n+2}-\dfrac{1}{k}a_{n+1}=k(a_{n+1}-\dfrac{1}{k}a_n)$

则$a_{n+2}=(\dfrac{1}{k}+k)a_{n+1}-a_n$

$\dfrac{1}{k}+k=3$， $k^2-3k+1=0$， $k=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$$a_{n+2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(a_{n+1}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_n)$$

$$a_{n+2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(a_{n+1}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_n)$$

$$a_{n+1}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_n=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(a_2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_1)=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\sqrt{5}-1)\text{（1）}$$

$$a_{n+1}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_n=(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{n-1}(a_2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_1)=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(-\sqrt{5}-1)$$ （2）

（1）-（2）得 $\sqrt{5}a_n=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\sqrt{5}-1)+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\sqrt{5}+1)$

$$a_n=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(1-\frac{\sqrt{5}}{5})+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(1+\frac{\sqrt{5}}{5})$$

630、求和(数列) (竞赛)

$$\frac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \cdots \bullet n}+\frac{1}{2\bullet 3\bullet 4\bullet \cdots \bullet (n+1)}+\cdots+\frac{1}{n\bullet (n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-1)}$$

解：$\frac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \cdots \bullet n}+\frac{1}{2\bullet 3\bullet 4\bullet \cdots \bullet (n+1)}+\cdots+\frac{1}{n\bullet (n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-1)}$

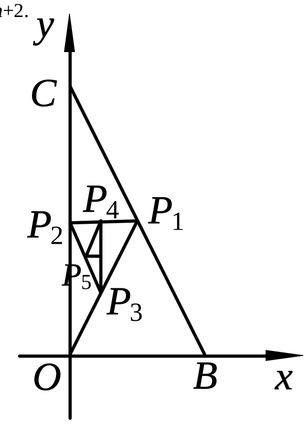
$$=(\frac{1}{n-1})[\frac{n-1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \cdots \bullet n}+\frac{n+1-2}{2\bullet 3\bullet 4\bullet \cdots \bullet (n+1)}+\cdots+\frac{2n-1-n}{n\bullet (n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-1)}]$$

$$=(\frac{1}{n-1})[\frac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \cdots \bullet (n-1)}-\frac{1}{2\bullet 3\bullet 4\bullet \cdots \bullet n}-\frac{1}{3\bullet 4\bullet \cdots \bullet (n+1)}+$$

$$\cdots+\frac{1}{n\bullet (n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-2)}-\frac{1}{(n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-1)}$$

$$=(\frac{1}{n-1})[\frac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \cdots \bullet (n-1)}-\frac{1}{(n+1)\bullet (n+2)\bullet \cdots \bullet (2n-1)}]$$

848、如图，△OBC 的三个顶点坐标分别为(0,0)、(1,0)、(0,2)，设 P_1 为线段 BC 的中点，P_2 为线段 CO 的中点，P_3 为线段 OP_1 的中点，对于每一个正整数 n，P_{n+3} 为线段 P_nP_{n+1} 的中点，令 P_n 的坐标为(x_n,y_n)，$a_n=\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}$.



（1）求 a_1,a_2,a_3 及 a_n;

（2）证明 $y_{n+4}=1-\frac{y_n}{4}$,$n\in N^*$;

（3）若记 $b_n=y_{4n+4}-y_{4n},n\in N^*$，证明$\{b_n\}$是等比数列。(数列)

解：(Ⅰ)因为 $y_1=y_2=y_4=1,y_3=\frac{1}{2},y_5=\frac{3}{4}$，

所以 $a_1=a_2=a_3=2$，又由题意可知 $y_{n-3}=\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}y_{n+1}+y_{n+2}+y_{n+3}=\frac{1}{2}y_{n+1}+y_{n+2}+\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$

$=\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}=a_n$， $\therefore \{a_n\}$为常数列。$\therefore a_n=a_1=2,n\in N^*$.

(Ⅱ)将等式 $\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}=2$ 两边除以 2，得

$\frac{1}{4}y_n+\frac{y_{n+1}+y_{n+2}}{2}=1$, 又$\because y_{n+4}=\frac{y_{n+1}+y_{n+2}}{2}$ $\therefore y_{n+4}=1-\frac{y_n}{4}$.

（Ⅲ）$\because b_{n-1}=y_{4n+3}-y_{4n+4}=(1-\frac{y_{4n+4}}{4})-(1-\frac{y_{4n}}{4})=-\frac{1}{4}(y_{4n+4}-y_{4n})=-\frac{1}{4}b_n$，

又$\because b_1=y_3-y_4=-\frac{1}{4}\neq 0$, $\therefore \{b_n\}$是公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列

867、(函数) (数列)

已知 a 是自然数， $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+a)}$， 数列{Cn}满足 $c_n f(n)=(-1)^n$

问：对于任意的 a，是否总存在正整数 n，使得 Sn>2008 成立？为什么？(Sn 是 Cn 的前 n 项和）

解： $f(n)=\dfrac{n}{(n+1)(n+a)}$， $c_n=\dfrac{(-1)^n}{f(n)}=\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+a)}{n}$

当 $n=2m$， $m\in N_+$ 时

因 $c_{2m}+c_{2m-1}=\dfrac{(2m+1)(2m+a)}{2m}-\dfrac{2m(2m-1+a)}{2m-1}$

$=\dfrac{(4m^2-1)(2m+a)-4m^2(2m-1+a)}{2m(2m-1)}$

$=\dfrac{4m^2-2m-a}{2m(2m-1)}=1-\dfrac{a}{2m(2m-1)}=1-a[\dfrac{1}{2m-1}-\dfrac{1}{2m}]$

于是 $S_n=S_{2m}=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+(c_5+c_6)+\ldots+(c_{2m-1}+c_{2m})=m-a(1-\dfrac{1}{2m})$

要使 $S_n>2008$，只要 $m-a(1-\dfrac{1}{2m})>2008$， $m>2008+a-\dfrac{a}{2m}$

因 $a\in N$ 故 $\dfrac{a}{2m}\geq 0$，只要取 $m=2009+a$， 就有 $S_n=S_{2m}>2008$

876、(数列)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2b$， $a_{n+1}=2b-\dfrac{b^2}{a_n}$ （$b\neq 0$），试求 $\{a_n\}$ 的通项公式

解： $a_{n+1}-b=b-\dfrac{b^2}{a_n}=\dfrac{b(a_n-b)}{a_n}$

于是 $\dfrac{1}{a_{n+1}-b}=\dfrac{a_n}{b(a_n-b)}=\dfrac{a_n-b+b}{b(a_n-b)}=\dfrac{1}{a_n-b}+\dfrac{1}{b}$

$\dfrac{1}{a_n-b}=\dfrac{1}{a_1-b}+\dfrac{1}{b}(n-1)=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}(n-1)=\dfrac{n}{b}$， $a_n-b=\dfrac{b}{n}$， $a_n=b+\dfrac{b}{n}=b(1+\dfrac{1}{n})$

888、(数列) (函数)

f(x)＝$x+2(\sqrt{x}+1)$（$x\geq 0$）

(1)求 f(x)反函数(2)设 an 前 n 项和为 Sn,若 $S_n=f(S_{n-1})$，$a_1=2$，求 a_n

解：（1）$y=x+2\sqrt{x}+2$，$y-1=(\sqrt{x}+1)^2$，$\sqrt{y-1}=\sqrt{x}+1$

$\sqrt{x}=\sqrt{y-1}-1$，$x=y-2\sqrt{y-1}$，于是 $f^{-1}(x)=x-2\sqrt{x-1}(x\geq 2)$

（2）$S_n=S_{n-1}+2(\sqrt{S_{n-1}}+1)$，$a_n=2(\sqrt{S_{n-1}}+1)$

$4S_{n-1}=(a_n-1)^2$，$4S_n=(a_{n+1}-1)^2$，$4a_n=(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2$

$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}-a_n{}^2-2a_n=0$

$(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2)-2(a_{n+1}+a_n)=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$

$a_{n+1}-a_n-2=0$，　$a_{n+1}-a_n=2$

908、(数列) (高考不要求)

已知：正数列 A_0，A_1，A_2，A_3，…，An 满足 $\sqrt{A_nA_{n-2}}-\sqrt{A_{n-1}A_{n-2}}=2A_{n-1}$

求 A_n

解：$\sqrt{A_nA_{n-2}}-\sqrt{A_{n-1}A_{n-2}}=2A_{n-1}$

$\frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{A_{n-1}}}-1=\frac{2\sqrt{A_{n-1}}}{\sqrt{A_{n-2}}}$ 设 $b_n=\frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{A_{n-1}}}$，则 $b_n=2b_{n-1}+1$

909、(数列) (高考不要求)

已知数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}$ 求 a_n

解：由方程 $x=\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{3}-x}$，解得：$x=\pm i$，

$$a_{n+1}-i=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}-i=\frac{\sqrt{3}a_n+1-i\sqrt{3}+ia_n}{\sqrt{3}-a_n}=\frac{\sqrt{3}(a_n-i)+i(a_n-i)}{\sqrt{3}-a_n}=\frac{(\sqrt{3}+i)(a_n-i)}{\sqrt{3}-a_n}$$

$$a_{n+1}+i=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}+i=\frac{\sqrt{3}a_n+1+i\sqrt{3}-ia_n}{\sqrt{3}-a_n}=\frac{\sqrt{3}(a_n+i)-i(a_n+i)}{\sqrt{3}-a_n}=\frac{(\sqrt{3}-i)(a_n+i)}{\sqrt{3}-a_n}$$

$\frac{a_{n+1}-i}{a_{n+1}+i}=\frac{(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)}(\frac{a_n-i}{a_n+i})$，以下用迭代

910、(数列) (高考不要求)

正项数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{10}=10$，$a_n{}^2 a_{n-1}{}^{-3} a_{n-2}=1$求 a_n

解：$a_n{}^2 a_{n-2}=a_{n-1}{}^3$，则$2\lg a_n+\lg a_{n-2}=3\lg a_{n-1}$

$\lg a_n=\frac{3}{2}\lg a_{n-1}-\frac{1}{2}\lg a_{n-2}$

912、(数列)

例如$a_n=2^{n-1},b_n=5n-3$，如何证明公共项成等比？

解：设公共项组成的数列是$\{c_n\}$

$a_2=2=b_1$，$a_6=32=b_7$，$a_{10}=512=b_{103}$

于是猜出$c_n=a_{4n-2}$，再用数学归纳法证明

不用数学归纳法证明也行

证所有的a_{4n-2}是公共项，所有的a_{4n-3}，a_{4n}，a_{4n+1}不是公共项

被 5 除的余数不是 2，故不是

914、(数列) (高考不要求)

已知数列$\{a_n\}$中，$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\sqrt{1-\sqrt{1-a_n{}^2}}$

求：a_n

$a_0=\sin\frac{p}{4}$，$a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\sqrt{1-\cos\frac{p}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\sqrt{2\sin^2\frac{p}{8}}=\sin\frac{p}{8}$

$a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\sqrt{1-\cos\frac{p}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\sqrt{2\sin^2\frac{p}{16}}=\sin\frac{p}{32}$

……

$a_n=\sin\frac{p}{2^{n+1}}$，可用数数归纳法证明

916、(数列)

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=2$，且$a_{n+1}=3a_n-2b_n$，$b_{n+1}=5a_n-4b_n$

求：a_n和b_n

解 1：由$a_{n+1}=3a_n-2b_n$得$b_n=\dfrac{3a_n-a_{n+1}}{2}$代入$b_{n+1}=5a_n-4b_n$得

$$\frac{3a_{n+1}-a_{n+2}}{2}=5a_n-4\bullet\frac{3a_n-a_{n+1}}{2}$$

$$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n=-2(a_{n+1}-a_n)$$

故$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列，公比为-2，首项$=a_2-a_1=-1-1=-2$

$$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

于是$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\mathbf{L}(a_n-a_{n-1})$

$=1+(-2)+(-2)^2+\mathbf{L}(-2)^{n-1}=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$

解 2：由$a_{n+1}=3a_n-2b_n$得$b_n=\dfrac{3a_n-a_{n+1}}{2}$代入$b_{n+1}=5a_n-4b_n$得

$\dfrac{3a_{n+1}-a_{n+2}}{2}=5a_n-4\bullet\dfrac{3a_n-a_{n+1}}{2}$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$

特征方程为$x^2+x-2=0$，特征根是$x_1=1,x_2=-2$

可设$a_n=a\bullet(1)^n+b\bullet(-2)^n=a+b\bullet(-2)^n$由$a_1=1,a_2=-1$

得 $\begin{cases}a-2b=1\\a+4b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ $\quad\therefore a_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}(-2)^n$

927、. (数列) (高考不要求)

已知数列$\{a_n\}$中，$a_0=2$，$a_1=\dfrac{5}{2}$，$a_{n+1}=a_n({a_{n-1}}^2-2)-a_1$，求：$a_n$

解：设$a_n=2^{b_n}+\dfrac{1}{2^{b_n}}$，代入$a_{n+1}=a_n({a_{n-1}}^2-2)-a_1$得

$$2^{b_{n+1}}+\frac{1}{2^{b_{n+1}}}=(2^{b_n}+\frac{1}{2^{b_n}})[(2^{b_{n-1}}+\frac{1}{2^{b_{n-1}}})^2-2]-\frac{5}{2}$$

$$=(2^{b_n}+\frac{1}{2^{b_n}})(2^{2b_{n-1}}+\frac{1}{2^{2b_{n-1}}})-\frac{5}{2}$$

$$=(2^{b_n+2b_{n-1}}+\frac{1}{2^{b_n+2b_{n-1}}})+(2^{2b_{n-1}-bn}+\frac{1}{2^{2b_{n-1}-bn}})-(2+\frac{1}{2})\quad(*)$$

令 $2^{b_{n+1}}+\frac{1}{2^{b_{n+1}}}=2^{b_n+2b_{n-1}}+\frac{1}{2^{b_n+2b_{n-1}}}$，

只需要 $b_{n+1}=b_n+2b_{n-1}$

特征方程是 $x^2-x-2=0$，特征根是 $x_1=-1,x_2=2$

可设 $b_n=a\bullet(-1)^n+b\bullet 2^n$ 由 $b_1=0,b_2=1$

得 $\begin{cases}a+b=0\\-a+2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{3}\end{cases}$ $\therefore b_n=\frac{1}{3}\bullet 2^n-\frac{1}{3}(-1)^n$

此时 $2b_{n-1}-b_n=2[\frac{1}{3}\bullet 2^{n-1}-\frac{1}{3}(-1)^{n-1}]-[\frac{1}{3}\bullet 2^n-\frac{1}{3}(-1)^n]=(-1)^n$

于是 $2^{2b_{n-1}-bn}+\frac{1}{2^{2b_{n-1}-bn}}=2+\frac{1}{2}$,故(*)式成立

因此 $a_n=2^{b_n}+\frac{1}{2^{b_n}}=2^{\frac{1}{3}\bullet 2^n-\frac{1}{3}(-1)^n}+2^{\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}\bullet 2^n}$

978、(圆锥曲线) (数列)(不等式)

已知抛物线 $y^2=x+4$ 上的两点 $A(0,2)$，$A(-4,0)$ 在该抛物线上找一点 C_1，使 $AB\perp BC_1$，找一点 C_2，使 $AC_1\perp C_1C_2$，找一点 C_3，使 $AC_2\perp C_2C_3$，…，依次下去，得到抛线上一系列点 $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$，记 $C_n(a_n,b_n)$ (1)写出 b_{n+1} 与 b_n 的关系（2）求证 $b_n\in(-1,0)$ （3）求证 $b_{2n}>b_{2n-1}$ （4）求证 $\{b_{2n-1}\}$ 递增

证明:（1）因 $AC_n\perp C_nC_{n+1}$ 故 $\frac{b_{n+1}-bn}{a_{n+1}-a_n}=\frac{bn-2}{a_n}$，

因 $C_n(a_n,b_n)$ 在抛物线 $y^2=x+4$，故 $a_n=b_n{}^2-4$ 故 $\frac{b_{n+1}-bn}{b_{n+1}{}^2-b_n{}^2}\bullet\frac{bn-2}{b_n{}^2-4}=-1$

$\frac{1}{b_{n+1}+b_n}\bullet\frac{1}{b_n+2}=-1$，$b_{n+1}=-\frac{1}{b_n+2}-b_n=-\frac{1}{b_n+2}-(b_n+2)+2$

(2)用数学归纳法

①由 $AB\perp BC_1$ 得 $\frac{b_1}{a_1+4}\bullet\frac{2}{4}=-1$，$\frac{b_1}{b_1{}^2}\bullet\frac{2}{4}=-1$，$b_1=-\frac{1}{2}\in(-1,0)$

②假设 $b_k\in(-1,0)$，则 $b_{k+1}=-\frac{1}{b_k+2}-b_k=-\frac{(b_k+1)^2}{b_k+2}<0$

$b_{k++}+1=1-\frac{(b_k+1)^2}{b_k+2}=\frac{b_k+2-(b_k+1)^2}{b_k+2}=\frac{1-b_k(b_k+1)}{b_k+2}>0$，$b_{k++}>-1$

于是 $b_{k+1}\in(-1,0)$，由数学归纳法原理得 $b_n\in(-1,0)$

（3）$b_{n+1}+2=-\frac{1}{b_n+2}-b_n=4-\frac{1}{b_n+2}-(b_n+2)$

设 $d_n=b_n+2$，则 $d_{n+1}=4-(\frac{1}{d_n}+d_n)$

由（1）知 $1<d_n<2$，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in(1,2)$ 上是递增

$d_2=4-(d_1+\frac{1}{d_2})=\frac{11}{6}$，

由 $d_2>d_1$ 得，$d_2+\frac{1}{d_2}>d_1+\frac{1}{d_1}$，$4-(d_2+\frac{1}{d_2})<4-(d_1+\frac{1}{d_1})$，

故 $d_3<d_2$ 得，$d_3+\frac{1}{d_3}<d_2+\frac{1}{d_2}$，$4-(d_3+\frac{1}{d_3})>4-(d_2+\frac{1}{d_2})$

于是 $d_4>d_3$

假设 $d_{2k}>d_{2k-1}$，用上面的方法可得 $d_{2k+2}>d_{2k+1}$

由数学归纳法原理得 $d_{2n}>d_{2n-1}$ 恒成立，故 $b_{2n}>b_{2n-1}$

(4) $d_{2n+1}-d_{2n-1}=4-(d_{2n}+\frac{1}{d_{2n}})-d_{2n-1}=4-[4-(d_{2n-1}+\frac{1}{d_{2n-1}})]-\frac{1}{d_{2n}}-d_{2n-1}$

$=\frac{1}{d_{2n-1}}-\frac{1}{d_{2n}}=\frac{d_{2n}-d_{2n-1}}{d_{2n}d_{2n-1}}>0$（由（3））

所以 $d_{2n+1}>d_{2n-1}$，于是 $b_{2n+1}>b_{2n-1}$，$\{b_{2n-1}\}$ 递增

1017、(数列)

求 1•2•3+2•3•4+3•4•5+…+n(n+1)(n+2)的前 n 项和.

解：因 n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)=4n(n+1)(n+2)

故 n(n+1)(n+2)$=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$

于是 1•2•3+2•3•4+3•4•5+…+n(n+1)(n+2)

$=\frac{1}{4}[1\times2\times3\times4-0\times1\times2\times3]+\frac{1}{4}[2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4]+\mathbf{L}+$

$\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

1033、(数列)

从 1，2，3，…，n 这 n 个数中任取两个,求两数之积的数学期望.

解：$1\times2+1\times3+\cdots+(n-1)n=\dfrac{(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{2}$

$=\dfrac{[\frac{n(n+1)}{2}]^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2}=\dfrac{n(n+1)}{4}[\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{2n+1}{3}]=\dfrac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{24}$

任取两个的取法数有 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 种

于是，两数之积的数学期望=$\dfrac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{24}\times\dfrac{2}{n(n-1)}=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$

1034、(数列)

问题：已知 $A(0,0)$， $B(a,b)$ 两点，其中 $ab\ne0$， P_1是AB 的中点， P_2是BP_1 的中点， P_3是P_1P_2 的中点，…， P_{n+2}是P_nP_{n+1} 的中点，则 P_n 的极限位置是(　　)

A、$(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$　　B、$(\frac{3a}{5},\frac{3b}{5})$　　C、$(\frac{2a}{3},\frac{2b}{3})$　　D、$(\frac{3a}{5},\frac{3b}{5})$

解 1、作为选择题画一条线段，标到四个中点就可排除 A、B、D 故选 C

解 2（解答题）：设 $P_n(a_n,b_n)$，

因为 P_{n+2} 是 P_nP_{n+1} 的中点，于是

$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$， $b_{n+2}=\dfrac{b_{n+1}+b_n}{2}$

$2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$， 由特征方程 $2x^2-x-1=0$ 得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$， $x_2=1$

于是 $a_n=p(-\frac{1}{2})^n+t$， $p(-\frac{1}{2})^0+t=a$， $p(-\frac{1}{2})^1+t=\frac{a}{2}$

得 $p=\frac{a}{3}$， $t=\frac{2a}{3}$ 于是 $a_n=\frac{a}{3}[(-\frac{1}{2})^n+2]$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2a}{3}$， 同理 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{2b}{3}$

解 3、罗列找规律

0，a、 $a_1=\frac{a}{2}=a-\frac{a}{2}$， $a_2=a_1+\frac{a}{4}$， $a_3=a_2-\frac{a}{8}$

于是 $a_n=a_{n-1}+(-\frac{1}{2})^na$， 即 $a_n-a_{n-1}=(-\frac{1}{2})^na$

因此 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=\frac{a}{2}+[\frac{a}{4}-\frac{a}{8}+\mathbf{L}+(-\frac{1}{2})^{n}a]$， 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{2}+\frac{\frac{a}{4}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2a}{3}$

1056、(数列)

已知 $a_1>2$， $a_{n+1}{}^2=a_n+2$， $a_n>0$，则 $a_n=$ ______________

因为 $a_1>2$， 于是可设 $a_1=e^{a}+e^{-a}$

$a_2{}^2=a_1+2=e^{a}+e^{-a}+2=(e^{\frac{a}{2}}+e^{\frac{-a}{2}})^2$

于是 $a_2=e^{\frac{a}{2}}+e^{\frac{-a}{2}}$， 于是 $a_n=e^{\frac{a}{2^{n-1}}}+e^{\frac{-a}{2^{n-1}}}$

1070、(数列) (高考不要求)

在数列$\{a_n\}$中， $a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}$， $a_1=\sqrt{3}$， 则 $a_{2006}-a_2=$______

解：设 $a_n=\cot q_n$

$a_{n+1}=\frac{\cot q_n\cot 30^\circ+1}{\cot 30^\circ-\cot q_n}=\cot(q_n-30^\circ)$

1100、(数列)

有一数列 1，2，3，1，2，3，1，2，3……，那么它的通项公式 a_n=（ ），求和公式 S_n=（ ）

解：（1） $a_n=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2(n-2)p}{3}$

（2） $S_n=2n+(-1+0+1-1+0+1+\mathbf{L})$

设 $b_n=-1+0+1-1+0+1+\mathbf{L}$

则 $b_1=-1$， $b_2=-1$， $b_3=0$， $b_4=-1$， $b_5=-1$， $b_6=0$

于是 $b_n=-|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2np}{3}|$

因此 $S_n=2n-|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2np}{3}|$

1179、(排列组合)

求和 $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{n+2}{n!+(n+1)1+(n+2)!}$

解：$\dfrac{n+2}{n!+(n+1)1+(n+2)!}=\dfrac{n+2}{n!(n+2)^2}=\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{n+1}{(n+2)!}=\dfrac{n+2-1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

$\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{n+2}{n!+(n+1)1+(n+2)!}=$

$\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

1276、(函数) (向量)

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，点 A_0 表示原点，点 $A_n(n,f(n))(n\in N_+)$，若向量 $\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$，$\theta_k$ 是 $\overrightarrow{a_k}$ 与 $\vec{i}=(1,0)$ 的夹角，设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________

解：$A_0(0,0)$，$A_n(n,f(n))$，$\vec{a}=\overrightarrow{A_0A_n}=(n,f(n))=(n,\dfrac{1}{n+1})$

$\tan\theta_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，于是 $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$，$\lim S_n=1$

1320
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22447&show=0

已知数集序列 $\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\{13,15,17,19\}$，其中第 n 个集合有 n 个元素，每个集合都是由连续正奇数组成，并且每个集合中的最大数与后一个集合中的最小数是连续奇数。

(Ⅰ)求数集序列第 n 个集合的最大数 a_n 的表达式

(Ⅱ)设数集序列第 n 个集合的各数和为 T_n

(1)求 T_n 的表达式(2)令 $f(n)=(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{T_n}})^n(n\in N^+)$,求证：$2\le f(n)<3$

解：1、前 n 个集合的元素个数是 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

于是第 n 个集合的最大元素是 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\times 2-1=n(n+1)-1=n^2+n-1$

2（1）第 n 个集合的最小元素是 $a_{n-1}+1=n(n-1)=n^2-n+1$

于是第 n 个集合各数之和$T_n=\dfrac{n(n^2-n+1+n^2+n-1)}{2}=n^3$

（2） $f(n)=(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{T_n}})^n=(1+\dfrac{1}{n})^n=(1+\dfrac{1}{n})^n\cdot 1<(\dfrac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1})^{n+1}=f(n+1)$

故 $f(n)$ 递增，故 $f(n)\ge f(1)=2$

$(1+\dfrac{1}{6n})^n*\dfrac{5}{6}<[\dfrac{n(1+\frac{1}{6n})+\frac{5}{6}}{n+1}]^{n+1}=1$，于是$(1+\dfrac{1}{6n})^n<\dfrac{6}{5}$， $f(6n)<(\dfrac{6}{5})^6<3$

因 $f(n)$ 递增，故 $f(n)<f(6n)<3$

注： $f(n)<3$ 的证明

1329
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22216&start=12&show=0
2006 浙江高考第(20)题

已知函数 f(x)=x^3+x^2，数列{x_n}(x_n ＞0)的第一项x_1＝1，以后各项按如下方式取定：曲线 y=f(x)在$(x_{n+1},f(x_{n+1}))$处的切线与经过（0，0）和（x_n,f (x_n)）两点的直线平行.

求证：当 n∈ N^* 时，(Ⅰ)$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$； （Ⅱ） $(\dfrac{1}{2})^{n-1}\le x_n\le(\dfrac{1}{2})^{n-2}$

证明: (Ⅰ) 因 $f'(x)==3x^2+2x$

故：曲线 y=f(x)在$(x_{n+1},f(x_{n+1}))$处的切线的斜率是$3x_{n+1}{}^2+2x_{n+1}$

切线过（0，0）和（x_n， $x_n{}^3+x_n{}^2$），于是

$3x_{n+1}{}^2+2x_{n+1}=\dfrac{x_n{}^3+x_n{}^2}{x_n}=x_n{}^2+x_n$

（Ⅱ）设$g(x)=x^2+x$

因为$x_n{}^2+x_n=3x_{n+1}{}^2+2x_{n+1}<4x_{n+1}{}^2+2x_{n+1}$，所以$g(x_n)<g(2x_{n+1})$

因为$g(x)=x^2+x$在$(0,+\infty)$上递增，x_n ＞0

于是$x_n<2x_{n+1}$， $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>\dfrac{1}{2}$

故当$n\in N_+,n\ge 2$时

$$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}>1\cdot\overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}}^{n-1\text{个}\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{n-1}$$

又$x_1=1=(\dfrac{1}{2})^{1-1}$，于是当 n∈ N^* 时$x_n\ge(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

$x_n^{\ 2}+x_n=3x_{n+1}^{\ \ 2}+2x_{n+1}>2(x_{n+1}^{\ \ 2}+x_{n+1})$

即 $g(x_n)>2g(x_{n+1})>0$， $0<\dfrac{g(x_{n+1})}{g(x_n)}<\dfrac{1}{2}$

故当 $n\in N_+,n\geq 2$ 时

$$g(x_n)=g(x_1)\bullet\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\bullet\frac{g(x_3)}{g(x_2)}\bullet\cdots\bullet\frac{g(x_n)}{g(x_{n-1})}<2\bullet\overbrace{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet\cdots\bullet\frac{1}{2}}^{n-1个\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{n-2}$$

又 $g(x_1)=2=(\dfrac{1}{2})^{1-2}$， 于是当 n$\in N^*$ 时 $g(x_n)\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$

因 $x_n<x_n^{\ 2}+x_n=g(x_n)$，故 $x_n<(\dfrac{1}{2})^{n-2}$，当然也有 $x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$

（Ⅱ）证法 2①用数学归纳法先证 $x_n\geq(\dfrac{1}{2})^{n-1}$ （*）

当 $n=1$ 时， $x_1=1=(\dfrac{1}{2})^{1-1}$，于是此时（*）成立

假设当 n=k 时（*）式成立，即 $x_k\geq(\dfrac{1}{2})^{k-1}$

当 n=k+1 时,若 $x_{k+1}<(\dfrac{1}{2})^{k}$,则

$x_k^{\ 2}+x_k=3x_{k+1}^{\ \ 2}+2x_{k+1}<3(\dfrac{1}{4})^{k}+(\dfrac{1}{2})^{k-1}$ ①

又由 $x_k\geq(\dfrac{1}{2})^{k-1}$ 得 $x_k^{\ 2}+x_k\geq 4(\dfrac{1}{4})^{k}+(\dfrac{1}{2})^{k-1}$ ②

①②相矛盾，于是 $x_{k+1}\geq(\dfrac{1}{2})^{k}$

所以当 n=k+1 时（*）式成立，故当 $n\in N_+,n\geq 2$ 时 $x_n\geq(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

②再用放缩法证 $x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$ （**）

$x_n^{\ 2}+x_n=3x_{n+1}^{\ \ 2}+2x_{n+1}>2(x_{n+1}^{\ \ 2}+x_{n+1})$， 于是 $\dfrac{x_{n+1}^{\ \ 2}+x_{n+1}}{x_n^{\ 2}+x_n}<\dfrac{1}{2}$

当 $n\in N_+,n\geq 2$ 时

$$x_n^{\ 2}+x_n=(x_1^{\ 2}+x_1)\bullet\frac{x_2^{\ 2}+x_2}{x_1^{\ 2}+x_1}\bullet\frac{x_3^{\ 2}+x_3}{x_2^{\ 2}+x_2}\bullet\cdots\bullet\frac{x_n^{\ 2}+x_n}{x_{n-1}^{\ \ 2}+x_{n-1}}$$

$<2\bullet\overbrace{\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{1}{2}\bullet\cdots\bullet\dfrac{1}{2}}^{n-1个\frac{1}{2}}=(\dfrac{1}{2})^{n-2}$， 又 $x_1^{\ 2}+x_1=2=(\dfrac{1}{2})^{1-2}$

于是当 n$\in N^*$ 时 $x_n<x_n^{\ 2}+x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$，即（**）式成立

综上所述，是当 n$\in N^*$ 时， $(\dfrac{1}{2})^{n-1}\leq x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$

1372

http://bbs.pep.com.cn/thread-278347-1-1.html

数列 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ (p>1)的通项公式怎样求？

比如： $a_{n+1}=2a_n+n$, $a_1=1$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解法 1： $a_{n+1}=2a_n+n$ 两边除以 2^{n+1} 得

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$, $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^{n+1}}$

设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$,则 $b_{n+1}-b_n=\frac{n}{2^{n+1}}$, $b_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$

故 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}\cdots+\frac{n-1}{2^n} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\frac{3}{2^5}\cdots+\frac{n-1}{2^{n+1}} \qquad (2)$$

(1)- (2)得

$$\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n-1}{2^{n+1}}$$

$b_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}$,即 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}$ ， $a_n=3\times2^{n-1}-n-1$

解法 2：因 $a_{n+1}=2a_n+n$ 故 $a_n=2a_{n-1}+n-1(n\geq2)$

相减得 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})+1$

设 $b_n=a_{n+1}-a_n$,则 $b_n=2b_{n-1}+1$

于是 $b_n+1=2(b_{n-1}+1)$,又 $b_1+1=a_2-a_1+1=a_1+2=3$

故 $b_n+1=3\times2^{n-1}$, $a_{n+1}-a_n=b_n=3\times2^{n-1}-1$

故 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+(3\times1-1)+(3\times2-1)+\cdots+(3\times2^{n-1}-1)=1+3(2^{n-1}-1)-(n-1)=3\times2^{n-1}-n-1$

解 3：因 $a_{n+1}=2a_n+n$ (1)

故可设 $a_{n+1}+p(n+1)+t=2(a_n+pn+t)$ (p,t 是常数)

$a_{n+1}=2a_n+pn+t-p$,对照(1)得 $p=t=1$

故 $\{a_n+n+1\}$ 是等比数列,公比为 2, $a_1+1+1=3$

于是 $a_n+n+1=3\times2^{n-1}$, $a_n=3\times2^{n-1}-n-1$

上面三种方法中,方法一是给 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 求 a_n 的通法,方法 2 是差分法不论什么情况都可试一试, 当 $f(n)$ 为整式时方法 3 比效好用..

当 $f(n)=k\times p^n$ 时,方法一比效好用

1436、
http://bbs.pep.com.cn/thread-292191-1-1.html

已知 $a_n = 2^n$，把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成三角形状：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_1 & & & \\
 & & a_2 & a_3 & a_4 & & \\
 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots
\end{array}
$$

记 $A(i, j)$ 表示第 i 行中第 j 个数，则结论

① $A(2,3)=16$

② $A(i,3) = 2A(i,2)(i \geq 2)$

③ $[A(i,i)]^2 = A(i,1)A(i,2i-1)(i \geq 1)$

④ $A(i+1,i) = A(i,1) \cdot 2^{2i-1}(i \geq 1)$

中正确的是________(写出所有正确结论的序号)

答：（1）显然

（2）后项是前项乘以 2

（3）等比中项的平方是两边积

（4）i+1 行第一个是第 i 行第 1 项的后面 2i-1 项

于是四个全对