# 廖老师网上千题解答分类五、大纲三角

22、在△ABC 中设 $\frac{a}{c}=\sqrt{3}-1$ $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{2a-c}{c}$， 求 A、B、C

解： $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{2a-c}{c}\Rightarrow\frac{\sin B\cos C}{\cos B\sin A}=\frac{2\sin A-\sin C}{\sin C}\Rightarrow\frac{\sin B\cos C}{\cos B\sin C}=\frac{2\sin A-\sin C}{\sin C}$

$\sin B\cos C=2\sin A coB-\cos B\sin C$

$\therefore\sin(B+C)=2\cos B\sin A,\sin A=2\cos B\sin A,\cos B=\frac{1}{2},\ B=60^\circ$

$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{3}-1\Rightarrow\sin(120^\circ-C)=(\sqrt{3}-1)\sin C$

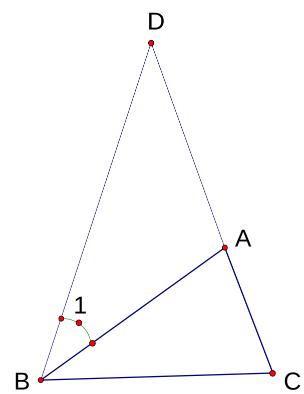
$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=(\sqrt{3}-1)\sin C\Rightarrow\tan C=2+\sqrt{3}$， $C=75^\circ$

$\therefore A=45^\circ$

23、题目：在△ABC 中，已知 $a^2=b(b+c)$

（1），求证 A=2B

（2），若 $a=\sqrt{3}b$，试判断△ABC 的形状




（1）证法 1、Q $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$a^2=b(b+c)$

$\therefore b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc$

$\therefore c-2b\cos A=b$

$\therefore\sin C-2\sin B\cos A=\sin B$

$\therefore\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin B$

$\therefore\sin(A-B)=\sin B$， $A-B=B$， $A=2B$

证法 2、$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}=\frac{a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{ab+ac}{a^2}=\frac{b+c}{a}=\frac{bc+c^2}{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=2\cos B$

$\sin A=\sin 2B,A=2B$

证法 3：延长 CA，使 AD=AB，连 BD。

则 $\angle 1=\angle D$，由 $a^2=b(b+c)$得： $BC^2=CA\bullet CD$

$\therefore\Delta ABC\backsim\Delta BDC\therefore\angle ABC=\angle D$，

$\therefore\angle BAC=\angle 1+\angle D=2\angle D=2\angle ABC$

（2）把 $a=\sqrt{3}b$ 代入 $a^2=b(b+c)$得 $c=2b$，

$c^2-a^2=4b^2-3b^2=b^2$， $\therefore\angle C=90^\circ,\therefore\Delta ABC$ 是直角三解形

54、在△ABC 中，∠A=60°，b=1,S=$\sqrt{3}$。求：

（1）(a+b+c)/sinA+sinB+sinC 的值。
（2）△ABC 的内切圆的半径长。

$$\frac{1}{2}bc\sin A=S,\frac{1}{2}c\sin 60^{\circ}=\sqrt{3},c=4$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1^2+4^2-4=13，\ a=\sqrt{13}$$

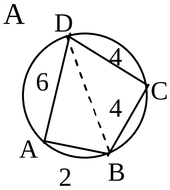
$$\frac{a+b+c}{sinA+sinB+sinC}=\frac{a}{sinA}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$$

（2）设半径为 r。

(a+b+c) r/2=$\sqrt{3}$可求出 r

55、已知圆内接四边形 ABCD 的边长分别是 AB=2，BC=6，CD=DA=4。
求四边形 ABCD 的面积。
解：由余弦定理 $BD^2$=4+36-2×2×6×cos∠A=40-24 cos∠A
$BD^2$=16+16-2×4×4×cos∠C=32+32 cos∠A

40-24 cos∠A=32+32 cos∠A，cos∠A=$\frac{1}{7}$，sin∠A=$\frac{4\sqrt{3}}{7}$




$$S=\frac{1}{2}AD\bullet AB\bullet\sin A+\frac{1}{2}CD\bullet CB\bullet\sin C=\frac{24\sqrt{3}}{7}+\frac{32\sqrt{3}}{7}=8\sqrt{3}$$

62、在三角形 ABC 中，$ÐC=60°$，$a$、$b$、$c$ 分别是角 A、B、C 的对边，求

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$$

解：由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-ab$，故 $a^2+b^2=c^2+ab$

$$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{a^2+ac+b^2+bc}{(b+c)(c+a)}=\frac{c^2+ac+bc+ab}{(b+c)(c+a)}=\frac{(c+a)(c+b)}{(b+c)(c+a)}=1$$

65、设三角形 ABC 中，tanA+tanB+$\sqrt{3}=\sqrt{3}$tanAtanB，且 sinAcosA＝$\sqrt{3}$，则此三角形为什么三角形

解：tanA+tanB+$\sqrt{3}=\sqrt{3}$tanAtanB,tanA+tanB=$\sqrt{3}$（tanA・tanB-1）

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\sqrt{3},\tan(A+B)=-\sqrt{3}$$

$A+B=120°$，　　sinA・cosA＝$\sqrt{3}$，　sin2A＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2A=120°$ 或 $2A=60°$
$A=B=C=60°$，　或 $A=30°$，$B=90°$，$C=60°$

73、三角形 ABC 中，$S=a^2-(b-c)^2$,则 tanA=___

解：$\frac{1}{2}bc\sin A = b^2+c^2-2bc\cos A-(b-c)^2$

$\frac{1}{2}bc\sin A = 2bc(1-\cos A)$

$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$， $\tan A=\frac{8}{15}$

189、已知 sinα+sinβ=1，cosα+cosβ=t.求证$|t|£\sqrt{3}$

证明：$t^2+1=(\sin a+\sin b)^2+(\cos a+\cos b)^2=2+2\cos(a-b)\le 4$

故 $|t|£\sqrt{3}$

220、已知 5sinB=sin(2A+B)，求证:2tan(A+B)=3tanA

证明：5sinB=sin(2A+B)

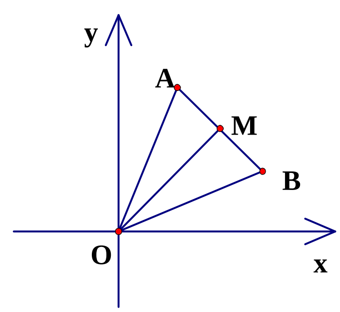
5sin[(A+B）-A]=sin[(A+B)+A]

5[sin(A+B)cosA-cos(A+B)sinA]= sin(A+B)cosA+cos(A+B)sinA

4sin(A+B)cosA=6cos(A+B)sinA

2tan(A+B)=3tanA

245、如图，已知等腰$\Delta OAB$中，$|OA|=|OB|=a$，底边 AB 的中点 M$(b,c)$，两腰所在直线 OA、OB 的倾斜角分别为$a$ 和 $b$ 。请用$a,b,c$表示$\cos(a-b)$和$\cos(a+b)$




解：$\cos\frac{a-b}{2}=\cos\angle BOM=\frac{OM}{OB}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$

$\cos(a-b)=2\cos^2\frac{a-b}{2}-1=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2}$

$\cos\frac{a+b}{2}=\cos\angle xOM=\frac{b}{OB}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$\cos(a+b)=2\cos^2\frac{a+b}{2}-1=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}$

288、已知$\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\tan(p-b)=\frac{1}{2}$，$a$ Î $(\frac{p}{2},p)$,求 $\mathbf{tan}(a-2b)$

解：由$\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$两边平方后得

$1-\sin a=\frac{2}{5}$， $\sin a=\frac{3}{5}$， $\cos a=-\frac{4}{5}$， $\tan a=-\frac{3}{4}$

由 $\tan(p-b)=\frac{1}{2}$ 得 $\tan b=-\frac{1}{2}$

$\tan 2b=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{4}{3}$， $\tan(a-2b)=\frac{\tan a-\tan 2b}{1+\tan a\tan 2b}=\frac{7}{24}$

339、比较 $c=\frac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}$ 与 $b=\frac{1}{2(\cos 80^\circ-2\cos^2 50^\circ+1)}$ 的大小

解： $c=\frac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}=\frac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}=\tan(45^\circ-40^\circ)=\tan 5^\circ=\frac{1-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$b=\frac{1}{2(\cos 80^\circ-2\cos^2 50^\circ+1)}=\frac{1}{2(\cos 80^\circ-\cos 100^\circ)}=\frac{1}{4\cos 80^\circ}=\frac{1}{4\sin 10^\circ}$

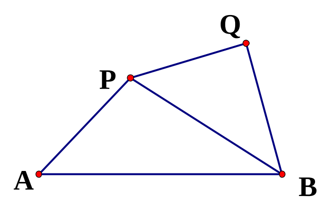
$c-b=\frac{3-4\cos 10^\circ}{4\sin 10^\circ}<\frac{3-4\cos 15^\circ}{4\sin 10^\circ}=\frac{3-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4\sin 10^\circ}<0$

故 $c<b$

343、平面上有四点 A、B、Q、P，其中 A、B 为定点，且 AB=$\sqrt{3}$，PA=PQ=QB=1，$\Delta PAB$ 和 $\Delta PQB$ 的面积分别是 $m$， $n$

（1）设 $\angle A=30^\circ$，求 $\angle Q$ （2）求 $m^2+n^2$ 的最大值

解：（1）当 $\angle A=30^\circ$ 时




$PB^2=1+3-2\sqrt{3}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=1, PB=1, \angle Q=60^\circ$

(2) 在 $\Delta PAB$ 中， $PB^2=1+3-2\sqrt{3}\cos A=4-2\sqrt{3}\cos A$

在 $\Delta PBQ$ 中， $PB^2=1+1-2\cos Q=2-2\cos Q$

故 $2-2\cos Q=4-2\sqrt{3}\cos A$， $\cos Q=\sqrt{3}\cos A-1$

$m^2+n^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)^2+(\frac{1}{2}\sin Q)^2=\frac{3}{4}\sin^2 A+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos A-1)^2$

$=-\frac{3}{2}\cos^2 A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}(\cos A-\frac{\sqrt{3}}{6})^2+\frac{7}{8}$

故当 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时 $m^2+n^2$ 的最大值是 $\frac{7}{8}$

353、求 $2\cos^2 a - \frac{1}{2}\tan(\frac{p}{4} - a)\sin^2(\frac{p}{4} + a)$ 的值.

解：$2\cos^2 a - \frac{1}{2}\tan(\frac{p}{4} - a)\sin^2(\frac{p}{4} + a) = 2\cos^2 a - \frac{1}{2}\cot(\frac{p}{4} + a)\sin^2(\frac{p}{4} + a)$

$= 2\cos^2 a - \frac{1}{2}\cos(\frac{p}{4} + a)\sin(\frac{p}{4} + a) = 2\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin(\frac{p}{2} + 2a)$

$= 1 + \cos 2a - \frac{1}{4}\cos 2a = 1 + \frac{3}{4}\cos 2a$

356、判断正误：方程 $x = \frac{p}{8}$ 是函数 $y = \sin(2x + \frac{5p}{4})$ 的图象的一条对称轴方程

答：当 $x = \frac{p}{8}$ 时，函数 $y = \sin(2x + \frac{5p}{4})$ 的函数值为 $-1$

可见（$\frac{p}{8}, -1$）函数 $y = \sin(2x + \frac{5p}{4})$ 的图象的顶点

因此，直线 $x = \frac{p}{8}$ 是图象的一条对称轴。

注：如果要写所有对称轴：$y = \sin(2x + \frac{5p}{4})$ 的对称轴半个周期出一条，$y = \sin(2x + \frac{5p}{4})$ 的周期是π，因此它的所有对称轴是 $x = \frac{p}{8} + \frac{kp}{2}, k \in z$

368、函数 y=cos2$x$+2sin$x$+2 的最大值为________

解：y=cos2$x$ + 2sin$x$ + 2

$= 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + 2$

$= -2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{2}$

最大值为 $\frac{7}{2}$

369、一个直角三角形三个内角的正弦值成等比数列，其中最小正角正弦等于=___

解：设最小正角为 $a$，则另一个锐角为 $\frac{p}{2} - a$

故 $\sin^2(\frac{p}{2} - a) = siina \sin 90°$

$\cos^2 a = siina$，$\sin^2 a + siina - 1 - 0$，$siina = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

391、计算 $\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$

解 $\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=\sin 50^\circ \bullet \dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\cos 40^\circ \bullet \dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=1$

397、已知 $\tan a=\sqrt{3}(1+m)$， $\tan(-b)=\sqrt{3}(\tan a\ \tan b+m)$， $a,b$ 都是钝角，

求 $a+b$

解： $\tan a=\sqrt{3}(1+m)$， $\tan(-b)=\sqrt{3}(\tan a\ \tan b+m)$

相减得 $\tan a+\mathbf{tan}\, b=\sqrt{3}(1-\mathbf{tan}\, a\ \mathbf{tan}\, b)$

$\tan(a+b)=\sqrt{3}$

因 $180^\circ<a+b<360^\circ$

故 $a+b=180^\circ+60^\circ=240^\circ$

407、化简 $\dfrac{1}{\cos^2 80^\circ}-\dfrac{3}{\cos^2 10^\circ}$

解：原式= $\dfrac{\cos^2 10^\circ-3\cos^2 80^\circ}{\cos^2 80^\circ\cos^2 10^\circ}$

$=\dfrac{(\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ)(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ)}{\sin^2 10^\circ\cos^2 10^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ\bullet 2\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin^2 20^\circ}=32\cos 20^\circ$

408、A、B 是三角形中的内角， $3\sin A+4\cos B=6,\ 4\sin B+3\cos A=1$， .怎么证明 A 是钝角？(可编成精采的选择压轴题)

解：两式平方相加得

$\sin(A+B)=\dfrac{1}{2}$,故 $A+B=30^\circ$ 或 $A+B=150^\circ$

若 $A+B=30^\circ$ 则 $4\cos B=6-3\sin A>4.5$,舍去

(也可 $4\mathbf{sin}\, B+3\mathbf{cos}\, A>3\mathbf{cos}\, A>3´\dfrac{\sqrt{3}}{2}>1$)

故 $A+B=150^\circ$，

若 $A<90^\circ$,则 $B>60^\circ$

$3\sin A+4\cos B<3+2=5$ 与 $3\sin A+4\cos B=6$ 矛盾

(也可 $4\mathbf{sin}\, B+3\mathbf{cos}\, A<4+3´\dfrac{1}{2}<6$), 故 $A>90^\circ$

415、已知三角形三个内角 A、B、C 所对的边分别是 $a,b,c$ 直线 $l: x\sin A + y\sin B + \sin C = 0$ 到原点的距离为 $d$

（1）根据 $d$ 的取值变化来判定角 C 何时为锐角，何时为直角何时为钝角

（2）若三角形 ABC 为一个斜边为 3 的直角三角形，且 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$，求三角形两直角边的长。

解：（1）$d = \frac{|\sin C|}{\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{c^2}{d^2}$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{c^2}{d^2} - c^2}{2ab} = \frac{c^2(1-d^2)}{2abd^2}$$

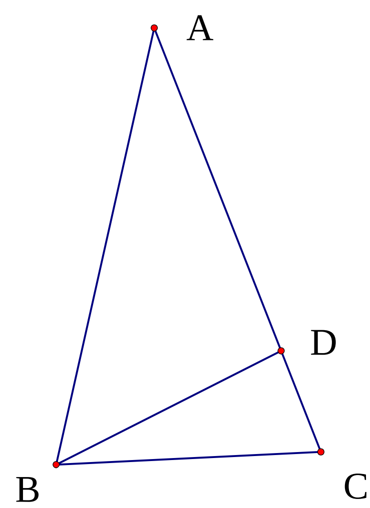
因此当 $d = 1$ 时，$C = 90°$，当 $d > 1$ 时，$C > 90°$ 当 $d < 1$ 时，$C < 90°$

（2）因为 $d = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ 所以 $C < 90°$，

当 $A = 90°$ 时，$a = 3$，$b^2 + c^2 = 9$① 又 $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow 9 + b^2 = 2c^2$②

由①②解得两直角边为 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$，当 $B = 90°$ 时,同样解得两直角边为 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$

475、$\Delta$ABC 中，$\angle B = \frac{p}{3}$，AC 边上的高是 $h$，$c - a = h$，$\sin C$ 与 $-\sin A$ 是方程 $x^2 - mx + m^2 - \frac{3}{4} = 0$ 的两根求 m 和 $\angle A$、$\angle C$ 的值(解三角形)




解：设 AC 边上的高是 $h$

则 $c - a = h$

$\frac{c}{h} - \frac{a}{h} = 1$，$\frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin C} = 1$

$\sin C - \sin A = \sin A \sin C$（1）

因 $\sin C$ 与 $-\sin A$ 是方程 $x^2 - mx + m^2 - \frac{3}{4} = 0$（2）

的两根，故

$\sin C - \sin A = m$（3）

$-\sin A \sin C = m^2 - \frac{3}{4}$（4）

把（2）（3）代入（1）得

$m^2 + m - \frac{3}{4} = 0$ 解得 $m = -\frac{3}{2}$，$m = \frac{1}{2}$

当 $m = -\frac{3}{2}$ 时，代入（2）得 $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ 无实根

当 $m = \frac{1}{2}$ 时，代入（2）得 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 无实根

解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

$\sin C = 1$，$-\sin A = -\frac{1}{2}$

故 $C = 90°$，$A = 30°$

508、在三角形 ABC 中，A、B、C 分别为 a、b、c 边所对的角，若 a、b、c 成等差数列，

求角 B 的范围是(解三角形) (不等式)

解：$2b = a + c$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - (\frac{a+c}{2})^2}{2ac}$$

$$= \frac{3a^2 + 3c^2 - 2ac}{8ac} \geq \frac{6ac - 2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $a = c$ 时上式取等号

故 $0 < B \leq \frac{p}{3}$

518、在三角形 ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 $a$、$b$、$c$，且 cosA＝$\frac{1}{3}$，若 $a = \sqrt{3}$，求 $bc$ 的最大值. (解三角形) (不等式)

解：因 $a = \sqrt{3}$，cosA＝$\frac{1}{3}$，cosA＝$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - 3}{2bc} \geq \frac{2bc - 3}{2bc}$

所以 $\frac{2bc - 3}{2bc} \leq \frac{1}{3}$，$6bc - 9 \leq 2bc$，$bc \leq \frac{9}{4}$

当且仅当 $b = c = \frac{3}{2}$ 时上式取等号，故 $bc$最大＝$\frac{9}{4}$

写法 2：$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathbf{cos}\,A = b^2 + c^2 - \frac{2}{3}bc$ ³ $2bc - \frac{2}{3}bc = \frac{4}{3}bc$,于是 $\frac{4}{3}bc$ £ 3

525、 已知函数 y=asinx+2bcosx 的图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{3}{4}p$，求直线 ax+by+1=0 与 3x+y-1=0 的夹角大小为__________ (三角)(解几) (高考不要求)

解：因为 y=asinx+2bcosx 的图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{3}{4}p$

所以当 $x = \frac{3}{4}p$ 时 y 取最大值或最小值

因此 asin$\frac{3}{4}p$ +2bcos$\frac{3}{4}p$ =$\pm\sqrt{a^2 + 4b^2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$（a-2b）=$\pm\sqrt{a^2 + 4b^2}$

两边平方得：$(a - 2b)^2 = 2(a^2 + 4b^2)$，$(a + 2b)^2 = 0$，$a = -2b$

563、(3) x= π　是　y=|sinx|　的一条对称轴吗？
答：是。因为|sin(π-x)|=|sin(π+x)|恒成立

568、若 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$,0< θ < π ,求 $\frac{(1+\sin\theta+\cos\theta)(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2+2\cos\theta}}$(三角)

解：$0<\theta<\pi \Rightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$,于是 $\cos\frac{\theta}{2}>0$

$$\frac{(1+\sin\theta+\cos\theta)(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2+2\cos\theta}}=\frac{(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2})}{2\cos\frac{\theta}{2}}=-\cos\theta=\frac{1}{3}$$

574、在三角形 ABC 中，sinA=2sinBsinC,$\sin^2$A=$\sin^2$B+$\sin^2$C，判断这个三角形的形状并证明。(解三角形)
解：设三角形 ABC 外接圆半径为 R，
因为 $\sin^2$A=$\sin^2$B+$\sin^2$C
所以（2RsinA)$^2$=(2RsinB)$^2$+（2RsinC)$^2$

于是 $a^2=b^2+c^2$， $\angle A=90^\circ$

因为 sinA=2sinBsinC
所以 $\sin 90^\circ$=2sinBsin$(90^\circ-B)$
1=2sinB$\cos B$, $\sin 2B=1, 2B=90^\circ, B=45^\circ$
所以这个三角形是等腰直角三角形

606、已知 $\vec{a}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$， $\vec{b}=(\cos\beta,-3\sin\beta)$， $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$

$\vec{a}\perp\vec{b}$，求 $\alpha-\beta$ 的最大值

解：因 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 故 $\sin\alpha\cos\beta-3\cos\alpha\sin\beta=0$

$\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$， $\tan\alpha=3\tan\beta$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta}=\frac{2}{\frac{1}{\tan\beta}+3\tan\beta}$$

由于 $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ 因此 $\tan\beta>0$， $\frac{1}{\tan\beta}+3\tan\beta\geq 2\sqrt{3}$，

$\tan(a-b) \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $b = \frac{7p}{6}$ 取等号

又因为 $0 < a < \frac{p}{2}$，所以 $-\frac{3p}{2} < a - b < -\frac{p}{2}$

因为 $\tan(a-b) > 0$，所以 $-p < a - b < -\frac{p}{2}$

因为 $y = \tan x$ 在 $(-p, -\frac{p}{2})$ 上是增函数，

所以 $a-b$ 最大 $= -p + \frac{p}{6} = -\frac{5p}{6}$，此时 $a = \frac{p}{3}$， $b = \frac{7p}{6}$

615、设 $\sin a \cos b = 1$ 则 $\cos(a+b)$ =________(三角)

解：因 $-1 \pounds \sin a \pounds 1, -1 \pounds \cos b \pounds 1$

故 $\sin a \cos b \pounds 1$

当且仅当 $\begin{cases}\sin a = 1 \\ \cos b = 1\end{cases}$，或 $\begin{cases}\sin a = -1 \\ \cos b = -1\end{cases}$ 时取等号

当 $\begin{cases}\sin a = 1 \\ \cos b = 1\end{cases}$ 时 $\begin{cases}\cos a = 0 \\ \sin b = 0\end{cases}$

于是 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = 0$

当 $\begin{cases}\sin a = -1 \\ \cos b = -1\end{cases}$ 时也有 $\cos(a+b)$ =0

综上 $\cos(a+b)$ =0

635、由条件得 $\sin a \times \cos a$ <0 是第二或第四象限

当 $a$ 在第二象限时,0<$\sin a$ <1 ，-1<$\cos a$ <0

我想问根据什么公式得到 sin(cos$a$ )<0，cos(sin$a$ )>0 (三角)

答：当 $a$ 在第二象限时,0<sin$a$ <1 ,-1<cos$a$ <0,

由-1<cos$a$ <0 得 sin(cos$a$ )<0 (1)

由 0<sin$a$ <1 得 cos(sin$a$ )>0 (2)

注意：在(1)式中要把 cos$a$ 当成角，它是（-1，0）之内的角，即是（-57.3°，0°）内的角，在(2) 式中要把 sin$a$ 当成角

651、若关于 $x$ 的方程有 $2 - \sin x = m(2 + \sin x)$ 有实根，求 $m$ 的范围(方程不等式)

解:$2 - \sin x = 2m + m\sin x$

$(m+1)\sin x = 2 - 2m$

$\sin x = \frac{2-2m}{m+1}, |\sin x| \pounds 1$

于是 $|\frac{2-2m}{m+1}| \pounds 1, (2m-2)^2 \pounds (m+1)^2, (m-3)(3m-1) \pounds 0$

$\frac{1}{3} \pounds m \pounds 3$

654、ABC 中，$b^2$-bc-2$c^2$=0，a=$\sqrt{6}$， $cosA=\frac{7}{8}$，求△ABC 的面积(解三角形)

解：由 $b^2$-bc-2$c^2$=0 得由（b+c）（b-2c）=0 故 b=2c

因 $cosA=\frac{7}{8}$， a=$\sqrt{6}$， $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

故 $6=b^2+c^2-\frac{7}{4}bc, 6=4c^2+c^2-\frac{7}{2}c^2$， $c=2$，b=2c=4

△ABC 的面积=$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times2\times\sqrt{1-(\frac{7}{8})^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

667、求函数 $y=\frac{\sin x-2}{3-\cos x}$ 的值域(函数) (不等式)

解：$(3-\cos x)y=\sin x-2$， $3y+2=\sin x+y\cos x$

$3y+2=\sqrt{y^2+1}\sin(x+j)$， $\sin(x+j)=\frac{3y+2}{\sqrt{y^2+1}}$

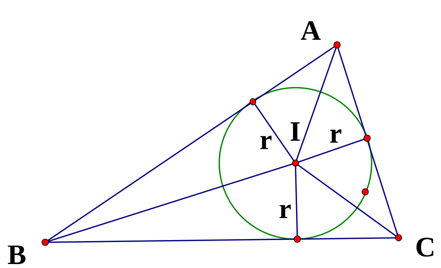
$|\sin(x+j)|\le1, \frac{|3y+2|}{\sqrt{y^2+1}}\le1, (3y+2)^2\le y^2+1$

$8y^2+12y+3\le0$，解得 $\frac{-3-\sqrt{3}}{4}\le y\le\frac{-3+\sqrt{3}}{4}$

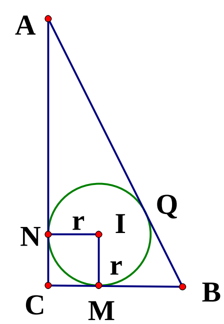
726、三角形的内切圆半径

（1）三角形内切圆半径公式是 $r=\frac{2S}{a+b+c}$

（2）直角三角形内切圆半径公式是 $r=\frac{a+b-c}{2}$ (解三角形)



（图 1）



（图 2）

解： （1）如图（1）$S=S_{\Delta IBC}+S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IAC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

故 $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$

（2）如图（2）直角三角形中，易证；IMCN 是正方形

$a+b=AC+BC=CM+CN+AN+BM=2r+AQ+BQ=2r+c$

于是 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$

765、 A、B 为锐角,sin(A+B)=2sinA 则 A,B 大小关系是？(三角)

解： sin(A-B)+sin(A+B)= 2sinAcosB，

sin(A-B)＝2sinAcosB- sin(A+B)

= 2sinAcosB- 2sinA=2sinA(cosB-1)<0， A<B

799、 $f(x)=3\sin(x+10°)+5\sin(x+70°)$ 的最大值是多少?? (三角)

解 1：设 $t=x+10°$ 则

$f(x)=g(t)=3\sin t+5\sin(t+60°)$

$=3\sin t+5(\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t)=\frac{11}{2}\sin t+\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos t=\frac{\sqrt{196}}{2}\sin(t+j)=7\sin(t+j)$

于是最大值为 7

解 2：设 $t=x+40°$ 则

$f(x)=g(t)=3\sin(t-30°)+5\sin(t+30°)$

$=3(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t)+5(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t)$

$=4\sqrt{3}\sin t+\cos t=7\sin(t+j)$

于是最大值为 7

820、三角形 ABC 的三边 a、b、c 满足条件 $a^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2-b^3=0$，,求三角形形状？(解三角形)

解： $a^2(a-b)-c^2(a-b)+b^2(a-b)$ =0

$(a-b)(a^2-c^2+b^2)=0$

故 $a=b$或$a^2+b^2=c^2$

于是三角形 ABC 是等腰三角形或直角三角形

824、C 是曲线 y=$\sqrt{1-x^2}$ ($x\le 0$)上一点，CD 垂直于 y 轴，D 为垂足.A(-1,0),
角 CAO=$a$ （O 为原点）.将|AC|+|CD|表为 $a$ 的函数。则 f($a$ )=

（A)2cos$a$ -cos2$a$　　(B)cos$a$ +sin$a$

（C）2cos$a$ (1+cos$a$ )　　(D)2sin$a$ +cos$a$ -$\sqrt{2}$

(三角) (解几)

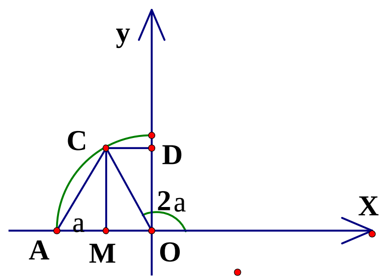
解：如图 $C(\cos 2a,\sin 2a)$

于是 $|CD|=-\cos 2a$

$|AM|=\cos 2a-(-1)=1+\cos 2a$

$|AC|=\dfrac{|AM|}{\cos a}=\dfrac{1+\cos 2a}{\cos a}=\dfrac{2\cos^2 a}{\cos a}=2\cos a$

于是 $|AC|+|CD|=2\cos a-\cos 2a$




828、三角形 ABC 中 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$ 判断三角形形状(解三角形)

解 1：由正弦定理得 $\sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin C\cos C$

$\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C$

$2\sin(A+B)\cos(A-B)=-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$\cos(A-B)=-\cos(A+B)$

$2\cos A\cos B=0$，故 $A=90°$ 或 $B=90°$

解 2：由余弦定理得

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}=\frac{c(b^2+a^2-c^2)}{2ab}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)=c^2(b^2+a^2-c^2)$$

$a^4+b^4-2a^2b^2=c^4$，$(a^2-b^2)^2=c^4$

故 $a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$

829、三角形 ABC 中，周长=15，面积 S=$\frac{15}{4}\sqrt{3}$， A=120°，求 b (解三角形)

解：依题意

$a+b+c=15$（1）

$\frac{1}{2}bc\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{3}$（2）

$a^2=b^2+c^2+bc$（3）由（3）得 $a^2=(b+c)^2-bc$（4）

由（1）得 $b+c=15-a$

由（2）得 $bc=15$ 代入（4）得 $a=7$

解得 $b=3$ 或 5

836、计算$\frac{\sqrt{3}}{4}\tan 10°+\sin 10°$(三角)

解：$\frac{\sqrt{3}}{4}\tan 10°+\sin 10°=\frac{\sqrt{3}\sin 10°}{4\cos 10°}+\sin 10°=\frac{\sqrt{3}\sin 10°+2\sin 20°}{4\cos 10°}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin 10°+2\sin 20°}{4\cos 10°}=\frac{2\cos 30\sin 10°+2\sin(30°-10°)}{4\cos 10°}==\frac{2\sin 30°\cos 10°}{4\cos 10°}=\frac{1}{4}$

838、已知 2tanA=3tanB 求证 $\tan(A-B)=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$(三角)

证明：$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\frac{3}{2}\tan B-\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan B\tan B}=\frac{\frac{1}{2}\tan B}{1+\frac{3}{2}\tan^2 B}$

$=\frac{\tan B}{2+3\tan^2 B}==\frac{\sin B\cos B}{2\cos^2 B+3\sin^2 B}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2B}{2+\sin^2 B}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2B}{2+\frac{1-\cos 2B}{2}}=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$

842、 $\mathbf{cos}110°+\mathbf{cos}10°+\mathbf{cos}130°=0,\mathbf{cos}100°+\mathbf{cos}20°+\mathbf{cos}140°=0$

请归纳出一个一般结论(推理)

答：$\cos a+\cos(120°-a)+\cos(240°-a)=0$

证法 1：左边展开可得

证法 2：$\cos a+\cos(240°-a)=2\cos 120°\cos(120°-a)=-\cos(120°-a)$

移项可得

注答案不唯一：如 $\mathbf{cos(}120°-a\mathbf{)}+\mathbf{cos}\,a+\mathbf{cos(}120°+a\mathbf{)}=0$，此结果更优美。

856、(函数) (三角)

设 f(x)=3+$\frac{\sin x}{x^2+1}$ 在区间[-a,a]上有最大值 M 和最小值 N 求 M+N=?

A.4 B.6 C.5 D. 0

解答：此函数为奇函数 g(x)=$\frac{\sin x}{x^2+1}$ 向上平移 3 个单位而得，

因 g(x)的最大值与最小值的和为 0,

于是 M+N=6

880、(解三角形)

在三角形 ABC 中，已知(a+b+c)(b+c-a)=3bc，且 $Sin^2A = SinBSinC$，是确定三角形的形状。

解：$(b+c)^2-a^2=3ab, b^2+c^2-a^2=bc,$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}, \cos A=\frac{1}{2}$， A=60°

∴sinBsinC= $\sin(120°-B)\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B+\frac{1}{2}\sin^2 B$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\frac{1}{4}(1-\cos 2B)=\frac{1}{2}\sin(2B-\frac{p}{6})+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin(2B-\frac{p}{6})=1$

$B=\frac{p}{3}, A=\frac{p}{3}$,,∴ Δ ABC 是等边三角形

882、(解三角形)

1、A 是三角形 ABC 的一个内角，且 SinA + SinB = 2/3 ，则 ABC 是（　　）。

A、锐角三角形　B、钝角三角形　C、直角三角形　D、形状不确定

解：因 SinA + SinB = 2/3< $\frac{\sqrt{2}}{2}$

当 A 与 B 都是锐角时，则 A 与 B 都小于 45 度，故 C 为钝角

否则 A 与 B 有一个角为钝角

于是三角形 ABC 钝角三角形

2、在三角形 ABC 中，若 tanA + tanB = 1 则 ABC 的形状为（　　）。

A、等腰三角形　　　　　B、锐角三角形

C、等腰或直角三角形　　D、钝角三角形

解：因 tanA + tanB = 1

故 A 与 B 都不是直角

当 A 与 B 都是锐角时，则 A 与 B 都小于 45 度，故 C 为钝角

否则 A 与 B 有一个角为钝角

于是三角形 ABC 钝角三角形

936、(解三角形)

若(a+b+c)(b+c-a)=3ab ,且 sinA=2sinBcosC ，那么△ABC 是（ ）.

A.直角三角形 B.等边三角形 C.等腰三角形 D.等要直角三角形

解 1： $(b+c)^2-a^2=3ab$， $b^2+c^2-a^2=ab$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2ab}=\frac{1}{2}$， $\cos A=\frac{1}{2}$， $A=60°$

sinA=2sinBcosC,sin(B+C)=2sinBcosC,sin(B-C)=0，B=C,于是 A=B=C= 60°

故选 B.等边三角形

解 2： $A=60°$ 同解 1　由 sinA=2sinBcosC 得 $a = 2b ´ \frac{1}{2}$ Þ $a = b$

△ABC 是等边三角形

944、(函数)

函数 $f(x)=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^4+x^2+\cos x}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 M+m 的值为

(　　)　　A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解：$y=\dfrac{2x+\sin x}{x^4+x^2+\cos x}$ 是奇函数，奇函数的最大值与最小值的和等于 0

$f(x)=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^4+x^2+\cos x}$ 是奇函数 $y=\dfrac{2x+\sin x}{x^4+x^2+\cos x}$ 的图象向上平移 1 个单位，

于是最大值为 M 与最小值为 m 的和等于 2

1046、$\sin(x+75°)+\cos(x+45°)-\sqrt{3}\cos(x+15°)$ ＝_____

解：设 $a=x+45°$

则 $\sin(x+75°)+\cos(x+45°)-\sqrt{3}\cos(x+15°)$

$=\sin(a+30°)+\cos a-\sqrt{3}\cos(a-30°)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a+\dfrac{1}{2}\cos a+\cos a-\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos a+\dfrac{1}{2}\sin a)=0$

1058、(三角)

$\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$，$a\in[\dfrac{p}{2},p]$　求 $\sin(2a+\dfrac{1}{3}p)$

解：$(\sin a-2\cos a)(\sin a+\cos a)=0$

$\tan a=2$ 或 $\tan a=-1$

因 $a\in[\dfrac{p}{2},p]$　　故 $\tan a=-1$，$a=\dfrac{3}{4}p$

$\sin(2a+\dfrac{1}{3}p)=\sin(\dfrac{3}{2}p+\dfrac{1}{3}p)=-\cos\dfrac{1}{3}p=-\dfrac{1}{2}$

1060、(三角)

角 A、B、C 属于[0°，90°],且 sinA＋sinB=sinC,cosB＋cosC=cosA，则 B-A=____

解：因 $\sin A+\sin B=\sin C$，$\cos A-\cos B=\cos C$

故 $2-2\cos(A+B)=1$

$\cos(A+B)=\dfrac{1}{2}$，$A+B=60°$，故 $B=60°-A$

因 $\sin A-\sin C=-\sin B$，$\cos A-\cos C=\cos B$

故 $2-2\cos(A-C)=1$

$\cos(A-C)=\dfrac{1}{2}$，

因 $\sin A-\sin C=-\sin B<0$ 故 $C-A>0$

$C-A=60°$，故 $C=60°+A$

当 $B=60°-A$，且 $C=60°+A$ 时条件成立

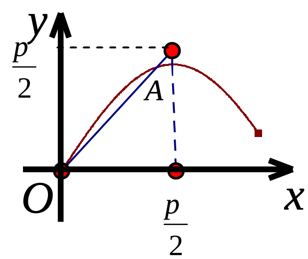
因此本题，应改为求 $C-A$

1072、(三角)

若$0 < x < \frac{\pi}{2}$，则$2x$与$3\sin x$的大小关系为(　　)

A、$2x > 3\sin x$　B、$2x < 3\sin x$

C、$2x = 3\sin x$　D、与$x$有关




解 1：作$y = \frac{3}{2}\sin x$与$y = x$

在 A 点左边$x < \frac{3}{2}\sin x$，在 A 点右边$x > \frac{3}{2}\sin x$

于是选 D

解 2：作出$y = \frac{3}{2}\sin x$的图象,由于$y = \frac{3}{2}\sin x$在$0 < x < \frac{\pi}{2}$上凸

于是当$0 < x \le \frac{\pi}{2}$时，$\frac{y}{x}$最小$= \frac{\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{\pi} < 1$，于是选 D.

解 1 更好

1074、(三角)

化简$2\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x\cos x - 6\sin x + 3\cos x$

解：$(2\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) - 3(2\sin x - \cos x) = 0$

1091、(三角)

函数$y = \sin^4 x + \cos^2 x$的最小正周期为（　　）

A、$\frac{\pi}{4}$　B、$\frac{\pi}{2}$　C、$\pi$　D、$2\pi$

解：$y = \sin^4 x - \sin^2 x + 1 = \sin^2 x\cos^2 x + 1 = \frac{1}{4}\sin^2 2x + 1 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) + 1$

$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

1092、(三角)

在△ABC 中，3sinA+4cosB=6,4sinB+3cosA=1,则 C 的大小是________

解：两式平方相加得

$\sin(A + B) = \frac{1}{2}$

故$A + B = 30°$或$A + B = 150°$

若$A + B = 30°$，则$A < 30°$，$4\cos B = 6 - 3\sin A > 4.5$,舍去

故$A + B = 150°$，$C = 30°$

1093、(解三角形)

在△ABC 中，a、b、c 为△ABC 中角 A,B,C 的对边，若 (a+b+c)(sinA+sinB-sinC)=3asinB，

则∠C=_____

解：(a+b+c)(sinA+sinB-sinC)=3asinB，

故 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$， $a^2+b^2-c^2=ab$

$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$， $\cos C=\dfrac{1}{2}$， $C=60°$

1164、在 ΔABC 中, $\angle C=60°$， $a$、$b$、$c$ 分别是角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，求 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}$

解：由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-ab$

故 $a^2+b^2=c^2+ab$

$\therefore \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{a^2+ac+b^2+bc}{(b+c)(c+a)}=\dfrac{c^2+ac+bc+ab}{(b+c)(c+a)}=\dfrac{(c+a)(c+b)}{(b+c)(c+a)}=1$

1172、锐角 $a$、$b$ 满足 $\sin b=m\cos(a+b)$（$m>0$，$a+b\neq\dfrac{p}{2}$），令 $y=\tan b$ ，$x=\tan a$ 。

把 $y$ 表示成 $x$ 的不含 $a$、 $b$ 的函数 $f(x)$（即写出 $y=f(x)$ 的解析式）;

解： $\sin b=m\sin a(\cos a\cos b-\sin a\sin b)$

$\tan b=m(\sin a\cos a-\sin^2 a\tan b)\Rightarrow \tan b=\dfrac{m\sin a\cos a}{1+m\sin^2 a}$

$=\dfrac{m\sin a\cos a}{\sin^2 a+\cos^2 a+m\sin^2 a}=\dfrac{m\tan a}{1+(1+m)\tan^2 a}=\dfrac{mx}{1+(1+m)x^2}$

于是 $y=f(x)=\dfrac{mx}{(1+m)x^2+1}$

1186、(三角)

△ABC 的三个内角分别为 A、B、C，若 tanA 和 tanB 是关于 x 的方程 $x^2+mx+m+1=0$ 的两实根，则角 C=___;。

解： $\tan A+\tan B=-m$， $\tan A\tan B=m+1$

$\tan(A+B)=\dfrac{-m}{1-(m+1)}=1$，于是 $A+B=45°$， $C=135°$

1200、(解三角形) (向量)

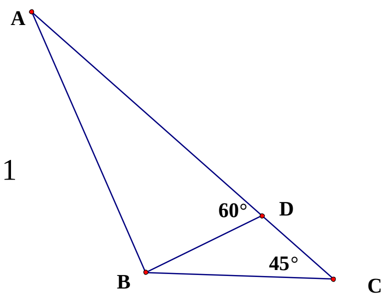
已知 D 是 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的一点，且 $\frac{AD}{DC}=2+2\sqrt{3}$，$\angle C=45^\circ$，

$\angle ADB=60^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=($ $)$

A、2　　B、0　　C、$\sqrt{3}$　　D、1

解 1，由于图形可按比例放大（或缩小）于是可排除 A、C、D

故选 B




解 2，设 $CD=1$，$AD=2+2\sqrt{3}$

于是 $BD=\frac{DC\bullet\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\bullet BD\cos 60^\circ=9+6\sqrt{3}$

$BD^2+AB^2=4+2\sqrt{3}+9+6\sqrt{3}=13+8\sqrt{3}=AD^2$

于是 $AB\perp BD$，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BD}=0$

解 2，设 $CD=1$，$AD=2+2\sqrt{3}$

于是 $BD=\frac{DC\bullet\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

$AD=2BD,\angle ADB=60^\circ,$ 于是 $\angle ABD=90^\circ$，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BD}=0$

1210、(函数)

问题：y=cosx= $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

所以 y=cosx 的图象是将 y=sinx 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到的.

疑问如下:

我知道应该是将 sinx 图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 cosx 图象(从图象上看出来的)..

问题是..为什么要向左平移.不是向右平移.?

答：1、函数的解析式与其图象的关系是：解析式中的 x 与 y 的关系，就其图象上点的横纵坐标的关系

2、图象移动后，图象上点的横纵坐标的关系就发生了变化

例如，求函数 $y=2x$ 的图象向左平移 3 个单位所得图象的解析式

解：原来图象上的点 $(a,b)$，横坐标 a，纵坐标 b 所的满足关系为 $b=2a$

则把图象向左平移 3 个单位，点 $(a,b)$ 就变成了 $(a-3,b)$，把其横纵坐标分别记为 $x和y$，则 $x=a-3, y=b$，从中抽出 $a,b$ 得 $a=x+3$，$b=y$ 代入 $b=2a$ 得 $y=2(x+3)$，由此可知向左平移 3 个单位所得新图象上的点的横纵坐标的关系式是 $y=2(x+3)$，这就是新图象的解析式

用同样的方法可求出函数 $y=2x$ 的图象向右平移 3 个单位所得图象的解析式是 $y=2(x-3)$，于是有所谓的“左加右减”之说

3、对于一个初学者一定要懂得，其原理死记口决是没有用的。一但理解了，利用口决可快速地进行变换能够减轻推理负担。提高解题速度。

1233、(函数)

$f(x)=2ab\cos^2 x-(a^2-b^2)\sin x\cos x$ 的最大值是 2 且 f( 45°)=1，求 $a,b$

解：$f(45°)=ab-\dfrac{a^2-b^2}{2}=1$

于是 $a^2-b^2=2(ab-1)$

$f(x)=2ab\cos^2 x-2(ab-1)\sin x\cos x$

$=ab(1+\cos 2x)-(ab-1)\sin 2x=ab+ab\cos 2x-(ab-1)\sin 2x$

$=ab+\sqrt{(ab)^2+(ab-1)^2}\cos(2x+f)$

因为 $f(x)$ 的最大值是 2

所以 $ab+\sqrt{(ab)^2+(ab-1)^2}=2$，解得 $ab=1或ab=\text{-}3$

当 $ab=1$ 时 $a^2-b^2=0$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

当 $ab=-3$ 时 $a^2-b^2=-8$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$

1268、(三角)

函数 $y=\dfrac{3\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$ 的值域

解： $y=\dfrac{3\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=3(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})=3\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z)$

于是 $y\in(-3,3)$

1270、已知三角形的三条边成公差为 2 的等差数列

且它的最大角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 则这个三角形的面积（ ）

A、$\dfrac{15}{4}$　　　B、$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　　　C、$\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　　　D、$\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$

解：设三边 x-2，x，x+2

最大角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，最大角=120°

用余弦定理得：$(x+2)^2=(x-2)^2+x^2+x(x-2)$

$2x^2-10x=0,x=5$，三边 3，5，7 于是面积 $\dfrac{1}{2}x(x-2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，选 B

1271、(三角)

(1) 已知：$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$

(2)已知：$\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，$m\neq1,\alpha\neq\frac{k\pi}{2},\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

求证：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1+m}{1-m}\tan\alpha$

证明：(1) $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)\Rightarrow3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$

展开得 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$

(2)也是把已知按 $(\alpha+\beta)$ 与 $\alpha$ 展开就可证得目标了

1273、(三角)

若△ABC 的内角满足 $sinA + cosA > 0$， $tanA - sinA < 0$，则 A 的取值范围是

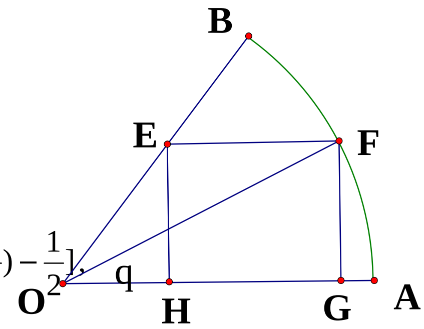
A. $(0,\frac{\pi}{4})$　B。$(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$　C。$(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4})$　D。$(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$

解：　$\angle A \in (0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow tanA - sinA > 0$ 排除 A,B

$\angle A \in (\frac{3\pi}{4},\ \pi) \Rightarrow sinA + cosA < 0$ 排除 D

1283、(三角)

如图，有一块扇形铁板，半径为 R，圆心角为 60 度，从这个扇形铁板中切割一个内接矩形，求这个内接矩形的最大面积。




解：设∠FOG= θ， 则 EH=Rsin θ，

HG= OG-OH=Rcos θ $-\frac{\sqrt{3}}{3}R\sin\theta$，

∴$S_{EFGH}$=HGEH= Rsin θ (Rcos θ $-\frac{\sqrt{3}}{3}R\sin\theta$ )

$=R^2(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}R^2[\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}]$

∴当 θ =30° 时 $S_{ABCD}$ 最大值=$\frac{\sqrt{3}}{6}R^2$

1338

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22571&show=0

在 $\triangle ABC$ 中，AB=1，BC=2，则 $\angle C$ 的取值范围是(　　)

A、$(0,\frac{\pi}{6}]$　B、$(0,\frac{\pi}{2}]$　C、$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　D、$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

解：$\frac{\sin C}{1}=\frac{\sin A}{2}\le\frac{1}{2}$，$C<A$，于是 $\angle C \in (0,\frac{\pi}{6}]$

1339

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22571&show=0

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$=90°，则 $\cos A\cos B$　$\angle C$ 的取值范围是(　　)

A、$[0,\frac{1}{4}]$　B、$(0,\frac{1}{2}]$　C、$[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　D、$[0,1]$

解：$\cos A\cos B=\cos A\sin A=\frac{1}{2}\sin 2A\le\frac{1}{2}$　B

1341
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22474&show=0

若钝角三角形三内角度数成等差数列，且最大边长与最小边长比为 m，则 m 取值范围是

解：设 3 边从小到大为 $a,b,c$

因三内角度数成等差数列，故 $B=60°$

于是 $b^2=a^2+c^2-ac$

因钝角三角形

故 $a^2+b^2-c^2<0$，于是 $2a^2-ac<0$，$\frac{c}{a}>2$

1345

已知：$\alpha+\beta=15°$,求 $\frac{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}$

解：$\tan 15°=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan\alpha+\tan\beta=\tan 15°(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$$\frac{1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(1-\tan\alpha)(1-\tan 15°)}{(1-\tan\alpha)(1+\tan 15°)}$$

$$=\frac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}=\tan(45°-15°)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1387
http://bbs.pep.com.cn/thread-286130-1-2.html

△ABC 满足, sinA=(sinB+sinC)/(cosB+cosC),此三角形的形状是___________

**解**：a cosB +a cosC =b+c

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}=b+c$$

$$a^2b+c^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3=2b^2c+2c^2b$$

$$a^2b+a^2c-(b^3+c^3)=b^2c+c^2b$$

$$a^2-(b^2-bc+c^2)=bc$$

$$a^2=b^2+c^2$$

解 2：$\therefore \sin A\cos B+\sin A\cos C=\sin(A+C)+\sin(A+B)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\therefore \cos A(\sin B+\sin C)=0$

因为 $A,B,C$ 是三角形的内角,所以 $\sin B+\sin C>0,\cos A=0$

因而,三角形 ABC 是直角三角形

1403
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23852&start=0&show=0
在 D$ABC$ 中， Đ$B=q\,(0<q<p)$，求 $|C-A|$ 的范围
解：因 $A+C=p-q$
故 $0<C<p-q$
$A-C=p-q-2C\in(q-p,p-q)$ (注把 C 当自变量)

于是 $|A-C|\in[0,p-q)$

1404
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23701&show=0
求值 $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$

解: $\sin^2 20^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{1-\cos 40^\circ}{2}+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 40^\circ+\cos 40^\circ(2\cos^2 40^\circ-1)$
$=\dfrac{4\cos^3 40^\circ-3\cos 40^\circ}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\cos 120^\circ}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

1425、
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21624&show=0

函数 $y=\mathbf{tan}\,2x\ (-\dfrac{p}{4}<x<\dfrac{3p}{4})$，$y=m,y=n$ 的图象围成的封闭区域的面积为 $p$ ，

则 $|m-n|=$________

解：画出图象，用割补法，可得|m-n|=2