廖老师网上千题解答分类十九、大纲导数

25、 $f(x)$的值域为$[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，求$y=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$的值域？

解 1：设$t=\sqrt{1-2f(x)}\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

则$f(x)=\frac{1-t^2}{2}$， $y=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1\in[\frac{7}{9},\frac{7}{8}]$

解 2： 设$t=f(x)\in[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$

则$y=t+\sqrt{1-2t}$， $y'_t=1-\frac{1}{\sqrt{1-2t}}=\frac{\sqrt{1-2t}-1}{\sqrt{1-2t}}$

当$t\in[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$时$y'_t<0$

$\therefore$ $y=t+\sqrt{1-2t}$在$t\in[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$时是减函数， $y\in[\frac{7}{9},\frac{7}{8}]$

28、函数$y=ax^2+1$的图象与直线$y=x$相切，则$a=$______

解 1、 $y=ax^2+1, y=x$消去 y 得

$ax^2-x+1=0$， $\Delta=1-4a=0\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

有同学学了导数后，也可这样做

解 2：设切点为$(x_0,ax^2{}_0+1)$ $y'=2ax$

当$x=x_0$时$y'=2ax_0=1$ ①

又$ax^2{}_0+1=x_0$ ②

由①得$x_0=\frac{1}{2a}$ 代入②解得： $\frac{1}{4a}+1=\frac{1}{2a}$， $a=\frac{1}{4}$

95、求$y=\frac{a^2+16}{a}+\frac{a}{a^2+16}$的值域。

解：设 t=$\frac{a^2+16}{a}$， $y=\frac{a^2+16}{a}+\frac{a}{a^2+16}=t+\frac{1}{t}$

$t'=\frac{2a^2-a^2-16}{a^2}=\frac{(a+4)(a-4)}{a^2}$

在$a>4$或$a<-4$时$t'>0$，t=$\frac{a^2+16}{a}$递增

在$0 < a < 4$或$-4 < a < 0$时$t' < 0$， t=$\dfrac{a^2+16}{a}$递减

于是 t∈（-∞，-8]∪[8，∞）

$y_t' = \dfrac{t^2-1}{t^2} = \dfrac{(t+1)(t-1)}{t^2}$

在 t∈（-∞，-8]上，$y_t' > 0$，$y = t + \dfrac{1}{t}$递增，

在 t∈[8，∞）上，$y_t' > 0$，$y = t + \dfrac{1}{t}$递增

$y \le -8\dfrac{1}{8}$或$y \ge 8\dfrac{1}{8}$

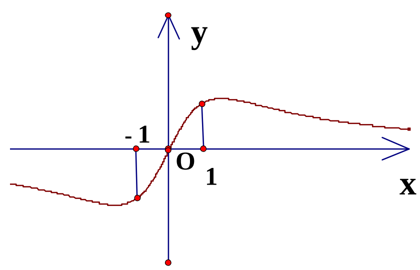
138、已知$y = \sqrt{x^2+1} - ax$（$a > 0$）在$[0,+\infty]$上是减函数，求a的取值范围

解：$y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - a = \dfrac{x - a\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \le 0$对$x \in [0,+\infty]$恒成立

$x - a\sqrt{x^2+1} \le 0$，$x^2 \le a^2(x^2+1)$，$a^2 \ge \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1} \in [\dfrac{1}{2},1)$

故$a^2 \ge 1$（$a > 0$）$\therefore a \ge 1$

186、若函数$f(x) = \dfrac{(2-m)x}{x^2+m}$的图象如图，则$m$的范围是______



解：由$f(1) = \dfrac{2-m}{1+m} > 0$得$-1 < m < 2$

$$f'(x) = \frac{(2-m)(x^2+m) - (2-m)x \bullet 2x}{(x^2+m)^2}$$

$$= \frac{(2-m)(x^2+m-2x^2)}{(x^2+m)^2}$$

由 $f'(1) = \dfrac{(2-m)(1+m-2)}{(1+m)^2} = \dfrac{(2-m)(m-1)}{(1+m)^2} > 0$

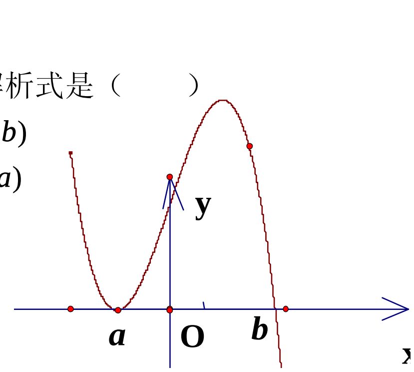
得$1 < m < 2$

综上$1 < m < 2$

191、如图，函数$y = f(x)$的图象，则$y = f(x)$的解析式是（ ）

A、$f(x) = (x-a)^2(b-x)$ B、$f(x) = (x-a)^2(x+b)$

C、$f(x) = -(x-a)^2(x+B)$ D、$f(x) = (x-b)^2(x-a)$



解由图象知$f(a) = f(b) = 0$故只能是 A、D

又知$f'(a)$=0 故只能选 A

201、比较 10^{11} 和 11^{10} 大小

解 1：$1.1^{10}=(1+0.1)^{10}=1+0.1+0.45+0.120+0.0210+0.00252+\cdots<2$

故$11^{10}\div10^{10}<2$，$11^{10}<10^{10}\times2<10^{11}$

解 2：要比较 10^{11} 和 11^{10} 大小

只要比较 $11\ln10$与$10\ln11$的大小

只要比较 $\dfrac{\ln10}{10}$ 与 $\dfrac{\ln11}{11}$ 的大小

于是研究 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性，

因为当 $x>e$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，于是 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上递减

$\dfrac{\ln10}{10}>\dfrac{\ln11}{11}$，故 10^{11}>11^{10}

解 4：作 $y=\ln x$，设过原点的切线切点为 $(x_0,\ln x_0)$，

$y'=\dfrac{1}{x}, k_{切}=\dfrac{1}{x_0}$,切线$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$,过原点，于是 $-\ln x_0=-1, x_0=e$

$\dfrac{\ln10}{10}$ 与 $\dfrac{\ln11}{11}$ 分别表示 $y=\ln x$ 在 $x=10$与11处与原点连线的斜率，由图象知

$\dfrac{\ln10}{10}>\dfrac{\ln11}{11}$

解 4：设 $a=10^{11}$，$b=11^{10}$，则

$\lg b=10\lg11=10(1+\lg1.1)<10+10\ln1.1<10+10\times0.1=11=\lg a$

[因 $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$，故，当 $x>0$ 时，$1+x<e^x$，$\ln(1+x)<x$]

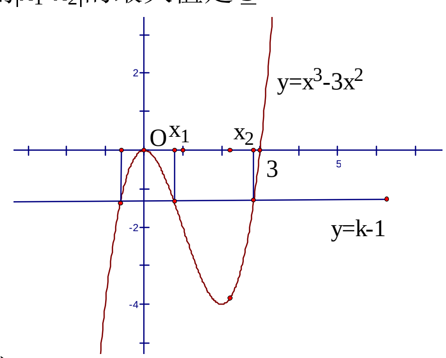
253、若方程 $x^3-3x^2+1=k(x\geqslant0)$有两个解 x_1,x_2,则$|x_1-x_2|$的最大值是 3

解：$x^3-3x^2=k-1\,(x\geqslant0)$

作出 $f(x)=x^3-3x^2$，$y=k-1$

由图象得

当 $k-1=0$ 时$|x_1-x_2|$最大值为 3



225、求 $y=\sin x\sin2x$，$x\in(0,\pi)$ 的最大值

解：$y=\sin x\bullet\sin2x=2\sin^2x\cos x=2(1-\cos^2x)\cos x$

当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\cos x\le0$ j 时 $y\le0$，不可能是最大值

故设$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$y=\sqrt{2}[(1-\cos^2x)\bullet(1-\cos^2\theta)\bullet2\cos^2x]^{\frac{1}{2}}$

$\le\sqrt{2}(\dfrac{1-\cos^2\theta+1-\cos^2\theta+2\cos^2\theta}{3})^{\frac{3}{2}}\le\sqrt{2}(\dfrac{2}{3})^{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$

故 $y_{\max}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$，当$\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时取到

226、已知$A=\{(x,y)|\sin^2 x+m\sin x - y+2=0, x\ \text{Î}\ (0,\frac{p}{2})\}$,

$B=\{(x,y)|\sin x - y+1=0, x\ \text{Î}\ (0,p)\}$，若$A\ \mathbf{I}\ B\ \text{¹}\ f$，求$m$的范围

解：联立$\sin^2 x+m\sin x-y+2=0$与$\sin x-y+1=0$

消去 y 得$\sin^2 x+(m-1)\sin x+1=0$

因$x\in(0,\frac{p}{2})$故$\sin x\in(0,1)$，设$t=\sin x\in(0,1)$

则$1-m=t+\frac{1}{t}$，设$f(t)=t+\frac{1}{t}$因为当$t\in(0,1)$时$f\text{¢}(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$<0

所以$f(t)=t+\frac{1}{t}>f(1)=2$，$1-m>2$，$m<-1$

236、已知函数$f(x)=\lg\frac{x^2 - x+1}{x^2+1}$

(1)判定$f(x)$在$[-1,1]$上的单调性

(2)若$t\ \text{Î}\ R$,求证$\lg\frac{7}{10}\ \text{£}\ f(|t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|)\ \text{£}\ \lg\frac{13}{10}$

解：（1）

$$f\text{¢}(x)=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{(2x-1)(x^2+1)-2x(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2\ln 10}=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\bullet\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2\ln 10}$$

在$[-1,1]$上，　$f\text{¢}(x)\ \text{£}\ 0$，　$f(x)$递减

于是，$f(x)$在$[-1,1]$上单调递减

（2）$\because |t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|\le|(t-\frac{1}{6})-(t+\frac{1}{6})|=\frac{1}{3}$

$|t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|\ge-|(t-\frac{1}{6})-(t+\frac{1}{6})|=-\frac{1}{3}$

$f(x)$在$[-1,1]$上是减函数

$$\therefore f(|t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|)\ge\lg\frac{(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})+1}{(\frac{1}{3})^2+1}=\lg\frac{7}{10}$$

$$f(|t-\frac{1}{6}|-|t+\frac{1}{6}|)\le\lg\frac{(-\frac{1}{3})^2-(-\frac{1}{3})+1}{(-\frac{1}{3})^2+1}=\lg\frac{13}{10}$$　　证毕

240、 $f(x)$ 是在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，且当 $x\in[2,3]$ 时，$g(x)=2a(a-2)-4(x-2)^3$（a 为常数）

（1）求函数 $f(x)$ 的表达式

（2）求 a 的值，使 $f(x)$ 的最大值为 12。

解：$f(x)$ 是在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$f(-x)=f(x)$，

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，故 $f(x)=g(2-x)$

（1）当 $x\in[-1,0]$ 时，$2-x\in[2,3]$

故 $f(x)=g(2-x)=2a(a-2)-4(2-x-2)^3=2a(a-2)+4x^3$

当 $x\in[0,1]$ 时，$-x\in[-1,0]$

$f(x)=f(-x)=2a(a-2)+4(-x)^3==2a(a-2)-4x^3$

故 $f(x)=\begin{cases}2a(a-2)+4x^3(-1\le x\le 0)\\2a(a-2)-4x^3(0\le x\le 1)\end{cases}$

（2）当 $x\in[-1,0]$ 时，$f'(x)=12x^2\ge 0$，故 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上递增

此时 $f(x)$ 最大＝ $f(0)=2a(a-2)$

当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)=-12x^2\le 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减

此时 $f(x)$ 最大＝ $f(0)=2a(a-2)$

综上 $f(x)$ 最大 $=2a(a-2)$ ＝12

解得 $a=1+\sqrt{7}$ 或 $a=1-\sqrt{7}$

267、对于函数 $y = f(x)$，若同时满足下列条件

① $f(x)$ 在 D 内是单调函数；

②存在区间 $[a,b] \in D$，使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[a,b]$ 那么 $y = f(x)$ 叫 D 上的闭函数.

（Ⅰ）求闭函数 $f(x) = -x^3 (x \in R)$ 符合条件②的区间 $[a,b]$；

（Ⅱ）判断 $g(x) = x^3 - 3x^2$ 是否为 R 上的闭函数，并说明理由

（Ⅲ）是否存在实数 m，使函数 h(x)=g(x)+mx 是 R 上的闭函数，若存在，求出 m 的取值范围；若不存在说明理由.

解：(1) $f'(x) = -3x^2 \le 0$ 故 $f(x) = -x^3$ 在 R 上是减函数

令 $f(a) = -a^3 = b$， $f(b) = -b^3 = a$

考虑到 $a < b$，因此 $a < 0 < b$

则 $a = -1$， $b = 1$，故所求的区间 $[-1,1]$

（2）因 $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

故 $g(x) = x^3 - 3x^2$ 在（2，+∞）上递增，在（0，2）上递减

在 R 上不是单调函数，所以 $g(x) = x^3 - 3x^2$ 不是 R 上的闭函数

（3）假设存在实数 m 使 h(x)=g(x)+mx 为 R 上的闭函数

h(x)= $g(x) + mx = x^3 - 3x^2 + mx$

易知 h(x)的定义域和值域都是 R，下面看单调性

因 $h'(x) = 3x^2 - 6x + m = 3(x-1)^2 + m - 3$

故，要使 h(x)在 R 上为单调函数，的充要条件是

$3(x-1)^2 + m - 3 \ge 0$ 对 $x \in R$ 恒成立

所以 $m - 3 \ge 0$，即 $m \ge 3$

因此存在实数 m 使 h(x)=g(x)+mx 为 R 上的闭函数，m 的范围是 $[3,+\infty)$

319、已知函数 f(x)的导数 $f'(x)=3x^2-6x$，且 f(0)=4,求不等式 f(x)>0 的解集

解：因为 $f'(x)=3x^2-6x$，所以 $f(x)=x^3-3x^2+d$

因 f(0)=4 故 $d=4$，于是 $f(x)=x^3-3x^2+4$

不等式 f(x)>0 就是 $x^3-3x^2+4>0$，$(x^3+x^2)-(4x^2-4)>0$，$(x+1)(x-2)^2>0$

解得：$\{x\mid -1<x<2 或 x>2\}$

320、设函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2ax^2-3a^2x+b$，0<$a$<1

(1)求函数 f(x)的单调区间和极值

(2)若当 x∈[a+1,a+2]时，恒有|f'(x)|≤a,试确定 a 的取值范围

解：$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2ax^2-3a^2x+b$

$f'(x)=-x^2+4ax-3a^2=-(x-a)(x-3a)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=a, x_2=3a$，$3a-a=2a>0$

当 $x>3a 或 x<a$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$在 $(3a,+\infty)$，$(-\infty,a)$ 上递减

当 $a<x<3a$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$在 $(a,3a)$ 上递增

$f(x)_{极大}=f(3a)=-\frac{1}{3}(3a)^3+2a(3a)^2-3a^2(3a)+b=b$

$f(x)_{极i小}=f(a)=-\frac{1}{3}(a)^3+2a(a)^2-3a^2(a)+b=-\frac{4}{3}a^3+b$

（2）当 x∈[a+1,a+2]时，恒有|$f'(x)$|≤a,

就是 $-a\le f'(x)$≤a,故 $f'(x)$最大≤a，且 $f'(x)$最小≥-a

$f'(x)=-x^2+4ax-3a^2=-(x-a)(x-3a)$

对称轴为 $x=2a$，开口向下

因为 0<a<1，$a+1-2a=1-a>0$，$a+1>2a$ 故 $f'(x)$在[a+1,a+2]上递减

$f'(x)$最大＝f'(a+1)= $-(1-2a)=2a-1$≤$a\Rightarrow a\le 1$

$f'(x)$最小＝f'(a+2)= $-2(2-2a)=4a-4$≥-$a\Rightarrow a\ge\frac{4}{5}$

综上 $\frac{4}{5}\le a<1$

345、若关于 x 的方程 $x^3-2x^2+a=0$ 在 $[0,+\infty)$ 有两个不等的实根，求 a 的取值范围

解：设 $f(x)=x^3-2x^2+a$，则 $f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=0, x_2=\frac{4}{3}$

在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{4}{3},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增

在 $(0,\frac{4}{3})$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减

$f(x)_{极小}=f(\frac{4}{3})=\frac{64}{27}-\frac{32}{9}+a=a-\frac{32}{27}$，$f(x)_{极大}=f(0)=a$，

故方程 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 有两个不等的实根充要条件是

$f(x)_{极小}=a-\frac{32}{27}<0$ 且 $f(x)_{极大}=f(0)=a\geq 0$

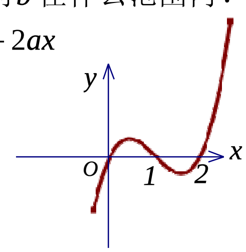
综上 $0\leq a<\frac{32}{27}$

526、已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则 b 在什么范围内？

解：设 $f(x)=ax(x-1)(x-2)=ax(x^2-3x+2)=ax^3-3ax^2+2ax$

故 $b=-3a$

由图象得 $f(3)=6a>0$，故 $a>0$，$b=-3a<0$



537、.已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+cx+d$，且 $f(2x+1)=4g(x)$，

$f'(x)=g'(x)$，f(5)=30.求 a,b,c,d 的值。(导数)

解：因为 $f'(x)=g'(x)$，$f'(x)=2x+a$，$g'(x)=2x+c$

所以 a=c

因为 f(2x+1)=4g(x), $f(2x+1)=(2x+1)^2+a(2x+1)+b=4x^2+(4+2a)x+1+a+b$

$4g(x)=4x^2+4cx+4d$

所以 4+2a＝4c，1+a+b＝4d，f(5)=5a+b+25=30.，

所以 5a+b+25＝30，解得 a=2,b=5,c=2,d=2

730、若 $x\neq 0$，则 $e^x>1+x$

证明：设 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$

在 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)<0$；在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，

故 $f(x)_{极小}=f(0)=0$，于是当 $x\neq 0$ 时 $f(x)>0$，即 $e^x-x-1>0$，$e^x>1+x$

753、已知：f(x)=xlnx，0<a<b。求证：$0<f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$(导数)

证明：设 $g(x)=f(a)+f(x)-2f(\frac{a+x}{2})=a\ln a+x\ln x-(a+x)\ln\frac{a+x}{2}$

则 $g'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}=\ln\frac{2x}{a+x}$，当 $x>a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

因 0<a<b ，故 $g(b)=f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})>g(a)=0$

设 $q(x)=g(x)-(x-a)\ln 2$，则 $q'(x)=g'(x)-\ln 2=\ln\frac{x}{a+x}$

当 $x>a$ 时，$q'(x)<0$，$q(x)$ 递减，

因 0<a<b ，故 $q(b)=f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})-(b-a)\ln 2<q(a)=0$

于是 $f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$

845、设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $x_0\in D$ 使得 $y_0=f(x_0)=x_0$，则称以 (x_0,y_0) 为坐标的点为函数图象上的不动点

(1)若函数 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}$ 的图象上存在两个关于原点对称的不动点，求 a,b 满足的条件

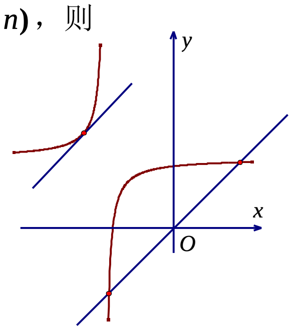
(2)在(1)的条件下，若 a＝8，记函数的不动点为 A,A'，P 为函数 $f(x)$ 的图像上的另一点，且其坐标 $y_P>3$，求点 P 到直线 AA' 距离的最小值及取最小值时点 P 的坐标。

(3)若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像上存在有限个不动点，则不动点有奇数个是否正确？若正确说明理由，若不正确，试举一反例说明。

解：（1）由 $f(x)=x$ 得 $\dfrac{3x+a}{x+b}=x, x(x+b)=3x+a, x^2+(b-3)x-a=0,$

设 $f(x)$ 两个关于原点对称的不动点为 (m,n) 与 $(-m,-n)$，则

m 与 $-m$ 是方程的根，于是 $m+(-m)=3-b, b=3$



（2） 当 $a=8$ 时 $f(x)=\dfrac{3x+8}{x+3}=3-\dfrac{1}{x+3}$

$y_p=3-\dfrac{1}{x_p+3}$ 因 $y_p>3$，故 $x_p<-3$

故 P 点在左上支上，直线 AA'； $y=x$

要使 P 点到直线 AA' 即 $y=x$ 的距离最小，

只要过 f（x）图象的左上支作平行于直线 AA' 的切线即可

$f'(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}=1, x<-3,$ 得 $x=-4,$ 于是切点T$(-4,4)$，P 点到直线 AA' 的最小距离

$=\dfrac{|-4-4|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

（3）$f(x)=x$ 不动点横坐标是 $f(x)=x$ 的根，即 $g(x)=f(x)-x$ ，因为 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，因此 $g(x)=f(x)-x$ 也是 R 上的奇函数，于是(0,0)是一个不动点，

设 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 是一个不动点，即 $g(x_0)=f(x_0)-x_0=0$ 则

$g(-x_0)=f(-x_0)+x_0=-f(x_0)+x_0=-(f(x_0)-x_0)=0$

故 $(-x_0,-y_0)$，也是一个不动点，因此横坐标非零的不动点有偶数个。

综上 R 上的奇函数 $f(x)$ 有有限个不动点，则不动点有奇数个是正确的。

853、设 a>0，函数 $f(x)=3x^3-ax$，在[1,+∞)上是单调递增函数

(1)求实数 a 的取值范围

(2)设 x_0 ≥1，f(xo)≥1,且 f[f(x_0)]= x_0，求证：f(x_0)= x_0

解：(1) 因为函数 $f(x)=3x^3-ax$，在[1,+∞)上是单调递增函数
所以 $f'(x)=3x^2-a\geq 0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，于是 $3-a\geq 0$，故 $a\leq 3$
(2)假设 $f(x_0)>x_0$，因 $x_0\geq 1$，$\boldsymbol{f(x_0)>1}$
因 $\boldsymbol{f(x)}$ 在[1,+∞)上是单调递增函数
故 $f[f(x_0)]>f(x_0)$，又 $f[f(x_0)]=x_0$，故 $f(x_0)<x_0$ 与假设相矛盾
于是 $f(x_0)>x_0$ 不成立，同理可证 $f(x_0)<x_0$ 不成立
所以 $f(x_0)=x_0$
931、（定积分）

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x]|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{2}\bullet\frac{p}{2}-\frac{1}{4}\sin p=\frac{p}{4}$$

942、(1)已知曲线 $y=x^3-3x^2+2x$，求在原点处的切线方程

解：$y'=3x^2-6x+2$，当 $x=0$ 时 $y'=2$，于是切线方程是 $y=2x$

(2)已知曲线 $y=x^3-3x^2+2x$，求经过原点的切线方程

解：设切点为 (x_0,y_0)，切线斜率为 k，切线方程为 $y=kx$

因为 $y=x^3-3x^2+2x$，$y'=3x^2-6x+2$

所以 $y=x_0{}^3-3x_0{}^2+2x_0$，$k=3x_0{}^2-6x_0+2$，$y_0=kx_0$

解得 $x_0=y_0=0$，$k=0$，或 $x_0=\frac{3}{2}$，$x_0=\frac{3}{2}$，$y_0=-\frac{3}{8}$，$k=-\frac{1}{4}$

于是切线方程是 $y=0$ 或 $y=-\frac{1}{4}x$

(3)已知曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上的一点 $\boldsymbol{P(0,0)}$，求过点 P 的切线的方程

解：设切点为 (x_0,y_0)，切线斜率为 k，切线方程为 $y=kx$

因为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

所以 $y_0=\sqrt[3]{x_0}$，$k=\frac{1}{3}x_0{}^{-\frac{2}{3}}$，$y_0=kx_0$

解得 $x_0=y_0=0$，k 不存在，于是切线方程是 $x=0$

1、2 两题是要导数的基本应用要熟练掌握，高考是不会出第 3 题这样的题目的

958、设 f(x)是定义在[-1，1]上的偶函数，g(x)与 f(x)图象关于 x=1 对称，当 x∈[2,3]时 $g(x)=2t(x-2)-4(x-2)^3$（t 为常数）。当 t∈ (2,6]时，求 f(x)在[0,1]上最大值

解：因 f(x)与是定义在[-1,1]上的偶函数，故 $f(x)=f(-x)$

因 g(x)与 f(x)图象关于 x=1 对称，故 $f(x)=g(2-x)$

当 $x\in[-1，0]$时，$2-x\in[2,3]$,

$\therefore (x)=g(2-x)=2t(-x)-4(-x)^3=4x^3-2tx$,

当 $x\in[0，1]$时，$-x\in[-1，0]$, $f(x)=f(-x)=-4x^3+2tx$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}4x^3-2tx & x\in[-1,0]\\ -4x^3+2tx & x\in[0,1]\end{cases}$$

当 $x\in[0,1]$时, $f'(x)=-12x^2+2t=-12(x^2-\frac{t}{6})$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{\frac{t}{6}}$，因 $t\in(2,6]$ 故 $\sqrt{\frac{t}{6}}\in(\sqrt{\frac{1}{3}},1]\subseteq[0,1]$

在 $(0,\sqrt{\frac{t}{6}})$ 上， $f'(x)>0$， $f(x)$ 递增；在 $(\sqrt{\frac{t}{6}},1)$ 上， $f'(x)<0$， $f(x)$ 递减

故在[0，1]上， $f(x)$ 最大值$=f(\sqrt{\frac{t}{6}})=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$

1032、(导数)

若 $a\in N$， $a\geq 3$，那么 $a^{a+1}\geq(a+1)^a$

证明：要证 $a^{a+1}\geq(a+1)^a$

只要证 $(a+1)\ln a\geq a\ln(a+1)$，即证 $\frac{\ln a}{a}\geq\frac{\ln(a+1)}{a+1}$ （*）

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

当 $x>e$ 时 $\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，即 $f'(x)<0$，于是 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上递减

因此（*）式成立，故原式成立

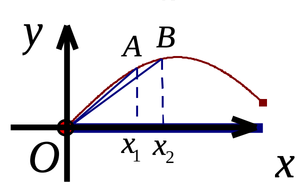
1054、(导数)

$y=\frac{\sin x}{x}$， $0<x_1<x_2<1$，比较 $\frac{\sin x_1}{x_1}$， $\frac{\sin x_2}{x_2}$ 的大小

解 1： $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$

当 $x\in(0,1)$ 时 $\cos x>0, x-\tan x<0$，故 $y'<0$， $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上递减

于是 $\frac{\sin x_1}{x_1}>\frac{\sin x_2}{x_2}$



解 2：如图由于 $y=\sin x$ 上凸

于是 $K_{OA}>K_{OB}$， 故 $\frac{\sin x_1}{x_1}>\frac{\sin x_2}{x_2}$

1071、(导数)

比较$\sqrt[4]{4},\sqrt[5]{5},\sqrt[6]{6}$的大小

解1：考察函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的单调性

当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$

故$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$递减

故$\dfrac{\ln 4}{4}>\dfrac{\ln 5}{5}>\dfrac{\ln 6}{6}$ Þ $\ln\sqrt[4]{4}>\ln\sqrt[5]{5}>\ln\sqrt[6]{6}$ Þ $\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}$

解2：用$f(x)=\ln x$的图象上的点与原点连线的斜率

1079、(导数)

设x_1,x_2是函数$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2-a^2x(a>0)$的两个极值点，且$|x_1|+|x_2|=2$。

(1)求证：$0<a\leqslant 1$;　(2) 求证：$|b|\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

(3)若函数$h(x)=f'(x)-2a(x-x_1)$，求证：当$x_1<x<2$且$x_1<0$时，$|h(x)|\leqslant 4a$

证明：（1）$f'(x)=ax^2+bx-a^2$,因x_1,x_2是函数$f(x)$的两个极值点，

故x_1,x_2是方程$ax^2+bx-a^2=0$的两根,因$a>0$，故$x_1x_2=-a<0$

于是$|x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{b^2+4a^3}}{a}=2$

于是$b^2=4a^2-4a^3=4a^2(1-a)\geq 0$，因$a>0$故$1-a\geq 0$，$a\leq 1$，$0<a\leq 1$

（2）$G(a)=4a^2-4a^3$（$0<a\leq 1$）

则$G'(a)=8a-12a^2=-12a(a-\dfrac{2}{3})$，$G'(\dfrac{2}{3})=0$

当$0<a<\dfrac{2}{3}$时$G'(a)>0$，$G(a)$递增，当$\dfrac{2}{3}<a\leq 1$时$G'(a)>0$，$G(a)$递减

于是$G(a)_{最大}=G(a)_{极大}=G(\dfrac{2}{3})=\dfrac{16}{27}$，因此$b^2=G(a)\leq\dfrac{16}{27}$

所以$|b|\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

（3）$h(x)=f'(x)-2a(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2)-2a(x-x_2)=a(x-x_1)(x-x_2-2)$

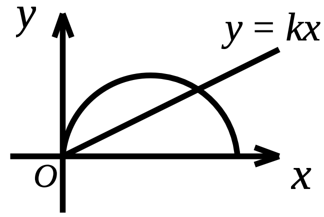
当$x_1<x<2$且$x_1<0$时，$x_2>0$，$x_2+2>2$，于是$x_1<x<x_2+2$

于是$-a(\dfrac{x_2-x_1+2}{2})^2\leq h(x)<0$

因$x_2-x_1=|x_2-x_1|=2$，故$-4a\leq h(x)<0$，所以$|h(x)|\leqslant 4a$

1105、（定积分）

如图，直线 $y=kx$ 分抛物线 $y=2x-x^2$ 与轴所围成图形的面积为相等的两部分，则实数 k 的值是________



解：因 $\int_0^2(2x-x^2)dx=(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$

$\begin{cases}y=kx\\y=2x-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2-k\\y=2k-k^2\end{cases}$

于是

$$\int_0^{2-k}(2x-x^2-kx)dx=(x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2)\Big|_0^{2-k}$$

$$=\frac{(2-k)^3}{2}-\frac{1}{3}(2-k)^3=\frac{1}{6}(2-k)^3=\frac{4}{6}$$

故 $(2-k)^3=4$， $k=2-\sqrt[3]{4}$

1122、(导数)

已知两个函数 $f(x)=7x^2+28x-c, g(x)=2x^3+4x^2-40x$。

(1)若对任意 $x\in[-3,3]$，都有 $f(x)\le g(x)$ 成立，求实数 c 的范围。

(2)若对任意 $x_1\in[-3,3], x_2\in[-3,3]$，都有 $f(x_1)\le g(x_2)$ 成立，求实数 c 的范围

解：对对任意 $x\in[-3,3]$，都有 $f(x)\le g(x)$ 成立，就是 $g(x)-f(x)\ge 0$

设 $T(x)=g(x)-f(x)$，则 $T(x)\ge 0$ 恒成立，于是转化为 $T(x)_{\min}\ge 0$

(2) 对任意 $x_1\in[-3,3], x_2\in[-3,3]$，都有 $f(x_1)\le g(x_2)$ 立，转化为 $f(x)_{\max}\le g(x)_{\min}$

1192、(导数)

已知 $f(x)=-x^2+ax+1-\ln x$ (1)若 $f(x)$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 上递减，求 a 的范围

(2)函数 $f(x)$ 是否既有极大值又有极小值，若不存在说明理由；若存在求 a 的范围

解：（1）要使 $f(x)$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 上递减

就要 $f'(x)=-2x+a-\frac{1}{x}=-\frac{2x^2-ax+1}{x}=-(2x+\frac{1}{x})+a\le 0$ 对 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 恒成立，

于是 $2x+\frac{1}{x}\ge a$， $2x+\frac{1}{x}$ 最小 $\ge a$，

因 $2x+\frac{1}{x}+a$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 上递减，所以 $2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\ge a$， 于是 $a\le 3$

（2）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$

令 $f'(x)=-\frac{2x^2-ax+1}{x}=0$，得 $2x^2-ax+1=0$（*），由 $\Delta=a^2-8>0$ 得

$a<-2\sqrt{2}或a>2\sqrt{2}$，此时方程（*）有两个不等的实根，设为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，

①当 $a>2\sqrt{2}$ 时，因 $x_1x_2=\frac{1}{2}>0,x_1+x_2=a>0$，故 $0<x_1<x_2$

因 $f'(x)=-\frac{2(x-x_1)(x-x_2)}{x}$，列表如下

x	（0， x_1）	x_1	$(x_1,0)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	递减	极小	递增	极大	递减

由表可得，此时函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值

②当 $a<-2\sqrt{2}$ 时,因 $x_1x_2=\frac{1}{2}>0,x_1+x_2=a<0$，故 $x_1<x_2<0$

于是当 $x>0$ 时， $f'(x)=-\frac{2(x-x_1)(x-x_2)}{x}<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减

此时 $f(x)$ 无极值，综上所述，当 $a>2\sqrt{2}$ 时函数 $f(x)$ 既有极大值，又有极小值。

1234、已知函数 $f(\mathrm{x})=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}$ (x> 0)

(1)函数 $f(\mathrm{x})$ 在区间（0，＋∞）上是增函数还是减函数?证明你的结论;

(2)若当 x >0 时，$f(\mathrm{x})>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，求正整数 k 的最大值.

解(1) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-1-\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{\dfrac{-1}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$

在区间（0，＋∞）上，$f'(x)<0$，$f(\mathrm{x})$ 在区间（0，＋∞）上是是减函数

（2）$\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}>\dfrac{k}{1+x}$ 对 $x>0$ 恒成立

就是 $(x+1)\ln(x+1)$ ＋（1－k)x+1＞ 0 ①对 $x>0$ 恒成立.

令 g (x)＝$(x+1)\ln(x+1)$＋（1－k)x+1，则

$g'(x)$＝$\ln(x+1)$+2-k，令 $g'(x)$＝0，得 $x=e^{k-2}-1$

当 $x>0$ 时，若 $k=1$或2，$g'(x)$＝$\ln(x+1)$+2-k>0，于是 g (x)递增，

所以 g (x)> $g(0)=1>0$，故①式成立

若 $k\geq 3$，由于

当 $x>e^{k-1}-1$ 时，$g'(x)$＞ 0；当 0 ＜$x<e^{k-1}-1$ 时，$g'(x)$＜ 0 .

故①式成立的充要条件是

g (x)最小值＝ g $(e^{k-2}-1)$＝$e^{k-2}(k-2)+(1-k)(e^{k-2}-1)+1=-e^{k-1}+k>0$

即 $k>e^{k-1}$，此式在 $k=3$ 时成立，在 $k=4$ 时不成立

于是 k 的最大值是 3

1239、不用计算器如何比较 p^{e}和e^{p} 的大小？

解：考察函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时 $f'(x)<0$，函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上递减

故有 $f(p)<f(e)$，即 $\dfrac{\ln p}{p}<\dfrac{1}{e}$，$e\ln p<p$，$\ln p^{e}<\ln e^{p}$，$p^{e}<e^{p}$

1246、(函数) (数列)

已知 $f(x)=ax-x^3$ 在开区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内递增

(1)求实数 a 的范围

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$， $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-a_n^3$，证明：$0<a_n<a_{n+1}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3)若从点 $P(a,b)$ 可向 $f(x)=\frac{3}{2}x-x^3$ 表示的曲线引三条不同的切线，求 a,b 满足的不等式

解：（1）因 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内递增

故 $f'(x)=a-3x^2>0$ 在 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内恒成立

即 $a>3x^2$ 在 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内恒成立，于是 $a\geq\frac{3}{2}$

（2）因 $a=\frac{3}{2}$，由（1）得 $f(x)=\frac{3}{2}x-x^3$ 在在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内递增

于是当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，有 $f(0)<f(x)<f(\frac{\sqrt{2}}{2})$，即 $f(x)\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

故当 $a_1\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$a_2=\frac{3}{2}a_1-a_1^3\in(f(0),f(\frac{\sqrt{2}}{2}))$，即 $a_2\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

假设 $a_k\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，则同理可得 $a_{k+1}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

由数学归纳法原理得当 $n\in N_+$ 时 $a_n\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 总成立

又 $a_{n+1}-a_n=\frac{3}{2}a_n-a_n^3-a_n=\frac{1}{2}a_n-a_n^3=\frac{1}{2}a_n(1-2a_n^2)>0$

故 $0<a_n<a_{n+1}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3） $f'(x)=\frac{3}{2}-3x^2$，设过 (a,b) 作 $f(x)$ 的切线切点是 $(x_0,\frac{3}{2}x_0-x_0^3)$

则切线方程是 $y-\frac{3}{2}x_0+x_0^3=(\frac{3}{2}-3x_0^2)(x-x_0)$

于是 $b-\frac{3}{2}x_0+x_0^3=(\frac{3}{2}-3x_0^2)a-\frac{3}{2}x_0+3x_0^3$

$4x_0^3-6ax_0^2+3a-2b=0$

依题意，此方程有三个不等的实根

考察函数 $g(x)=4x^3-6ax^2+3a-2b$

$g'(x)=12x^2-12ax$，令 $g'(x)=0$，得 $x_1=0$， $x_2=a$

于是有 $g(0)g(a)=(3a-2b)(4a^3-6aa^2+3a-2b)$

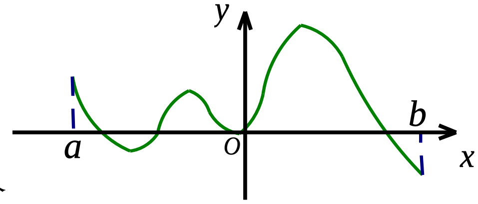
$=(3a-2b)(-2a^2+3a-2b)<0$

1275、(导数)

函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b)，

导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示，

则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点



（　）A、1 个　B、2 个　C、3 个　D、4 个

解：极小值处左减增右增，于是导函数左负右正

于是只有 1 个，选 A

1167、已知函 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(b-1)x^2+cx(b,c\text{是常数})$

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值，试求 b,c 的值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增且在 (x_1,x_2) 上单调递减，

又 $x_2-x_1>1$，求证：$b^2>2b+4c$

(3) 在(2)的条件下，若 $t<x_1$，比较 t^2+bt+c 与 x_1 的大小并证明。

解：（1）$f'(x)=x^2+(b-1)x+c$

$f(x)$ 在 $x_1=1$ 和 $x_2=3$ 处取极值

于是 $f'(1)=b+c=0$，$f'(2)=3b+c+6=0$，解得 $b=-3$，$c=3$

（1）依题意 $f'(x)=x^2+(b-1)x+c=0$ 的两根为 x_1,x_2

于是 $x_2-x_1=\dfrac{1-b+\sqrt{(b-1)^2-4c}}{2}-\dfrac{1-b-\sqrt{(b-1)^2-4c}}{2}=\sqrt{(b-1)^2-4c}>1$

故有 $b^2>2b+4c$

（3）因 $x_1^2+(b-1)x_1+c=0$，$x_1+x_2=1-b$，$x_1+b=1-x_2$

故 $t^2+bt+c-x_1=t^2+bt+c-x_1^2-(b-1)x_1-c-x_1$

$=t^2+bt-x_1^2-bx_1=(t^2-x_1^2)+b(t-x_1)=(t-x_1)(t+x_1+b)$

$=(t-x_1)(t+1-x_2)$

因 $t<x_1<x_2-1$，故 $t-x_1<0, t-x_2+1<0$

所以 $t^2+bt+c-x_1>0$，故 $t^2+bt+c>x_1$

（3）证 2：因 x_1，x_2 是方程 $x^2+(b-1)x+c=0$ 的根，于是 $x_1+x_2=1-b$，$x_1x_2=c$

于是 $t^2+bt+c-x_1=t^2-(x_1+x_2-1)t+x_1(x_2-1)=(t-x_1)(t-x_2+1)$

因 $t<x_1<x_2+1$，故 $t-x_1<0, t-x_2+1<0$

所以 $t^2+bt+c-x_1>0$，故 $t^2+bt+c>x_1$

（3）证 3：设 $g(t)=t^2+bt+c$，对称轴为 $t=-\dfrac{b}{2}$

因 $x_1+x_2=1-b$，$x_2=1-b-x_1$ 代入 $x_2-x_1>1$ 得

$1-b-2x_1>1$，于是 $x_1<-\dfrac{b}{2}$

因此 $g(t)=t^2+bt+c$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上递减

故当 $t<x_1$ 时有 $g(t)>g(x_1)=x_1^2+bx_1+c=x_1^2+(b-1)x_1+c+x_1=x_1$

1391

http://bbs.pep.com.cn/thread-286315-1-1.html

已知 $f(x)=\frac{a(1-x)}{x}\ln(1-x)$ ，a 属于 R

求函数在[1-e2,1-e]上的最值

解 $f'(x)=a[\frac{-1}{x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{x}]=-a[\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}]$

设 $g(x)=x+\ln(1-x)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{1-x}=\frac{2-x}{1-x}$，

当 $x\in[1-e^2,1-e]$ 时 $g'(x)>0$ 于是此时

$g(x)\le g(1-e)=1-e+\ln e=2-e<0$

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)_{\max}=f(1-e)=\frac{ae}{1-e}$，$f(x)_{\min}=f(1-e^2)=\frac{2ae^2}{1-e^2}$

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)_{\min}=f(1-e)=\frac{ae}{1-e}$，$f(x)_{\max}=f(1-e^2)=\frac{2ae^2}{1-e^2}$

当 $a=0$ 时是常函数

1408、http://bbs.pep.com.cn/thread-286315-1-1.html

比较 $(1+\frac{1}{2!})(1+\frac{1}{3!})\bullet\mathbf{L}\bullet(1+\frac{1}{n!})$ 与 e 的大小

解：设 $Q(x)=\ln(1+x)-x$,则

当 $x>0$ 时，$Q'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$

于是当 $x>0$ 时，$Q(x)<Q(0)$,即 $\ln(1+x)-x<0$，$\ln(1+x)<x$

$$\ln[(1+\frac{1}{2!})(1+\frac{1}{3!})\bullet\mathbf{L}\bullet(1+\frac{1}{n!})]=\ln(1+\frac{1}{2!})+\ln(1+\frac{1}{3!})+\mathbf{L}+\ln(1+\frac{1}{n!})$$

$$<\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\mathbf{L}+\frac{1}{n!}<\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\mathbf{L}++\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1=\ln e$$

于是 $(1+\frac{1}{2!})(1+\frac{1}{3!})\bullet\mathbf{L}\bullet(1+\frac{1}{n!})<e$

1409
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=279504&page=1#pid2913770

已知a,b是方程$4x^2-4tx-1=0$，$t\in R$的两个不等的实根，函数

$f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$的定义域为$[a,b]$，求函数$f(x)$的最大值

解：a,b是方程$4x^2-4tx-1=0$的两根，于是$x\in[a,b]$时，$4x^2-4tx-1\le 0$

$$故f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(x-t)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x(2x-t)}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2x^2-2xt-2}{(x^2+1)^2}=-\frac{\frac{1}{2}(4x^2-4xt-1)-\frac{3}{2}}{(x^2+1)^2}>0$$

所以$f(x)$在$[a,b]$上递增，$f(x)_{\max}=f(b)$

1423、已知函数$y=f(x)$在 R 上处处可导，$f(0)=0$，当$x\neq 0$时，$xf'(x)>0$。给出下列四个判断：
① $f(-2)<f(-1)$ ② $y=f(x)$不可能是奇函数③存在区间$[-a,a]$，使得当$x_1,x_2\in[-a,a]$时，$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
④ $y=xf(x)$在 R 上递增
判断正确的序号是________________(填上所有正确的序号)

解：当$x<0$时，由于$xf'(x)>0$，于是$f'(x)<0$故$f(x)$在（$-\infty,0$）上递减，
$f(x)>f(0)=0$
当$x>0$时，由于$xf'(x)>0$，于是$f'(x)>0$，故$f(x)$在（$0,+\infty$）上递增，
$f(x)>f(0)=0$
①错　②对
先看④
因$[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)\geq 0$，只有当$x=0$时等号成立，于是④对
最后看③
如果在 0 附近的何一个小区间(0,b]上$f(x)$上凸，则$f'(0)$就不存在，与$f(x)$处处可导相矛盾，于是必存在小区间(0,b]，使$f(x)$下凸，同理必存在小区间(0,c]，使$f(x)$下凸，取 a=$\min\{b,c\}$,则$f(x)$在区间
[-a,a] 下凸，故③对

1472、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=290245&page=1#pid3014156

若函数 $f\left(x\right)=-2abln\left(x+1\right)$的图像在 x=1 出的切线为$l$，圆 C： $x^2+y^2=1$，则l与圆 C 的位置关系式是 （ ）

A、相切 B、相交 C、相离 D、不能确定

解： $f'(\mathrm{x})=\frac{-2ab}{x+1}$， $f'(1)=-ab$， $f(1)=-2abln2$

切线为l： $y+2abln2=-ab(x-1), abx+y+ab(2ln2-1)=0$

$d=\frac{|ab(2ln2-1)|}{\sqrt{a^2b^2+1}}<\frac{|ab(2ln2-1)|}{|ab|}=2ln2-1=ln\frac{4}{e}<1$，故相交