

## 第二节 反三角函数

### 一、反三角函数值

1、若角  $x \in [-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$ ,  $\sin x = a$ , 则角  $x$  叫做实数  $a$  的正弦函数, 记作  $\arcsin a = x$

2、若角  $x \in [0, p]$ ,  $\cos x = a$ , 则角  $x$  叫做实数  $a$  的余弦函数, 记作  $\arccos a = x$

3、若角  $x \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ ,  $\tan x = a$ , 则角  $x$  叫做实数  $a$  的正切函数, 记作  $\arctan a = x$

4、若角  $x \in (0, p)$ ,  $\cot x = a$ , 则角  $x$  叫做实数  $a$  的余切函数, 记作  $\text{arc cot } a = x$

### 例 1、求反三角函数值

(1)  $\arcsin \frac{1}{2}$  (2)  $\arcsin(-\frac{1}{2})$  (3)  $\arccos \frac{1}{2}$  (4)  $\arccos(-\frac{1}{2})$

(5)  $\arctan \sqrt{3}$  (6)  $\arctan(-\sqrt{3})$  (7)  $\text{arc cot } \sqrt{3}$  (8)  $\text{arc cot}(-\sqrt{3})$

解: (1) 因为  $\frac{p}{6} \in [-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$ ,  $\sin \frac{p}{6} = \frac{1}{2}$ , 于是  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{p}{6}$

(2) 因为  $-\frac{p}{6} \in [-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$ ,  $\sin(-\frac{p}{6}) = -\frac{1}{2}$ , 于是  $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{p}{6}$

(3)  $\frac{p}{3} \in [0, p]$ ,  $\cos \frac{p}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore \arccos \frac{1}{2} = \frac{p}{3}$

(4)  $\frac{2p}{3} \in [0, p]$ ,  $\cos \frac{2p}{3} = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2p}{3}$

(5)  $\frac{p}{3} \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ ,  $\tan \frac{p}{3} = \sqrt{3}$ ,  $\therefore \arctan \sqrt{3} = \frac{p}{3}$

(6)  $-\frac{p}{3} \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ ,  $\tan(-\frac{p}{3}) = -\sqrt{3}$ ,  $\therefore \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{p}{3}$

(7)  $\frac{p}{6} \in (0, p)$ ,  $\cot \frac{p}{6} = \sqrt{3}$ ,  $\therefore \text{arc cot } \sqrt{3} = \frac{p}{6}$

(8)  $\frac{5p}{6} \in (0, p)$ ,  $\cot \frac{5p}{6} = -\sqrt{3}$ ,  $\therefore \text{arc cot}(-\sqrt{3}) = \frac{5p}{6}$

### 二、反三角 $\arcsin a$ 的四个特性

1、表示  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  上的一个角  $x$ , 并且角  $x$  的正弦等于  $a$

2、表示正弦运算的逆运算

3、表示方程  $\sin x = a$  在  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  上的解

4、表示  $y = \sin x$  与  $y = a$  的交点的横坐标

反三角函数  $\arccos a$ ,  $\arctan a$ ,  $\text{arc cot } a$  也有类似的四个特征。

### 三、公式

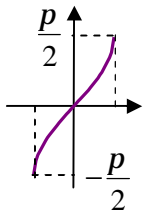
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \arccos(-a) = p - \arccos a$$

$$\arctan(-a) = -\arctan a, \quad \text{arc cot}(-a) = p - \text{arc cot } a$$

#### 四、反三角函数

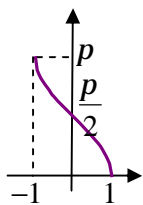
1、 $y = \sin x$  在区间  $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$  上反函数为  $y = \arcsin x$ ，它的定义域是  $[-1, 1]$ ，值域是

$[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$ ，是增函数，奇函数。图象如图



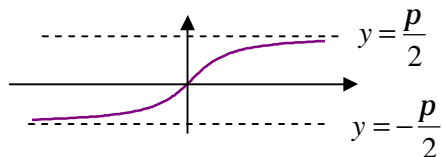
2、 $y = \cos x$  在区间  $[0, p]$  上反函数为  $y = \arccos x$ ，它的定义域是  $[-1, 1]$ ，值域是  $[0, p]$ ，

是减函数。图象如图



3、 $y = \tan x$  在区间  $(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$  上反函数为  $y = \arctan x$  它的定义域是  $\mathbf{R}$ ，值域是  $(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ ，

是增函数，奇函数。图象如图



4、上反函数为  $y = \text{arc cot } x$  它的定义域是  $\mathbf{R}$ ，值域是  $(0, p)$ ，是减函数。

