实用线性代数

第一章 线性代数的初步认识

第一节　线性变换与矩阵

一、线性变换

1、平移变换

例 1、平移圆 $x^2+y^2=4$，使圆心变为 $(3,2)$，求变换后圆的方程

设 $x^2+y^2=4$ 上的点 $P(x,y)$ 平移后变为 $P'(x',y')$，

则 $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+2 \end{cases}$，于是 $(x'-3)^2+(y'-2)^2=4$，故变换后圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$

方程组 $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+2 \end{cases}$ 叫变换表达式,$P'(x',y')$ 叫做 $P(x,y)$ 的像

例 1、平移变换 $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+2 \end{cases}$，求下列各点的像 (1) A(3,4) (2) B(-1,1)

2、旋转变换

引入(1)把点 A(2,0)绕原点旋转 $45°$, $x'=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}, y'=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

(2)把 A(2,1)绕原点旋转 $45°$, $\rho\cos\alpha=2, \rho\sin\alpha=1$

$$x'=\rho\cos(\alpha+45°)=\rho(\cos\alpha\cos 45°-\sin\alpha\sin 45°)=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'=\rho\sin(\alpha+45°)=\rho(\sin\alpha\cos+45°+\cos\alpha\sin 45°)=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

把点 P(x,y)绕原点旋转 θ 得点 $P'(x',y')$，求变换表达式

解:设 $x=\rho\cos\alpha, y=\rho\sin\alpha(\rho=|OP|,\alpha=\angle xOP)$，

$$x'=\rho\cos(\alpha+\theta)=\rho(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)=x\cos\theta-y\sin\theta$$

$$y'=\rho\sin(\alpha+\theta)=\rho(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=y\cos\theta+x\sin\theta$$

故变换公式是 $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$ 记作 R_θ

例 1、写出 R_θ 的变换公式　(1) $\theta=30°$ (2) $\theta=90°$ (3) $\theta=180°$

例 2、写出 $R_{30°}$ 的变换表达式,，并求 P(2,3)的像

3、线性变换:表达式为 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 的变换叫做线性变换。数表 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 叫做线性变换的矩阵

例 1、已知线性变换 $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=x-y \end{cases}$，(1)求点 P(3,4)的像(2)写出线性变换的矩阵

例 2、写出 $R_{60°}$ 的矩阵，并求 P(2,3)的象

*平移变换不是线性变换

二、重要性变换

1、旋转变换 $\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$

2、反射变换：

(1) 点 P(x,y)关于 x 轴的对称点$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$，矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(2) 点 P(x,y)关于 y 轴的对称点$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$，矩阵$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(3)一般的反射变换公式

直线l过原点，倾斜角为θ，点 P(x,y)关于**直线l的对称点为**$P'(x',y')$，

设$\begin{cases}x=r\cos\alpha\\y=r\sin\alpha\end{cases}$，则

$$\begin{cases}x'=r\cos(2\theta-\alpha)=r(\cos2\theta\cos\alpha-\sin2\theta\sin\alpha)=x\cos2\theta-y\sin2\theta\\y'=r\sin(2\theta-\alpha)=r(\sin2\theta\cos\alpha+\cos2\theta\sin\alpha)=x\sin2\theta+y\cos2\theta\end{cases}$$

$\begin{cases}x'=x\cos2\theta+y\sin2\theta\\y'=x\sin2\theta-y\cos2\theta\end{cases}$叫反射变换，其矩阵是$\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}$

3、伸缩变换：把点 P(x,y)的横坐标变为原来的k_1倍，纵坐标变为原来的k_2倍得$P'(x',y')$，

则$\begin{cases}x'=k_1x\\y'=k_2y\end{cases}$叫伸缩变换，其矩阵是$\begin{bmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{bmatrix}$

4、投影变换

(1) 点 P(x,y)在 x 轴上的投影得$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=x\\y'=0\end{cases}$，矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

(2) 点 P(x,y)在 y 轴上的投影得$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=0\\y'=y\end{cases}$，矩阵$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

5、切变变换

(1)点 P(x,y)沿 x 轴方向平移 ky个单位得$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=x+\mathrm{k}y\\y'=y\end{cases}$，矩阵$\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$

叫平行于 x 轴的切变变换

(2)点 P(x,y)沿主 y 轴方向平移 kx 个单位得$P'(x',y')$，则$\begin{cases}x'=\mathrm{x}\\y'=\mathrm{k}x+y\end{cases}$矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$

叫平行于 y 轴的切变变换

例 1、伸缩变换$\boldsymbol{\sigma}$：$\begin{cases}x'=3x\\y'=2y\end{cases}$(1) 写出伸缩变换$\boldsymbol{\sigma}$的矩阵(2)求$\boldsymbol{\sigma}(5,7)$

例 2、平行于 x 轴的切变变换$\boldsymbol{\rho}$点$A(2,3)$的像$A'(6,3)$，求变换$\boldsymbol{\rho}$的变换公式及矩阵

三、矩阵的运算

1、矩阵的加减

设$A=\begin{pmatrix}10&3&2\\9&5&3\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}8&4&4\\7&3&3\end{pmatrix}$型号$3\times2$矩阵

则$A+B=\begin{pmatrix}18&7&6\\16&8&6\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&2&0\end{pmatrix}$

2、矩阵的乘法

$A=\begin{pmatrix}10&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\1&2\end{pmatrix}$　则$AB=\begin{pmatrix}31&20\\10&10\end{pmatrix}$,

例 1、求 BA

*乘法交换律不成立

例 2、已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，求 AB

3、数乘向量矩阵

设 $\lambda\in R$， $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则，$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$

练习 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

求： $2A+3B$

4、相等矩阵：若两个同型矩阵 A 与 B 对应的元素都相等则称矩阵 A 与 B 相等

例设 $A=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ y & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}p-1 & -2\\ 2 & q\end{pmatrix}$，A=B,求 p,q,x,y

四、图形的变换

1、列向量：点 $A(x,y)$ 对应于向量 $\overrightarrow{OA}=(x,y)$，本书把向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标写成 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，

即 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 叫列向量

2、线性变换 σ：$\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}$ 就是把向量 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$，

即 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，这个变换可叫做矩阵 A=$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 对应的变换

例 1、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 对应的线性变换是 σ，求点 P(3,4)与向量 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$ 的在 σ 作用下的像

例 2、求直线 $x+2y-4=0$ 被 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 对应的线性变换变成的结果

例 3、设 ΔABC 中，$A(2,0),B(4,0),C(1,2)$，作出 ΔABC 在切变变换 $\begin{cases}x'=x\\ y'=2x+y\end{cases}$ 下的图象与面积

例 4、若 $a,b\in R$，在矩阵 $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & b\end{bmatrix}$ 对应的变换直线 $x-y=1$ 变换为自身，求 a,b 的值

解：矩阵 $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & b\end{bmatrix}$ 对应的变换为 $\begin{cases}x'=ax+y\\ y'=by\end{cases}$（1），

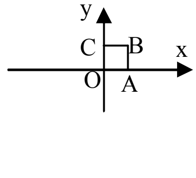
因为直线 $x-y=1$ (2)变换为自身，所以 $x'-y'=1$（3）

(1)代入（3）得 $ax+y-by=1$，即 $ax+(1-b)y=1$（4）

由(1)与(4)对照得 a=1,1−b=−1,故 $a=1,b=2$

例 5、已知矩阵 $M=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & a\end{bmatrix}$，点 P(2,1)在矩阵 M 所对应的线性变换作用下得到点 $P'(1,2)$

(Ⅰ)求 a 的值(Ⅱ)如图所示，点 A(1,0)，点 C(0,1),单位正方形 OABC 在矩阵 M 所对应的线性变



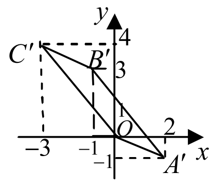
换作用下变成了什么图形？并画出图。

解：(Ⅰ) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 于是 $-2+a=2, a=4$

(Ⅱ) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

于是 O、A、B、C 变换后的像是 O′(0,0),A′(2,−1), B′(-1,3), C′(−3,4)

单位正方形 OABC 的像是平行四边形 O′A′B′C′，如图



第二节 复合变与二元一次方程组

一、两个变换的关系

1、变换的相等

若线性变换 σ，ρ 对应的矩阵相等，则称变换 σ 与 ρ 相等，记作 $\sigma=\rho$

2、复合变换

引例：$R_{60^\circ}(R_{30^\circ}(\vec{a}))=R_{90^\circ}(\vec{a})$，可见先作变换 R_{30°，再作变换 R_{60°，相当于是变换 R_{90° 它叫做变换 R_{30°，R_{60° 的复合变换，记为 $R_{60^\circ}\circ R_{30^\circ}=R_{90^\circ}$

(1)先作变换 σ，再作变换 ρ，所得的变换，叫做变换 σ，ρ 的复合变换，记作 $\rho\circ\sigma$

即 $\rho\circ\sigma(\vec{a})=\rho(\sigma(\vec{a}))$

例 1、已知变换 σ：$\begin{cases}x'=x+2y\\ y'=y\end{cases}$，求 $\sigma\circ R_{90^\circ}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(2)设变换 σ，ρ 的矩阵分别为变换 A，B，则 $\boldsymbol{\sigma\circ\rho(\vec{a})=\sigma(\rho(\vec{a}))=A(B\vec{a})=(AB)\vec{a}}$

故 $\boldsymbol{\sigma\circ\rho}$ 的矩阵是 AB

例 2、已知变换 σ：$\begin{cases}x'=x+2y\\ y'=y\end{cases}$，求(1) $R_{180^\circ}\circ\boldsymbol{\sigma}$ 对应的矩阵(2) $R_{180^\circ}\circ\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

3、逆变换

引入把一个向量先转 30 度,再转-30 度,则回到原位

(1)单位变换：变换 I : $\begin{cases}x'=x\\ y'=y\end{cases}$ 叫做单位变换，它的矩阵是 $E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2)若 $\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho=I$，则 σ 与 ρ 叫做互为逆变换，记作 $\rho^{-1}=\sigma$，$\sigma^{-1}=\rho$

(3)若 σ 的矩阵是 A，则 σ^{-1} 的矩阵记为 A^{-1}，A A^{-1}= A^{-1} A= E_2

例 1、若 σ 的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，求(1) A^{-1} (2) $\sigma^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

例 2、设 $A(-1,0),B(-1,2),A_1(\frac{1}{2},1),C_1(2,0)$.

求将矩形 $OABC$ 变为四边形 $OA_1B_1C_1$ 的线性变换对应的矩阵 M;

二、解二元一次方程组

1、二阶行列式

设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则称数 $ad-bc$ 为 A 的二阶行列式，记作 $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

例 1、计算(1) $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 7\end{vmatrix}$

2、用行列式解一元二次不等式

二元一次方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1(1) \\ a_2x+b_2y=c_2(2) \end{cases}$

由(1)×b_2：$a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1$，

由(2)×b_1：$a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2$

相减得：$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

当$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时，$x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$，同理$y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$

记$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

当$D\neq 0$时，$x=\dfrac{D_x}{D}$，　$y=\dfrac{D_y}{D}$

例 2、用行列式法解方程组$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$

练习$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 2x-5y=-11 \end{cases}$

三、逆矩阵

1、 求逆矩阵

设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

推导：设$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则$\begin{cases} ax+cy=1 \\ bx+dy=0 \end{cases}$，$\begin{cases} au+cv=0 \\ bu+dv=1 \end{cases}$，

1°当$|A|\neq 0$时 $x=\dfrac{d}{|A|}$，$y=\dfrac{-b}{|A|}$，$u=\dfrac{-c}{|A|}$，$v=\dfrac{-d}{|A|}$

故$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|} \\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，主对调，付变号

2°当$|A|=0$时 方程组无解,于是A无逆矩阵

例　$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$　练习求$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

2、用逆矩阵解二元一次方程组

方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1(1) \\ a_2x+b_2y=c_2(2) \end{cases}$可记为$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

当$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$时，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

例 1、用逆矩阵解方程组$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$　练习$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 2x-5y=-11 \end{cases}$

例 2、已知A与B都可逆 求证:$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

*可逆矩阵的几何意义:可逆矩阵把平面的点集 R^2 变成 R^2,不可逆矩阵把 R^2 变成一条直线或一个点

*若平行线 l_1, l_2 在同一个线性变换下的像为直线 l_1', l_2',则 $l_1' // l_2'$ 或 l_1', l_2' 重合

第三节　特征向量特征方程

一、齐次线性方程组

1、定义:形如 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ 的方程组叫齐次线性方程组

例 1、解方程组 (1) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

2、方程组 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ 解的性质

(1)当 $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组只有零,两条直线交于原点.

(2)当 $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ 时，有非零解,两条直线重合.

二、特征向量与特征值

引入变换 $\rho:\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=y \end{cases}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,则 $\rho(\vec{a})=\vec{a}$

变换 $\sigma:\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,则 $\rho(\vec{a})=\vec{a}, \rho(\vec{b})=-\vec{b}$

对于线性变换 σ 当 $\rho(\vec{a})//\vec{a}$ 即 $\rho(\vec{a})=\lambda\vec{a}$, $A\vec{a}=\lambda\vec{a}$,则 $\vec{a}$ 叫征向量, λ 叫特征值

1、定义:矩阵 A,若存在实数 λ 与非零向量 $\vec{a}$，使 $A\vec{a}=\lambda\vec{a}$,则 $\vec{a}$ 叫征向量, λ 叫特征值

引例、求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解：设特征值 λ，特征向量 $\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$A\vec{a}=\lambda\vec{a}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x+2y=\lambda x \\ -x+4y=\lambda y \end{cases}$，$\begin{cases} (\lambda-1)x-2y=0 \\ x+(\lambda-4)y=0 \end{cases}$

因 $\vec{a} \neq \vec{0}$，故 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=0$，$\lambda^2-5\lambda+6=0$，$\lambda_1=2, \lambda_2=3$

当 $\lambda_1=2$ 时，$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$，令 $y=k_1 \neq 0$，得 $x=2k_1$

故属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} k_1 2 \\ k_1 1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$

当 $\lambda_2=3$ 时，$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$，令 $x=k_2(k_2 \neq 0)$，得 $y=k_2$

故属于 $\lambda_2=3$ 特征向量为 $\vec{\xi}_2=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2 \neq 0$

2、特征多项式：设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，(1) A 的特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}$.

(2)方程 $f(\lambda)=0$ 叫 A 的特征方程，特征方程的根就是特征值

(3)属于特征值 λ 的特征向量是 $(\lambda-a)x-by=0$ 的非零解

例 1、求 $A=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$ 的特征值与及属于每个特征值的一个特征向量

解：特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\1&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$

特征方程是 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

当 $\lambda_1=2$ 时，$x-2y=0$，令 $y=1$，得 $x=2$,故属于 $\lambda_1=2$ 的一个特征向量为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=3$ 时，$x-y=0$，令 $y=1$，得 $x=1$,故属于 $\lambda_2=3$ 的一个特征向量为 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

例 2、已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 为矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&a\\-1&4\end{bmatrix}$ 属于 λ 的一个特征向量，求实数 a，λ 的值及 A^2。

解：依题意 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，于是 $\begin{cases}2+a=2\lambda\\-2+4=\lambda\end{cases}$ 解得 $a=2,\lambda=2$

故 $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&10\\-5&14\end{bmatrix}$

例 3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&a\\2&b\end{bmatrix}$ 的两个特征值分别为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=4$

(Ⅰ)求实数 a,b (Ⅱ)求直线 $x-2y-3=0$ 在矩阵 A 对应的变换下的像的方程。

解：(Ⅰ) 矩阵 A 的特征多项式是

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-a\\-2&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-b)-2a=\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a$$

矩阵 A 特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=4$ 是方程 $\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a=0$ 的根

于是 $\begin{cases}-1+4=b+2\\-1\times 4=2b-2a\end{cases}$ 解得 $b=1,a=3$

(Ⅱ) $A=\begin{bmatrix}2&3\\2&1\end{bmatrix}$ 对应的变换 $\begin{cases}x'=2x+3y\\y'=2x+y\end{cases}$，于是 $\begin{cases}x=\dfrac{-x'+3y'}{4}\\y=\dfrac{x'-y'}{2}\end{cases}$

代入 $x-2y-3=0$ 得 $\dfrac{-x'+3y'}{4}-x'+y'-3=0,5x'-7y'+12=0$

于是像的方程是 $5x-7y+12=0$

三、计算 $A^n\vec{a}$

1、矩阵与向量的乘法法则

设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\vec{\xi}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\vec{\eta}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix},k\in R$,则

(1) $A(k\vec{\xi})=k(A\vec{\xi})$,(2) $A(\vec{\xi}+\vec{\eta})=A\vec{\xi}+A\vec{\eta}$

证 $A(k\vec{\xi})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kax+kby \\ kcx+kdy \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}=k(A\vec{\xi})$

2、特征向量的性质 1 设 $\vec{\xi}$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

(1)则 $A(k\vec{\xi})=\lambda(k\vec{\xi})$　　(2) $A^n\vec{\xi}=\lambda^n\vec{\xi}$

证：$A^n\vec{\xi}=A^{n-1}(A\vec{\xi})=A^{n-1}(\lambda\vec{\xi})=A^{n-2}(\lambda^2\vec{\xi})=\cdots=\lambda^n\vec{\xi}$

例 1、$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$ 及相应的特征向量是 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

求(1) $A^3\vec{\xi}_1$，(2) $A^4\vec{\xi}_2$

解：$A^3\vec{\xi}_1=\lambda_1^{\ 3}\vec{\xi}_1=8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ ，　$A^4\vec{\xi}_2=\lambda_2^{\ 4}\vec{\xi}_2=3^4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 81 \\ 81 \end{pmatrix}$

3、特征向量的性质 2　若 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2,\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 分别是属于 λ_1,λ_2 的特征向量则

(1) $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 不共线(2) $A^n(k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2)=k_1\lambda_1^{\ n}\vec{\xi}_1+k_2\lambda_2^{\ n}\vec{\xi}_2$

证明: 假设 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 共线, $\vec{\xi}_1=k\vec{\xi}_2,A\vec{\xi}_1=Ak\vec{\xi}_2,\lambda_1\vec{\xi}_1=\lambda_2k\vec{\xi}_2,$

$\lambda_1\vec{\xi}_1=\lambda_2\vec{\xi}_1,\lambda_1=\lambda_2$ 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾

例 2、$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,求(1) $A^4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $A^{100}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

解: (1) $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$,由 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$

$\lambda_1=2$ 对应的特征向量为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2=3$ 对应的特征向量为 $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2$

所以 $A^4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2^4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\times3^4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 194 \\ 178 \end{pmatrix}$

(2) $A^{100}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}=A^{100}\{3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}=3\times2^{100}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+5\times3^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times2^{101}+5\times3^{100} \\ 3\times2^{100}+5\times3^{100} \end{pmatrix}$

例 3、若 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n,a_1=4,a_2=9$,求 a_n

解：$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a_n-6a_{n-1} \\ a_n+0a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

设 $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，　$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 6 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$

当 $\lambda_1=2$ 时，$-x+2y=0$，令 $y=1$ 得 $\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，当 $\lambda_2=3$ 时，$-x+3y=0$，令 $y=1$ 得 $\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\left(3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=3\times2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times2^n+3^n \\ 3\times2^{n-1}+3^{n-1} \end{pmatrix}$

因此$a_n = 3\times 2^{n-1} + 3^{n-1}$

例 2、求 Fibonacci 数列 0,1,1,2,3,5,8,13,$\cdots$的通项公式

解： 设通项为F_n(n=0,1,2,$\cdots$)，则$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n + 0F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$

设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

由A的特征方程$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$得$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

特征向量是方程$-x + \lambda y = 0$的根，令$y = 1$得特征向量为$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$，

$$\overrightarrow{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\xi_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

先把$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$用特征向量$\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_2}$线性表示，设$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

于是$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c_1 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$解得$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ c_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$，即$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{\xi_1} - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{\xi_2}$

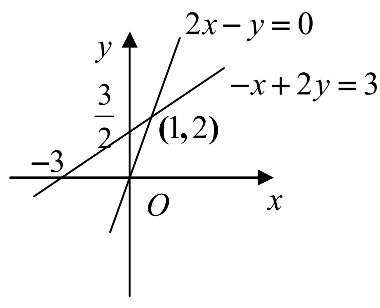
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}A^n\overrightarrow{\xi_1} - \frac{\sqrt{5}}{5}A^n\overrightarrow{\xi_2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1^{\,n}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_2^{\,n}\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此$F_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1^{\,n} - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\lambda_2^{\,n} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

第二章 线性方程组与矩阵的运算

第一节 矩阵的运算

一、线性方程组的几何解释



例 1、二元一次方程组$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$的几何解释

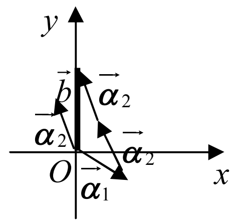
1、方程组的解$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$表示直线$2x - y = 0$和$-x + 2y = 3$的交点$(1,2)$

2、方程组可写成：

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，记 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，则方程组记为 $AX=b$

3、方程组也可写成：$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

其解 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 表示把向量 $\vec{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 按基底 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 分解的系数，



即 $1\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1+2\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2=\vec{b}$

例 2、三元一次方程组 $\begin{cases} 2x-y \quad =0 \\ -x+2y-z=-1 \\ \quad -3y+4z=4 \end{cases}$ 的几何解释

1、方程组的解 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$ 表示三个平面的交点 $(0,0,1)$

2、方程组也可写成：$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

其解的意思是用 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 的线性组合表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 时的各分量的系数

3、方程组可写成：

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$，设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 方程组记为 $AX=b$

二、矩阵的行变换初等矩阵

例 1、解方程组 $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ \quad 4y+z=2 \end{cases}$

1、解方程组

解 1：方程组 $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ \quad 2y-2z=6 \\ \quad 4y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ \quad 2y-2z=6 \\ \quad\quad 5z=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$

解 2：如果分离系数，解 1 的过程可以看成是矩阵的行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&4&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{array}\right]\quad \text{于是解为}\begin{cases}x=2\\y=1\\z=-2\end{cases}$$

2、方程组的记法

方程组可记为$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$，设$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$

方程组记为 $AX=b$，$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$叫系数矩阵，$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{bmatrix}$叫增广矩阵

上面的解 2 就是用矩阵的行变换进行消元

3、矩阵的行变换与矩阵的乘法

在解 2 中系数矩阵 A 的变换如下

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

(1)看第一步$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$

用单位矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$左乘$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$还是得$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$，就好象是$1\times8=8$不会改变乘数 8 的值一样。即$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$是在原来第一、二、三行的基础上，把第二行减去第一行乘以 3 。

于是左乘单位矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$是基础，只要把单位矩阵第二行第一列的 0 改成-3 就行了，

即$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$叫初等矩阵，记为$\mathrm{E}_{21}$。

(2) 再看第二步$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

是在原来第一、二、三行的基础上，把第三行减去第二行乘以 2 。

故要把$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$左乘单位矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$的第三行第二列的 0 改成−2 可得$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，

即$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，初等矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$， 记为$\mathrm{E}_{32}$

(3)行变换$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

用矩阵的乘法表示为$\mathrm{E}_{32}(\mathrm{E}_{21}A)=U$

4、其它的初等变换与乘法

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$就是$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$就是$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

5、如何变回去？

如何把U变回 A?

先看一个 E 如何变回去,

如$\mathrm{E}_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$要变回去，就要把第二行加上第一行乘以 3，

于是有$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$的逆矩阵

$\mathrm{E}_{32}(\mathrm{E}_{21}A)=U$,于是$A=\mathrm{E}_{21}{}^{-1}\mathrm{E}_{32}{}^{-1}U$

三、矩阵的乘法

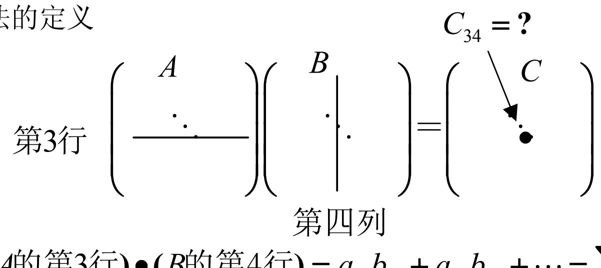
1、方程组方程组$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$

写法 1：$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$，设$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,记为 $AX=b$

写法 2：$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

写法 3：$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

2、乘法的定义



$C_{34}=(A\text{的第3行})\bullet(B\text{的第4行})=a_{31}b_{14}+a_{32}b_{24}+\cdots=\sum_{i=1}^{n}a_{3k}b_{k4}$

3、用 A 乘以 B 的列得 C 的列

$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$ 可写成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a + 2b + c = 5 \\ 3a + 8b + c = 2 \\ 4b + c = 7 \end{cases}$ 可写成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

这两个方程可合起来写成

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&a\\y&b\\z&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\12&2\\2&7\end{bmatrix}$$

对比知 AB＝C 可以看成用 A 乘以 B 第一列得 C 的第一列，A 乘以 B 第二列得 C 的第二列，……，A 乘以 B 第 n 列得 C 的第 n 列

$$设\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}\cdots&a_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots&b_{np}\end{bmatrix}=C,则$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}\cdots&a_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\cdots\\b_{n1}\end{bmatrix}=C的第一列，\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}\cdots&a_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\cdots\\b_{n2}\end{bmatrix}=C的第二列$$

$$\cdots\cdots\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}\cdots&a_{m2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1p}\\b_{2p}\\\cdots\\b_{np}\end{bmatrix}=C的第\mathrm{n}列$$

4、用 A 的行乘以 B 得 C 的行

$$则\begin{bmatrix}a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots&b_{np}\end{bmatrix}=C的第一行,\begin{bmatrix}a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots&b_{np}\end{bmatrix}=C的第二行$$

$$\cdots\cdots\begin{bmatrix}a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots&b_{np}\end{bmatrix}=C的第\mathrm{n}行$$

5、用分块

6、在 AB＝C 中，A 的一个元素对 C 供献

$$例1\begin{bmatrix}a_{11}&0\cdots&0\\0&0\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots&b_{np}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}\cdots&a_{11}b_{1p}\\0&0\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0\cdots&0\end{bmatrix}=a_{11}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots&b_{1p}\\0&0\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0\cdots&0\end{bmatrix}$$

例2 $\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots 0 \\ a_{21} & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{np} \end{bmatrix}=a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots\ 0 \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ 0 & 0\cdots\ 0 \end{bmatrix}$

例3 $\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots a_{2p} \\ \cdots & \cdots\ \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{np} \end{bmatrix}=a_{2p}\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots\ 0 \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ 0 & 0\cdots\ 0 \end{bmatrix}$

综上 $\begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots a_{ij}\cdots \\ \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{np} \end{bmatrix}=a_{ij}\begin{bmatrix} \vdots \\ b_{i1}\, b_{i2}\cdots b_{ip} \\ \vdots \end{bmatrix}$

7、在 AB＝C 中，B 的每一个元素对 C 供献

综上 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{m2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots b_{ij}\cdots \\ \vdots \end{bmatrix}=\mathrm{b}_{ij}\begin{bmatrix} 0\ \cdots\ a_{1j}\cdots 0 \\ 0\ \cdots\ a_{2j}\cdots 0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ 0\cdots\ a_{mj}\cdots 0 \end{bmatrix}$

四、矩阵的逆与 LU 分解

1、定义：若 $A^{-1}A=I=AA^{-1}$

2、求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆

设 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则，得两个方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

可以用消元法分别解这两个方程组，也可一起解这两个方程组

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

用消元法求矩阵 A 的逆矩阵，$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$

3、$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4、$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

5、有可逆矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}2-4\times\text{行}1}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}1-\frac{1}{3}\times\text{行}2}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\times\text{行}1}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}\times\text{行}2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

第一步 $\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$，第二步 $\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$

综上 $\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$， $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}$

6、若 $E_{32}E_{21}A=U$，则 $A=E_{21}{}^{-1}E_{32}{}^{-1}U=LU$

例如 $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$

故 $E_{32}E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\10&-5&1\end{bmatrix}=E$

$E_{21}{}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$E_{32}{}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$

$E_{21}{}^{-1}E_{32}{}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}=L$

7、$n\times n$ 矩阵化为 U 的运算次数 $\approx n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2\approx\frac{1}{3}n^3$

8、置换矩阵与矩阵的转置

(1) 3×3 置换矩阵 P 有，$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$共 6 个组成一个群,$P^{-1} = P^T$，

(2) $n \times n$ 矩阵的置换矩阵 P 共有 $n!$ 个组成一个群，$P^T P = I$

(3)转置矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$，则$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(4)对称矩阵：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(5)设 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$则$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$,$B^T B$是对称矩阵

事实上$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$

第二节　线性方程组

一、齐次线性方程组

1、齐次线性方程组定义：形如$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m1}x_n = 0 \end{cases}$ 的方程组叫做齐线性方程组，

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \cdots a_{n1} \\ a_{21} \ a_{22} \ \cdots \ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \ a_{m2} \cdots a_{m1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$，齐线性方程组记为 $AX = 0$

2、解齐次方程组的研究：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$　　(1)

解：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$为阶梯形矩阵记为$R$

于是方程组(1)化为$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$即$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2x_2 - 2x_4 \\ 2x_3 = -4x_4 \end{cases}$

让取 x_2与x_4 取任意的实数，都可以求出 x_1与x_3。例如 x_2＝1与x_4＝0，得 x_1＝−2,x_3＝0

就可得方程组(1)的一个解$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。因此我们称 x_2与x_4 为自由变量，x_1与x_3 为主元，

x_1与x_3 的系数为主元系数。可以继续用初等行变换化简 R

$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$为标准形矩阵，主元系数所在的列中主元系数为 1

有了标准形矩阵方程组(1)化为$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$

为了写出通解$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$，可把$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$写成$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 叫标准方程组

，因此$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$

得方程组(1)的通解为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3、齐次线性方程组的解法步骤：

第一步把系数矩阵化为标准形，第二步写出标准方程组写出通解

例、求线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

解：$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

于是$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$，标准组$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 于是通解$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

二、非齐次线性方程组：

1、定义：形如$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m1}x_n = b_m \end{cases}$ （b_1，b_2，…，b_m 不全为零)

的方程组叫做非齐线性方程组

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$,这个方程组记为 $AX = B$

2、解非齐次方程组的研究：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$ (2)

解：$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 3b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dfrac{1}{2}(b_2 - 2b_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$,

于是当$b_3 = b_2 + b_1$时

方程组(2)化为$\begin{cases} x_1 = 3b_1 - b_2 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(b_2 - 2b_1) - 2x_4 \end{cases}$，标准组$\begin{cases} x_1 = 3b_1 - b_2 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(b_2 - 2b_1) - 2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 于是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$

得方程组(2)的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，得方程组(2)的一个特解 $X_0 = \begin{bmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{bmatrix}$

又 $X^* = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是齐次方程组(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解，由此可见

非齐次方程组(2)的通解是(2)的特解与齐次方程组(1)的通解之和，即 $X = X_0 + X^*$

3、非次线性方程组的解法步骤：

第一步把增广矩阵化为标准形，第二步写出标准方程组写出通解

例、解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 5 \end{cases}$

解：$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

于是

$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 故通解是 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

三、线性规划的单纯形法

1、引入新变量化为标准型

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ 可引入 $x' \ge 0$ 化为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x' = b_i$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ 可引入 $x' \ge 0$ 化为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x' = b_i$

若 $x_j \ge h$ 可做代换 $x_j = x' + h, x' \ge 0$

若 $x_j \le h$ 可做代换 $x_j = h - x', x' \ge 0$

若 $x_j \in R$ 可做代换 $x_j = x'' - x', x'' \ge 0, x' \ge 0$

2、例题

例 1、$\mathbf{max}\ z = -x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：化为标准形

$$\mathbf{max}\ z = -x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = z \end{cases} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & z-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & z-7 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_5 = 3 \\ -\frac{7}{2}x_1 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = z - 7 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ 得 $x_2 = 3, x_3 = 1$，$z_{\mathbf{max}} = 7$

求最大值把 z 表示为常数与非正数的和

例 2、Min　$z=-2x_1-3x_2$

s.t $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ 解：化为标准形 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=2\\ x_1+2x_2+x_4=10\\ 3x_1+x_2+x_5=15\\ -2x_1-3x_2=z\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1&0&0&2\\1&2&0&1&0&10\\3&1&0&0&1&15\\-2&-3&0&0&0&z\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1&0&0&2\\3&0&-2&1&0&6\\4&0&-1&0&1&13\\-5&0&3&0&0&z+6\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1&0&0&2\\1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&2\\4&0&-1&0&1&13\\-5&0&3&0&0&z+6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&4\\1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&2\\0&0&\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}&1&5\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&0&z+16\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&4\\1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&2\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&3\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&0&z+16\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&3\\1&0&0&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&4\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&3\\0&0&0&\frac{7}{5}&\frac{1}{5}&z+17\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x_2+x_4-\frac{1}{5}x_5=3\\ x_1-\frac{1}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5=4\\ x_3-\frac{4}{5}x_4+\frac{3}{5}x_5=3\\ \frac{7}{5}x_4+\frac{1}{5}x_5=z+17\end{cases},$$

令$x_4=x_5=0$,得$z_{\min}=-17$，此时$x_1=4,x_2=3,x_3$

求最小值把 z 表示为常数与非负数的和

第三章、向量空间

第一节 向量空间

一、向量空间的认识

1、引入：在 R^2 中取两个向量$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\in R^2$,

设实数$\lambda\in R$，则$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)\in R^2$

因此，集合 R^2 对加法与数乘封闭。同样的集合 R^3 对加法与数乘封闭。

2、定义：若非空集合 A 定义了加法与数乘运算，并且对任意的$a,b\in A$，任意的$\lambda\in R$，

都有 $a+b\in A,\lambda a\in A$ 成立，则称这个集合 A 叫做向量空间。

二、运算法则

1、集合 A 是向量空间的充要条件是：若 $\forall a,b\in A,\forall$实数$\lambda_1,\lambda_2,$都有$\lambda_1 a+\lambda_2 b\in A$。

2、若集合 A 是向量空间，则零向量 $\vec{0}=0\vec{a}\in A$

3、向量空间的子空间：若向量空间 A 的非空子集 B 也是向量空间，则 B 叫做 A 的子空间。

4、子空间举例

例 1、在 R^2 的子集 $A=\{\vec{a}\mid\vec{a}=\lambda(1,2),\lambda\in R\}$ 是 R^2 的子空间

解： $\vec{a}_1=\lambda_1(1,2),\vec{a}_2=\lambda_2(1,2)\Rightarrow\vec{a}_1+\vec{a}_2=(\lambda_1+\lambda_2)(1,2)\in A$，因此 A 是向量空间。

子空间 A 构成了一条过原点的以 $(1,2)$ 为方向向量的直线。

对向量 $(1,2)$ 有两种看法：第一种看法是，以原点为起点以点 M$(1,2)$ 为终点的向量，或把这个向量平移到任何位置。第二种看法是向量 $(1,2)$ 就是点 M$(1,2)$。第二种看法很重要。

例 2、在 R^3 的子集 $A=\{\vec{a}\mid\vec{a}=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,1,1),\lambda_1,\lambda_2\in R\}$ 也是 R^3 的子空间，这个子空间是一个过原点的的平面。

三、线性无关与相关

1、在 R^2 中不共线的两个向量叫线性无关，共线两个向量叫线性相关。

2、在 R^3 中不共线的两个向量叫线性无关，共线两个向量叫线性相关。

3、在 R^3 中不共面的三个向量线性无关。共面三个向量中线性相关

4、若存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使 $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$，则称 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 线性相关

5、若 $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$，则必有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，则称 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 线性无关。

6、$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$ 也叫做 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的线性组合

7、基底、维数、秩

(1)在 R^2 中每个向量都可以用两个不共线向量表示，这两个不共线的向量就构成了 R^2 的基底。

(2)在 R^3 中每个向量都可以用三个不共面向量表示，这三个不共面的向量就构成了 R^3 的基底。

(3)如果向量空间 A 中的每个向量都可以用不共线的 n 个线线无关的向量表示，那么称这 n 个线线无关的向量就构成了向量空间 A 的基底。n 叫向量空间 A 维数或秩。记为 r(A)=n

8、坐标： n 维叫向量空间 A 的一个基底是$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$， 向量$\boldsymbol{\xi}\in A$,若

$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$， 则$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$叫做向量$\boldsymbol{\xi}$在基底$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$上的

坐标，这时有$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\\boldsymbol{\varepsilon}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{bmatrix}$

例 1、在基底$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$下向量$\vec{m}$的坐标是(2, 3, −1)，求$\vec{m}$在基底$\{\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\}$下的坐标

解：因为在基底$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$下向量$\vec{m}$的坐标是(2, 3, −1)

所以$\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$，设$\vec{m}=x\vec{a}+y(\vec{a}+\vec{b})+z(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

则$\vec{m}=(x+y+z)\vec{a}+(y+z)\vec{b}+z\vec{c}$，对照得$\begin{cases}x+y+z=2\\y+z=3\\z=-1\end{cases}$,于是$\begin{cases}x=-1\\y=4\\z=-1\end{cases}$

因此$\vec{m}$在基底$\{\vec{a},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\}$下的坐标是(−1, 4, −1)

例 2、求实数集上的形如$\{ax^2+bx+c\,|\,a,b,c\in R\}$组成线性空间

(1)若以$1,x,x^2$为基底，写出$2x^2+3x$的坐标

(2) 若以$1,x-2,(x-2)^2$为基底，写出$2x^2+3x$的坐标

解：(1) $2x^2+3x=0\times1+3x+2x^2$于是坐标是$(0,3,2)$

(2) $2x^2+3x=2(x-2)^2+11x-8=2(x-2)^2+11(x-2)+14$

于是$1,x-2,(x-2)^2$为基底$2x^2+3x$的坐标是$(14,11,2)$

第二节、矩阵的向量空间：

1、矩阵的列空间：

齐次方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=0\\3x_1+6x_2+8x_3+10x_4=0\end{cases}$ 的系数矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$的列向量的线性组合

设四个列向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1,\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2,\begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_3,\begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_4$

$M=\left\{\vec{\alpha}\middle|\vec{\alpha}=\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2,\vec{\alpha}_2+\lambda_3,\vec{\alpha}_3+\lambda_4\vec{\alpha}_4\right\}$形成一个向量空间。这个空间叫做由列向量$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$生成的 R^3 的子空间，也可叫做可记作矩阵 A 的列空间。记作 $L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)$，或记作 $C(A)$

由于 A 作行初等变换得 $\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 于是可知 $\vec{\alpha}_2$＝$2\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_4$＝$-2\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_3$ 因此 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3$ 是列空间 $C(A)$ 的一个基底，即 $C(A)$＝$L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3)$，列空间 $C(A)$ 的秩 $r[C(A)]=2$ 是方程组的主元的个数。

2、矩阵的零空间

齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=0\\3x_1+6x_2+8x_3+10x_4=0\end{cases}$ 的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$＝$c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ 组成一个线性空间它叫做矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$ 的零空间记作 $N(A)$＝$L(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\1\end{bmatrix})$，它的秩 $r[N(A)]=2$ 是方程组的自由变量的个数。

由于齐次线性方程组的主元与自由变量的总数是方程组的未知数的个数，于是若矩阵 A 有 n 列，则 $r[C(A)]+r[N(A)]$＝n

3、矩阵 A 的行空间与左零空间

(1) $C(A^T),N(A^T)$ 分别叫做矩阵 A 的行空间与左零空间。

(2)设矩阵 A 有 m 列，则 $r[C(A^T)]+r[N(A^T)]$＝m

(3) $r[N(A)]=r[C(A^T)]$ 也就是说矩阵的行秩等于它的列秩都，这个秩也叫做矩阵的秩。

四种空间

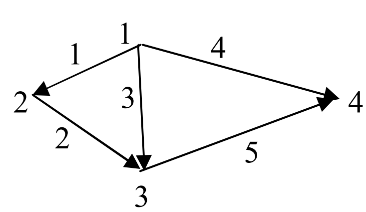
第三节、图与的矩阵

1、小世界地图

图是结点与边组成的集合，从一结点到另一个结点通过边要走几步则这两个结点的距离就是几，最大距离常常并不大。例如把全世界的人看成结点，两人认识就就把他们连成边，由于某议员是我的同学因此我与克林屯的距离为 2。我的学生与克林屯的距离不超过 3。

2、用矩阵表示图

左图结点数 n=4，边数 m＝5



边为行，结点为列
对于边 1：在结点 1 处流出记为-1，在结点 2 处流入记为 1
在结点 3 处不关联记为 0，在结点 4 处不关联记为 0，
于是此图所对应的矩阵为的第一行的元素分别为-1，1,0,0
对于边 2 类似地得到第二行为 0,-1,1,0；对于边 3 得第三行为-1,0,1,0
边 4 第四行-1,0,0,1；边 5 第五行,0,0, -1,1

图矩阵是 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad m\times n=5\times 4$

3、矩阵 A 的零空间(列的零空间) $AX=0$

$$AX=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ x_3-x_2 \\ x_3-x_1 \\ x_4-x_1 \\ x_4-x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此方程组只有一个自由变量令 $x_1=1$ 得基础解系 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，于是通解为 $X=c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

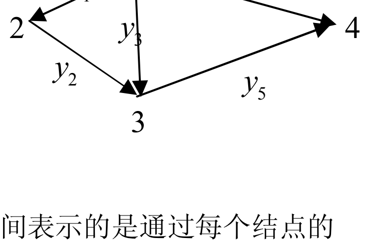
因为零空间的维数 $\mathbf{dim}\, N(A)=1$，

所以列空间的维数 $\mathbf{dim}\, C(A)=n-\mathbf{dim}\, N(A)=4-1=3=r$(矩阵的秩)

如果把 x_1,x_2,x_3,x_4 分别看成结点 1,2,3,4 的电势。零空间表示的是每条边的电势代数为零的条件是每个结点的电势相等

4、行的零空间 $A^TY=0$

$$A^TY=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -y_1-y_3-y_4 \\ y_1-y_2 \\ y_2+y_3-y_5 \\ y_4+y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



所以 A^T 零空间的维数 $\mathbf{dim}\, N(A^T)=m-r=5-3=2$

如果把 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 分别看成边 1,2,3,4，5 的电流。行零空间表示的是通过每个结点的

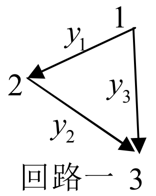
的电流代数和为零的条件

由于矩阵的秩是 3 因此用消元法 A^T 第四行要全变为零。如果不用消元法能否很快求出方程组的解？

由于要找的是通过每个结点的的电流代数和为零的解空间的维数为 2,于是基础解系由两个无关向量构成。

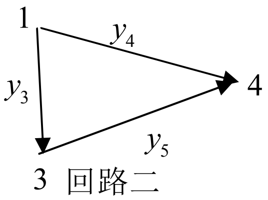
如果令 $y_4 = y_5 = 0$，于是只要看回路一，令 $y_1 = 1$ 于是顺边 1 流入结点 2 的电流为 1,

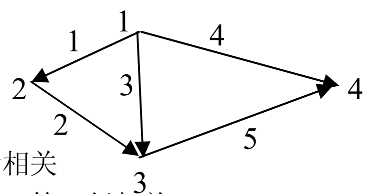
于是从结点 2 顺边 2 流出的电流也为 1,电流与边 2 同向于是 $y_2 = 1$，于是顺边 3 流入结点 3 的电流为-1,于是一个解 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。



如果令 $y_1 = y_2 = 0$，于是只要看回路二，令 $y_3 = 1$ 同理得 $y_4 = 1$，$y_5 = -1$ 于是一个解

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，因此通解是 $Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$





在每个结点上的电流流入等于流出的电流是基色尔堆霍夫定律

5、回路与欧拉公式

由于边 1, 边 2, 边 3 形成回路，于是矩阵 A 的第 1 行，第 2 行，第 3 行相关

同理矩阵 A 的第 3 行，第 4 行，第 5 行相关；第 1 行，第 2 行，第 5 行, 第 4 行相关. 边 1, 边 2, 边 4 不构成回路且再添一条路就构成回路，于是矩阵 A 第 1 行，第 2 行，第 4 行就是行空间的极大线性无关组，构成了行空间的一个基。没有回路的图叫做树。

因为 $\mathbf{dim}\, N(A^T) = m -$ 矩阵的秩 r，

$\mathbf{dim}\, N(A^T) =$ 独立回路数，m=边数，矩阵的秩 $r = n - \mathbf{dim}\, N(A) = n - 1 =$ 边数-1

所以独立回路数=边数-(顶点-1)

顶点 + 独立回路数-边数 = 1

如果把最外回路算上得：顶点 + 总回路数-边数 = 2

这就是空间无洞多面体体的欧拉公式 V+F-E=2（V 顶点数，F 面数，E 棱数）

6、电学公式

边上电压 $e = AX$，边上电流 $Y = Ce(C$ 是电阻的倒数$)$，

无外电源的结点电流 $A^TY=0$，

有外电源的结点电流 $A^TY=f$

于是 $f=A^TY=A^TCe=A^TCAX$

第四节 正交化与正交分解

一、正交矩阵

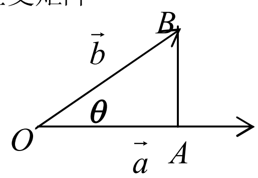
1、广义正交矩阵：若矩阵 A 的列向量两两互相垂直时，则这个矩阵叫做广义正交矩阵。

设正交矩阵 A 的列向量分别是 $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_1},\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_n}$，则 $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_i}^T\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_j}=\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_i}\bullet\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_j}=0$

2、单位广义正交矩阵：若正交矩阵 A 的列向量的模都为 1 时，则矩阵 A 叫单位广义正交矩阵，常用 Q 表示

3、正交矩阵：若单位广义正交矩阵 Q 是方阵时，则称矩阵 Q 是正交矩阵

这时 $Q^TQ=I$，于是 $Q^{-1}=Q^T$，$(Q^T)^{-1}=Q$

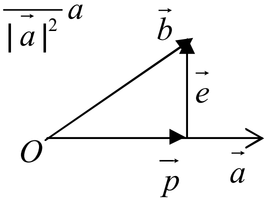


二、投影

1、投影：$|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\times\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|}$ 叫做 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影，

其几何意义是有向线段 OA 的数量，与 $\vec{a}$ 同向时取正号，与 $\vec{a}$ 反向时取负号

2、投影向量：如图 $\overrightarrow{p}$ 是 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量，$\overrightarrow{p}=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|}\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

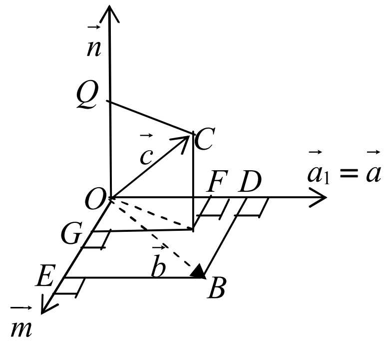


这里 $\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ 是投影系数

3、设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是 R^3 的一个单位正交基底，向量 $\overrightarrow{p}$ 在 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 方向的投影系数分别是 k_1,k_2,k_3，

则 $\overrightarrow{p}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}$

4、施密斯正交化：设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是 R^3 的一个基，



(1)设 $\vec{a}_1=\vec{a}$

(2)在 $L(\overrightarrow{a_1},\vec{b})$ 内取 $\overrightarrow{m}\perp\vec{a}_1$，让 $\vec{b}$ 按 $\vec{a}_1$，$\overrightarrow{m}$ 方向分解得

$\vec{b}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\dfrac{\overrightarrow{a_1}\bullet\vec{b}}{|\overrightarrow{a_1}|^2}\vec{a}_1+\overrightarrow{OE}$，于是取 $\vec{b}_1=\overrightarrow{OE}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}_1\cdot\vec{b}}{\vec{a}_1^{\,2}}\vec{a}_1$，

(3) 在 $L(\overrightarrow{a_1},\vec{b}_1,\vec{c})$ 内取 $\vec{n}\perp L(\vec{a}_1,\vec{b}_1)$，让 $\vec{c}$ 按 $\vec{a}_1$，$\vec{b}_1$，$\vec{n}$ 方向分解得

$$\vec{c}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{c}}{\vec{a}_1^{\,2}}\vec{a}_1+\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{c}}{\vec{b}_1^{\,2}}\vec{b}_1+\overrightarrow{OQ},$$

于是取 $\vec{c}_1=\overrightarrow{OQ}=\vec{c}-\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{c}}{\vec{a}_1^{\,2}}\vec{a}_1-\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{c}}{\vec{b}_1^{\,2}}\vec{b}_1$

(4)则单位正交基底 $\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|},\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|},\frac{\vec{c}_1}{|\vec{c}_1|}$ 为所求

例、把基底 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)\end{cases}$ 单位正交化

解：正交化 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_1}{\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_1}\boldsymbol{\beta}_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_1}{\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_1}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_2}{\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_2}\boldsymbol{\beta}_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)\end{cases}$

把它单位化，得 $\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)\\ \boldsymbol{\xi}_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)\\ \boldsymbol{\xi}_3=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})\end{cases}$ 为所求

三、矩阵的正交分解

1、矩阵的正交化举例：把 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&2\end{bmatrix}$ 标准正交化

解：设 $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，令 $\vec{a}_1=\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{b}_1=\vec{b}-\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{b}}{\vec{a}_1^{\,2}}\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

于是标准正交化后矩阵$Q=\begin{bmatrix}\dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} & ,\dfrac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$为所求

2、矩阵的正交分解 A=QR

分别把$\vec{a},\vec{b}$按$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$分解得

$$\vec{a}=(\vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1+(\vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 & \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\\ \vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix}$$

$$\vec{b}=(\vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1)\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1+(\vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 & \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\\ \vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix},$$

于是矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 & \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 & \vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\\ \vec{a}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 & \vec{b}^T\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}=QR$$

这里$Q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$广义单位正交矩阵，$R=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$是上三角形矩阵

这是上三角正交分解，其本质是写出A的列向量在基底$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1,\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$下的坐标，$R$的第一列是$A$的第一列向量的坐标，$R$的第二列是 A 的第二列的坐标

第五节、投影与**傅立叶级数**

1、把向量投影到正交基底：设$\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\cdots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$R^n$的一个正交基底，$\vec{\xi}$是任意一个向量，设$\vec{\xi}=a_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+a_2\overrightarrow{\varepsilon_2}+\cdots+a_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$，则两左乘$\overrightarrow{\varepsilon_1}^T$得

$\vec{\varepsilon}_1^T \vec{\xi} = a_1 \vec{\varepsilon}_1^T \vec{\varepsilon}_1 = a_1$, 一般地 $a_i = \vec{\varepsilon}_i^T \vec{\xi} (i = 1, 2, \cdots, n)$

注：$\vec{a}^T \vec{b}$ 叫 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积记作 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$, 易知 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

2、以函数为向量的内积可类似地可定义为 $f(x) \bullet g(x) = \int_a^b f(x) g(x) dx$

3、函数基底 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 是一个正交基底

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$$

故当 $k \neq n$ 时 $\cos kx$ 与 $\cos nx$ 正交，同理可得 $k \neq n$ 时 $\sin kx$ 与 $\sin nx$ 正交

当 $k, n \in N$ $\sin kx$ 与 $\cos nx$ 正交

综上 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 是一个正交基底

4、设把函数投影到 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 上得

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \cos nx + \cdots$$

两边对 1 作内积得 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx = 2\pi a_0, a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$

两边对 $\cos kx$ 作内积得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} a_k \cos^2 kx dx = \pi a_k, a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

两边对 $\sin kx$ 作内积得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} a_k \sin^2 kx dx = \pi b_k, b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

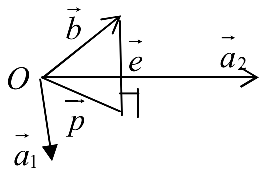
$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \cos nx + \cdots$$

就叫做傅立叶级数

第六节、投影与最小二乘法

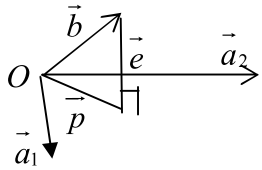
1、在平面上的投影向量：如图$\vec{b}$在$L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$是上的投影向量为$\vec{p}$，

设$\vec{p}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2=[\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=AX$，则如图$\vec{e}=\vec{b}-AX$,



因$\vec{e}\perp\vec{a}_1,\vec{e}\perp\vec{a}_2$，则$\vec{a}_1\bullet(\vec{b}-AX)=0,\vec{a}_2\bullet(\vec{b}-AX)=0$，

$$\begin{bmatrix}\vec{a}_1^{\ T}\\\vec{a}_2^{\ T}\end{bmatrix}(\vec{b}-AX)=0,A^T(\vec{b}-AX)=0,A^TAX=A^T\vec{b}$$



于是$\vec{b}$在$L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$上的投影系数 $X=(A^T\ A)^{-1}A^T\vec{b}$

$\vec{b}$在$L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$上投影向量为$p=AX=A(A^T\ A)^{-1}A^T\vec{b}$,

2、最小二乘法

回归直线的方程

设有线性相关系系的变量 x,y 的一组测量值是

x	x_1	x_2	⋯	x_n
y	y_1	y_2	⋯	y_n

设回归直线的方程$\hat{y}=v+ux$，则

$$\begin{cases}v+x_1u=y_1\\v+x_2u=y_2\\v+x_3u=y_3\\\cdots\\v+x_nu=y_n\end{cases}$$ 则一般性况下这个关于v,u的方程组是无解的。

方程组可写成$\begin{bmatrix}1&x_1\\1&x_2\\\cdots&\\1&x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}=v\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}$

因为$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}$不在列空间中，为了使方程组有最好的近似解我们可以把$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}$投影到列空间

$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}\right)$中，得$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x_1\\1&x_2\\\cdots&\cdots\\1&x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$，则最优解$\begin{bmatrix}v\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$

例如

x	1	2	3
y	1	2	2

求回归直线

解 1：设 $\hat{y}=v+ux$，则 $\begin{cases} v+1u=1 \\ v+2u=2 \\ v+3u=2 \end{cases}$ 无解用最小二乘法求最优解，设 $Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 在 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

列空间的投影是 AX，则 $A^T AX=A^T Y$ 下面解此方程组

因为 $A^T[A\,|Y]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 12 & 11 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$

于是 $X=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，即 $v=\frac{2}{3}, u=\frac{1}{2}, \hat{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}x$

解 2：设 $\hat{y}=v+ux$，则 $\begin{cases} v+1u=1 \\ v+2u=2 \\ v+3u=2 \end{cases}$ 无解，可用最小二乘法求最优解，

$Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 在 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 上的投影的系数 $X=(A^T A)^{-1}A^T Y$

因为 $A^T A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$，所以 $(A^T A)^{-1}=\frac{1}{42-36}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

又 $A^T Y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$，投影系数 $X=(A^T A)^{-1}A^T Y=\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

故最优解 $\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，回归直线 $\hat{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}x$

4、最小二乘法的实质就是：点到直线垂线段最短，点到平面的距离垂线段最短，点到向量空间的距离也是垂线段最短.

由投影的意义知最优解最优解$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$使点$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$到列空间$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$中的任意一

点$\begin{bmatrix} v+x_1u \\ v+x_2u \\ \cdots \\ v+x_nu \end{bmatrix}$的距离$\sqrt{(v+x_1u-y_1)^2+(v+x_2u-y_2)^2+\cdots+(v+x_nu-y_n)^2}$取最小值

5、在列空间的投影矩阵

向量$\vec{b}$在矩阵A的列空间的投影向量是$p=AX=A(A^T A)^{-1}A^T\vec{b}$

这里的 $A(A^T A)^{-1}A^T$叫投影矩阵，记为P=$A(A^T A)^{-1}A^T$

投影矩阵的性质：$P^T=P$，$P^2=P$

第四章、特征向量

第一节 特征值与特征向量的计算

一、特征多项式：设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}$叫 A 的特征多项式.

方程$f(\lambda)=0$叫 A 的特征方程，特征方程的根就是特征值

例 1、求$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量

解：特征多项式$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$

A的特征方程是$\lambda^2-5\lambda+6=0$，$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

当$\lambda_1=2$时$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，即$x-2y=0$，令$y=1$，得$x=2$

故对应的一个特征向量为$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

当$\lambda_2=3$时$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，即$x-y=0$，令$y=1$，得$x=1$

故对应的一个特征向量为$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

二、计算$A^n\vec{a}$

1、矩阵与向量的乘法法则

设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\vec{\xi}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\vec{\eta}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},k\in R$,则

(1) $A(k\vec{\xi})=k(A\vec{\xi})$,(2) $A(\vec{\xi}+\vec{\eta})=A\vec{\xi}+A\vec{\eta}$

证 $A(k\vec{\xi})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kax+kby \\ kcx+kdy \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}=k(A\vec{\xi})$

2、特征向量的性质 1 设$\vec{\xi}$是 A 的属于特征值λ的特征向量，则

(1)则 $A(k\vec{\xi})=\lambda(k\vec{\xi})$ (2) $A^n\vec{\xi}=\lambda^n\vec{\xi}$

证：$A^n\vec{\xi}=A^{n-1}(A\vec{\xi})=A^{n-1}(\lambda\vec{\xi})=A^{n-2}(\lambda^2\vec{\xi})=\cdots=\lambda^n\vec{\xi}$

例 1、$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=3$及相应的特征向量是$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

求(1) $A^3\vec{\xi}_1$，(2) $A^4\vec{\xi}_2$

解：$A^3\vec{\xi}_1=\lambda_1{}^3\vec{\xi}_1=8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ ， $A^4\vec{\xi}_2=\lambda_2{}^4\vec{\xi}_2=3^4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 81 \\ 81 \end{pmatrix}$

3、特征向量的性质 2 若 A 的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2,\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$分别是属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量则

(1)$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$不共线(2) $A^n(k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2)=k_1\lambda_1{}^n\vec{\xi}_1+k_2\lambda_2{}^n\vec{\xi}_2$

证明: 假设$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$共线, $\vec{\xi}_1=k\vec{\xi}_2,A\vec{\xi}_1=Ak\vec{\xi}_2,\lambda_1\vec{\xi}_1=\lambda_2k\vec{\xi}_2$,

$\lambda_1\vec{\xi}_1=\lambda_2\vec{\xi}_1,\lambda_1=\lambda_2$与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾

例 2、$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,求(1) $A^4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $A^{100}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

解: (1) $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$,由$\lambda^2-5\lambda+6=0$得$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

$\lambda_1=2$对应的特征向量为$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\lambda_2=3$对应的特征向量为$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

因为$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2$

所以$A^4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2^4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+2\times3^4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 194 \\ 178 \end{pmatrix}$

(2) $A^{100}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}=A^{100}\{3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}=3\times2^{100}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+5\times3^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times2^{101}+5\times3^{100} \\ 3\times2^{100}+5\times3^{100} \end{pmatrix}$

三、求递推数列

例 1、若$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n,a_1=4,a_2=9$,求$a_n$

解： $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a_n-6a_{n-1} \\ a_n+0a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

设$A=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$， $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 6 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$得$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

当$\lambda_1=2$时，$-x+2y=0$，令$y=1$得$\overline{\xi_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，当$\lambda_2=3$时，$-x+3y=0$，令$y=1$得$\overline{\xi_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\left(3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=3\times 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 2^{n}+3^{n} \\ 3\times 2^{n-1}+3^{n-1} \end{pmatrix}$$

因此$a_n=3\times 2^{n-1}+3^{n-1}$

第二节、对角分解及应用

一、矩阵的对角分解

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$的特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=3$及相应的特征向量是$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

由于$A\left[\vec{\xi}_1 \quad \vec{\xi}_2\right]=\left[A\vec{\xi}_1 \quad A\vec{\xi}_2\right]=\left[\lambda_1\vec{\xi}_1 \quad \lambda_2\vec{\xi}_2\right]=\left[\vec{\xi}_1 \quad \vec{\xi}_2\right]\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

记$S=\left[\vec{\xi}_1 \quad \vec{\xi}_2\right]=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$AS=S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, A=S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}S^{-1}$

因为$S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，所以$A=S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

对角阵$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$常记为$\Lambda$，这就是矩阵 A 对角分解：$A=S\Lambda S^{-1}$

一般地矩阵A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$及相应的特征向量是$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots\vec{\xi}_n$，记分块矩阵

$$S=\left[\vec{\xi}_1 \quad \vec{\xi}_2 \quad \cdots\vec{\xi}_n\right],\quad \Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}，则 A=S\Lambda S^{-1}$$

二、利用对角分解求A^n

设$A=S\Lambda S^{-1}$，则$A^2=S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}=S\Lambda^2S^{-1}, A^3=S\Lambda^2S^{-1}S\Lambda S^{-1}=S\Lambda^3S^{-1}$

可归纳出$A^n=S\Lambda^nS^{-1}$

如$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 54 & 8 \\ 27 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 46 & -46 \\ 19 & -19 \end{pmatrix}$$

三、求$A^n\vec{a}$

（1）设A的特征值是一般地矩阵A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$及相应的特征向量是

$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots\vec{\xi}_n$，设$\vec{a}=c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2+\cdots+c_n\vec{\xi}_n=[\vec{\xi}_1\quad\vec{\xi}_2\quad\cdots\quad\vec{\xi}_n]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$

再设$S=[\vec{\xi}_1\quad\vec{\xi}_2\quad\cdots\quad\vec{\xi}_n],C=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$，则$A^n\vec{a}=S\Lambda^nS^{-1}SC=S\Lambda^nC$

（2）递推$\vec{a}_{k+1}=A\vec{a}_k,\vec{a}_0=SC$，则$\vec{a}_n=A^n\vec{a}_0=S\Lambda^nC$

例、求 Fibonacci 数列 0,1,1,2,3,5,8,13,⋯的通项公式

解： 设通项为F_n(n=0,1,2,⋯)，则$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_n+F_{n-1}\\F_n+0F_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}$

设$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

由A的特征方程$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1=0$得$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

特征向量是方程$-x+\lambda y=0$的根，令$y=1$得特征向量为$\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$，

$\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}$

先把$\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$用特征向量$\vec{\xi_1},\vec{\xi_2}$线性表示，设$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{pmatrix}$

于是$\begin{cases}\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2=1\\c_1+c_2=0\end{cases}$解得$\begin{cases}c_1=\frac{\sqrt{5}}{5}\\c_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，即$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{\xi_1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{\xi_2}$

$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{5}A^n\vec{\xi_1}-\frac{\sqrt{5}}{5}A^n\vec{\xi_2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1^n\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_2^n\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$

因此$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_2^n=\frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

四、微分方程

解微分方程$\begin{cases}\dfrac{du_1}{dt}=-u_1+2u_2\\[2mm] \dfrac{du_2}{dt}=u_1-2u_2\end{cases}$, $u(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

解 1: 设 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-2\end{bmatrix}$, 把 A 对角分解得 $A=S\Lambda S^{-1}$，于是$\begin{pmatrix}\dfrac{du_1}{dt}\\[2mm] \dfrac{du_2}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=S\Lambda S^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

作代换$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, 则 $S\begin{pmatrix}\dfrac{dz_1}{dt}\\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt}\end{pmatrix}=S\Lambda S^{-1}S\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=S\Lambda\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$,

即$\begin{pmatrix}\dfrac{dz_1}{dt}\\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$就好解了

由 A 的特征方程 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda=0$, 得

λ_1＝0，λ_2＝−3，特征向量是方程$-x+(\lambda+2)y=0$

当λ_1＝0 时，令 $y=1$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，当$\lambda_1$＝−3 时，令 $y=-1$，得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$S=\begin{bmatrix}\vec{\xi}_1&\vec{\xi}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$

故有$\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dt}=0z_1\\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt}=-3z_2\end{cases}$ 于是$z_1=c_1$，$z_2=c_2e^{-3t}$

于是$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=z_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

由 $u(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$得，$\begin{cases}2c_1+c_2=1\\c_1-c_2=0\end{cases}$解得$c_1=c_2=\dfrac{1}{3}$,于是$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

一般地，微分方程$\begin{pmatrix}\dfrac{du_1}{dt}\\ \dfrac{du_2}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$的通解是$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=c_1e^{\lambda_1}\vec{\xi}_1+c_2e^{\lambda_2}\vec{\xi}_2$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$是$A$的特征值，$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$是相应的特征向量

这种方法可推广至地形如$\dfrac{d\vec{u}}{dt}=A\vec{u}$的微分方程

解 2：设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，由 A 的特征方程 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda=0,$ 得

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-3$，当$\lambda_1=0$时，得$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，当$\lambda_1=-3$时，得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

于是$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=c_1e^{\lambda_1}\vec{\xi}_1+c_2e^{\lambda_2}\vec{\xi}_2=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

当 t=0 时 $u(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1+c_2\\c_1-c_2\end{pmatrix}$，$\begin{cases}2c_1+c_2=1\\c_1-c_2=0\end{cases}$解得$c_1=c_2=\dfrac{1}{3}$,于是

故$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

第四节、**马尔可夫矩阵**

例 1：考虑某地区农业收成变化的三个状态，即“丰收”、“平收”和“欠收”。记 *E*1 为“丰收”状态，*E*2 为“平收”状态，*E*3 为“欠收”状态。表 3.7.1 给出了该地区 1960～1999 年期间农业收成的状态变化情况。试计算该地区农业收成变化的状态转移概率矩阵。

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
状态	E1	E1	E2	E3	E2	E1	E3	E2	E1	E2
年份	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
状态	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E1	E3	E3	E1
年份	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
序号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
状态	E3	E3	E2	E1	E1	E3	E2	E2	E1	E2
年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
序号	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
状态	E1	E3	E2	E1	E1	E2	E2	E3	E1	E2

从表 3.7.1 中可以知道，在 15 个从 *E1* 出发（转移出去）的状态中，

(1)有 3 个是从 $E1$ 转移到 $E1$ 的
（即 1→2，24→25，34→35）

(2)有 7 个是从 $E1$ 转移到 $E2$ 的
（即 2→3，9→10，12→13，15→16，29→30，35→36，39→40）

(3)有 5 个是从 $E1$ 转移到 $E3$ 的
（即 6→7，17→18，20→21，25→26，31→32）

所以

$$P_{11} = P(E_1 \to E_1) = P(E_1 | E_1) = \frac{3}{15} = 0.2000$$

$$P_{12} = P(E_1 \to E_2) = P(E_2 | E_1) = \frac{7}{15} = 0.4667$$

$$P_{13} = P(E_1 \to E_3) = P(E_3 | E_1) = \frac{5}{15} = 0.3333$$

同理可得：

$$P_{21} = P(E_2 \to E_1) = P(E_1 | E_2) = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$P_{22} = P(E_2 \to E_2) = P(E_2 | E_2) = \frac{2}{13} = 0.1538$$

$$P_{23} = P(E_2 \to E_3) = P(E_3 | E_2) = \frac{4}{13} = 0.3077$$

$$P_{31} = P(E_3 \to E_1) = P(E_1 | E_3) = \frac{4}{11} = 0.3636$$

$$P_{32} = P(E_3 \to E_2) = P(E_2 | E_3) = \frac{5}{11} = 0.4545$$

$$P_{33} = P(E_3 \to E_3) = P(E_3 | E_3) = \frac{2}{11} = 0.1818$$

结论：该地区农业收成变化的状态转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.2000 & 0.4667 & 0.3333 \\ 0.5385 & 0.1538 & 0.3077 \\ 0.3636 & 0.4545 & 0.1818 \end{bmatrix}$$

状态概率 $\pi_j(k)$ ：表示事件在初始（$k=0$）状态为已知的条件下，经过 **k** 次状态转移后，在第 **k** 个时刻（时期）处于状态 E_j 的概率。且：$\sum_{j=1}^{n}\pi_j(k)=1$

根据马尔可夫过程的无后效性及 **Bayes** 条件概率公式，有

$$\pi_j(k)=\sum_{i=1}^{n}\pi_j(k-1)P_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

记行向量 $\pi(k)=[\pi_1(k),\pi_2(k),\cdots,\pi_n(k)]$，则可以得到逐次计算状态概率的递推公式：

$$\begin{cases}\pi(1)=\pi(0)P\\ \pi(2)=\pi(1)P=\pi(0)P^2\\ \qquad\vdots\\ \pi(k)=\pi(k-1)P=\cdots=\pi(0)P^k\end{cases}$$

式中，$\pi(0)=[\pi_1(0),\pi_2(0),\cdots,\pi_n(0)]$ 为初始状态概率向量。 第 **k** 个时刻（时期）的状态概率预测

如果某一事件在第 **0** 个时刻（或时期）的初始状态已知，即 $\pi(0)$ 已知，则利用递推公式式，就可以求得它经过 **k** 次状态转移后，在第 **k** 个时刻（时期）处于各种可能的状态的概率，即 $\pi(k)$ ，从而就得到该事件在第 **k** 个时刻（时期）的状态概率预测。

例 **2**：在例 **1** 中，设终极状态的状态概率为 $\pi=[\pi_1,\pi_2,\pi_3]$ 则

$$[\pi_1,\pi_2,\pi_3]=[\pi_1,\pi_2,\pi_3]\begin{bmatrix}0.2000 & 0.4667 & 0.3333\\ 0.5385 & 0.1538 & 0.3077\\ 0.3636 & 0.4545 & 0.1818\end{bmatrix}$$

即
$$\begin{cases}\pi_1=0.2000\pi_1+0.5385\pi_2+0.3636\pi_3\\ \pi_2=0.4667\pi_1+0.1538\pi_2+0.4545\pi_3\\ \pi_3=0.3333\pi_1+0.3077\pi_2+0.1818\pi_3\end{cases}$$

求解该方程组得： π_1 ＝**0.3653**， π_2 ＝**0.3525**， π_3 ＝**0.2799**。

这说明，该地区农业收成的变化过程，在无穷多次状态转移后，“丰收”和“平收”状态出现的概率都将大于“欠收”状态出现的概率。

例 3、列和为 1 的马尔可夫矩阵的性质：例如 $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.01 & 0.3\\ 0.2 & 0.99 & 0.3\\ 0.7 & 0 & 0.4\end{bmatrix}$,

$A-I=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.01 & 0.3\\ 0.2 & -0.01 & 0.3\\ 0.7 & 0 & -0.6\end{bmatrix}$ 是奇异的，于是 $\lambda=1$ 是特征向量，

A 的它两个特征向量：$|\lambda|<1$

于是当 $u_{k+1}=Au_k$ 时 $u_n=A^n u_0=c_1\lambda_1\xi_1+c_2\lambda_2\xi_2+c_3\lambda_3\xi_3\to c_1\lambda_1\xi_1=c_1\xi_1$

易知 $(1,1,1)A=(1,1,1)$,于是 $A^T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，可见 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 A^T 的属于特征值 1 的特征向量，

易知 A 的特征值是一样的

A属于1的特征向量是什么呢？由于 $\begin{bmatrix}-0.9 & 0.01 & 0.3\\0.2 & -0.01 & 0.3\\0.7 & 0 & -0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\33\\0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，于是 $\xi_1=\begin{bmatrix}0.6\\33\\0.7\end{bmatrix}$

例 4、从麻省到加州的人口变动情况是

A属于1的特征向量是什么呢？由于 $\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_{k+1}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_k$，

原始 $\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_0=\begin{bmatrix}0\\1000\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_n=c_1\lambda_1{}^n\xi_1+c_2\lambda_2{}^n\xi_2=c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+0.7^n c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_0=c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000\\0\end{bmatrix},c_1=\frac{1000}{3},c_2=\frac{2000}{3}$$

$$\begin{bmatrix}u_{麻省}\\u_{加州}\end{bmatrix}_n=\frac{1000}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\frac{2000}{3}\times 0.7^n\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\to\frac{1000}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

第五章、对称矩阵与二次型

第一节、对称矩阵

1、对称矩阵：若 $A^T=A$，则称 A 是对称矩阵

2、设 A 是的 n 阶实对称矩阵，则 A 有 n 个实特征根(包括重根)

分析：证出在复数范围内 A 的 n 个特征根 λ_i 全是实数，只要证 λ_i 的共轭复数与 λ_i 相等，

即证 $\overline{\lambda_i}=\lambda_i$

证明：设 $A\xi=\lambda\xi$，

在 $A\xi=\lambda\xi$ 两边取共轭得 $A\overline{\xi}=\overline{\lambda}\overline{\xi}$

在 $A\overline{\xi}=\overline{\lambda}\overline{\xi}$ 两边取转置得 $\overline{\xi}^T A=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T$

在$\overline{\xi}^T A=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T$两边右乘$\xi$得$\overline{\xi}^T A\xi=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T\xi$

把$A\xi=\lambda\xi$代入$\overline{\xi}^T A\xi=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T\xi$得$\lambda\overline{\xi}^T\xi=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T\xi$

由特征向量非零得内积 $\overline{\xi}^T\xi\neq 0$，于是$\lambda=\overline{\lambda}$, $\lambda\in R$

3、设 A 是对称实对称矩阵，则 A 的属于不同特征值的特征向量必正交

证明：设ξ与η分别是属于不同特征值λ与μ的特征向量，则$A\xi=\lambda\xi, A\eta=\lambda\eta$于是

$$(A\xi)^T\eta=(\lambda\xi)^T\eta=\lambda(\xi^T\eta)$$
$$(A\xi)^T\eta=(\xi^T A^T)\eta=\xi^T(A\eta)=\xi^T(\mu\eta)=\mu(\xi^T\eta)$$

于是$\lambda(\xi^T\eta)=\mu(\xi^T\eta)$，$(\lambda-\mu)(\xi^T\eta)=0$

因为$\lambda\neq\mu$，于是$\xi^T\eta=0$，$\xi\perp\eta$

4、对称矩阵的正交分解

例、把$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$化为对角矩阵

解：由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\lambda-1&\lambda-1&1-\lambda^2\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&0&\lambda-1&\lambda-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&1&-1-\lambda\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}==-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}0&1&-2-\lambda\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0$$

得A的特征值为$1,-3$

属于特征值为1的独立的特征向量有三个，它们是方程

$x_1-x_2\ \ -x_3+x_4=0$的解

求得基础解系是$\begin{cases}\alpha_1=(1,1,0,0)\\\alpha_2=(1,0,1,0)\\\alpha_3=(-1,0,0,1)\end{cases}$

把它正交化$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{\alpha_2\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)\\ \beta_2=\alpha_3-\dfrac{\alpha_3\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1-\dfrac{\alpha_3\cdot\beta_2}{\beta_2\cdot\beta_2}\beta_2=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1)\end{cases}$

把它单位化，得$\begin{cases}\xi_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,0)\\ \xi_2=(\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},0)\\ \xi_3=(-\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{3}{\sqrt{12}})\end{cases}$

属于特征值为-3的独立的特征向量有1个, 它们是方程组的

$\begin{cases}-3x_1-x_2\ \ -x_3+x_4=0\\ -x_1-3x_2+x_3-x_4=0\\ -x_1+x_2\ -3x_3-x_4=0\end{cases}$ 求得基础解系是$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,-1,1)$

把它单位化，得$\xi_4=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

这样得到一组标准正交基ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4，

记$Q=\left[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{12}} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{12}} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{12}} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & \dfrac{3}{\sqrt{12}} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$,则$Q^{-1}=Q^T$

又$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{bmatrix}$,于是$A=Q^T\Lambda Q$ ，由于Q是正交矩阵，于是此分解叫做正交分解

第二节、二次型

1、二次型的矩阵表示

例1、$f(x,y)=x^2+y^2=(x,y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

例 2、$f(x,y)=2x^2+3y^2=(x,y)\begin{pmatrix}2x\\3y\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

例 3、$f(x,y)=2x^2+10xy+3y^2=(x,y)\begin{pmatrix}2x+5y\\5y+3y\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}2&5\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

一般地 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=(x,y)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

例 5、$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}2x\\3y\\4z\end{pmatrix}=(x,y,z)\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

例6、$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2+2bxy+2cyz+2dzx$

$$=(x,y,z)\begin{pmatrix}2x+by+dz\\bx+3y+cz\\dz+cy+4z\end{pmatrix}=(x,y,z)\begin{pmatrix}2&b&d\\b&3&c\\d&c&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

类似地可以把 n 元 2 次齐次函数(也叫二次型)用矩阵的乘法表示。当中的 n 阶矩阵是对称矩阵，叫做二次型的矩阵

2、二次型的变换

例 1、把 $f(x,y)=2x^2+12xy+20y^2$ 化成只有平方项

解 1：$f(x,y)=2x^2+12xy+20y^2=2(x^2+6xy+9y^2)+2y^2=2(x+3y)^2+2y^2$

令 $\begin{cases}x_1=x+3y\\y_1=y\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 化为 $f_1(x_1,y_1)=2{x_1}^2+2{y_1}^2$

解 2：这个过程也可如下实现、$f(x,y)=(x,y)\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

它的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&6\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$，设 $C=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$,则

于是 $f(x,y)=(x,y)C^TAC\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,则 $(x_1,x_2)=(x,y)C^T$

得 $f(x,y)$ 化为 $f_1(x_1,y_1)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2{x_1}^2+2{y_1}^2$

例 2、把 $f(x,y)=2x^2+2\sqrt{6}xy+y^2$ 化成只有平方项

解 1：$f(x,y)=2x^2+2\sqrt{6}xy+y^2=2(x+\frac{\sqrt{6}}{2}y)^2-2y^2$

令 $\begin{cases} x_1=x+\frac{\sqrt{6}}{2}y \\ y_1=y \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 化为 $f_1(x_1,y_1)=2{x_1}^2-2{y_1}^2$

解 2：　$f(x,y)=(x,y)\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

它的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，设 $C=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

则作变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则 $(x_1,x_2)=(x,x)C^T$

得 $f(x,y)$ 化为 $f_1(x_1,y_1)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=2{x_1}^2-2{y_1}^2$

解 3：先求 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$ 的特征向量，由 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=-1$

当 $\lambda_1=4$ 时，得特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$，当 $\lambda_2=-1$ 时，得特征向量 $\xi_2=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

于是 $\xi_1=\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 与 $\xi_2=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ 垂直，单位化后 $\eta_1=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

则 $A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

作变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,则

$f(x,y)$化为$f_1(x_1,y_1) = (x_1,x_2)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^{\ 2} - y_1^{\ 2}$

解法 3 用的单位正交变换把$f(x,y)$化为对角型，这是最好的一个做法

一般地，二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

由于对称矩阵 A 可正交分解，即存正交矩阵Q使$A = Q^T \Lambda Q$

于是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)Q\Lambda Q'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

做代换$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (y_1,y_2,\cdots,y_n)\Lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n$$

例如二次形

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{3}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\\x_4\end{pmatrix}$$

作代换

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&\frac{3}{\sqrt{12}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(y_1,y_2,y_3,y_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$$

由此可见二次形可通过正交变换化为只含平方项，且系数为二次型矩阵的的特征向量

第三节、正定二次型与极值

一、 正定二次型

1、正定二次型

设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若对任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，则称这个二次型及其它的矩阵是正定的。

正定二次型的判定 1：当且仅当二次形的矩阵的特征值全为正时为正定二次形

2、正定二次型的判定

例 1、$f(x,y)=2x^2+12xy+20y^2$＝$2(x^2+6xy+9y^2)+2y^2=2(x+3y)^2+2y^2$

是正定二次型。它的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{bmatrix}$ 上面的配方过程与高斯消元是一回事

$$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad 2(x+3y)^2+2y^2$$

由此可见 $f(x,y)$ 配方后平方项的系数为矩阵 A 的主元，于是矩阵 A 正定的充要条件是它的所有主元应为正数。又由于 $\det A$＝$\det\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix}$＝$2\times 2$ 为主元的乘积。于是所有主元应为正数等价于矩阵 A 的顺序子式都大于零。

$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{bmatrix}$ 的顺序主式有两个，$\det\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$＝$2>0,\det\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 2\end{bmatrix}$＝$2\times 2>0$

例 2、判定矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 是否正定

解 1：的顺序主式分别为 $\det\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$＝$2>0,\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$＝$3>0$

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=2\times\mathbf{det}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}-(-1)\times\mathbf{det}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}＝2\times 3+(-2)=4>0$$

于是 A 正定

解 2：$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 主元全正于是 A 正定

此矩阵对应的二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+3x_2{}^2+4x_3{}^2-2x_1x_2-2x_2x_3$

方程 $2x_1{}^2+3x_2{}^2+4x_3{}^2-2x_1x_2-2x_2x_3$＝$1$ 表示的图形是一个椭球

三条轴的方向为三个特征向量的方向长度为特征值

二、 二元函数极值

1、几何理解

类比上面可微二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值要找到平行于平面 xoy 的切面，于是可从 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 求驻点 $(x,y)=(x_0,y_0)$，再看切面有没有被函数 $z=f(x,y)$ 的图象穿越定出极大值点，极小值点，或鞍点。

2、代数理解

求出驻点 (x_0,y_0) 后，由 $z=f(x,y)$ 的二次近似得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k$$

$$+\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)h^2+f_{xy}(x_0,y_0)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)k^2+o(h^2+k^2)$$

$$=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)h^2+f_{xy}(x_0,y_0)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)k^2+o(h^2+k^2)$$

这里 $h=x-x_0, k=y-y_0$，由于 $o(h^2+k^2)$ 可忽略，于是

只要看 h，k 的二次函数 $\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)h^2+f_{xy}(x_0,y_0)hk+\frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)k^2$

的符号来确定极值的情况

3、二元二次齐次式的分类

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2)=a[(x+\frac{b}{2a}y)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2]$$

1° 当中括号内是实数的平方和，这时 $4ac-b^2>0$

2° 当中括号内是实数的平方差，这时 $4ac-b^2<0$

3° 当中括号内是退化为 $(x+\frac{b}{2a}y)^2$，这时 $4ac-b^2=0$

4、回到 2

可向微函数数 $f(x,y)$ 由 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 求临界点 $(x,y)=(x_0,y_0)$

设 $f_{xx}(x,y)=A, f_{xy}(x,y)=B, f_{yy}(x,y)=C$

(1)当 $4ac-b^2=AC-B^2>0$ 时，

 1° 若 $A>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点，2° 若 $A<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点

(2)当 $4ac-b^2=AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 是鞍点

(3)当 $AC-B^2=0$ 时，不能判定

例 1 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

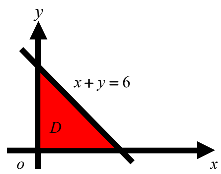
解 $f_x(x,y)=4x^3-2x-2y=0$，$f_y(x,y)=4y^3-2x-2y=0$，

得驻点（1，1），（-1，-1），（0，0）。

判断：求二阶偏导 $f_{xx}(x,y)=12x^2-2$，$f_{xy}(x,y)=-2$，$f_{yy}(x,y)=12y^2-2$，

在点（1，1）处，$A=f_{xx}(1,1)=10$，$B=f_{xy}(1,1)=-2$，$C=f_{yy}(1,1)=10$.

因 $B^2-AC<0$，且 $A>0$， 故 $f(1,1)=-2$ 为极小值. 类似可得 $f(-1,-1)=-2$ 为极小值.
在点（0，0）处，$A=B=C=-2$，$B^2-AC=0$，此时应用极值定义判断 $f(0,0)=0$ 是否为极值.
对足够小的正数ε，有 $f(\varepsilon,0)=\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)<0$，$f(\varepsilon,-\varepsilon)=2\varepsilon^4>0$
这说明在点（0，0）的任一邻域内，既有函数值大于 $f(0,0)$ 的点，又有函数值小于 $f(0,0)$ 的点，故 $f(0,0)$ 非极值.



例 2、求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解：**先求函数在 D 内的驻点，**

解方程组$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$

得区域D内唯一驻点$(2,1)$,且$f(2,1)=4$,

再求$f(x,y)$在D边界上的最值，在边界$x=0$和$y=0$上$f(x,y)=0$,

在边界$x+y=6$上，即$y=6-x$于是$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$,

由 $f_x'=4x(x-6)+2x^2=0$**,得**$x_1=0,x_2=4$(舍去 x_1)$\Rightarrow y=6-x|_{x=4}=2,\ f(4,2)=-64,$

比较后可知$f(2,1)=4$为最大值, $f(4,2)=-64$为最小值.

例 3、设一般的二元函数$f(x,y)$(不一定是二次型)

当$f_x=f_y=0$，且$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$正定时，有最小值。

第四节、奇异分解

1、定义：设 A 是一个矩阵，若存在正交矩阵V和U 使$A=U\Lambda V^T$这种分解叫奇异分解

当 A 是对称的，则对称分解$A=Q\Lambda Q^T$就是奇异分解，若 A 不是对称的前面讲过的

$A=S\Lambda S^{-1}$就不一定是奇异分解，因为 S 不一定是正交的。

2、奇异分解的U,V,Λ

设$A=U\Lambda V^T$，则$A^T=V\Lambda U^T$

$AA^T=U\Lambda V^TV\Lambda U^T=U\Lambda^2U^T$这是$AA^T$的对称分解

$A^TA=\Lambda U^TU\Lambda V^T=V\Lambda^2V^T$这是$AA^T$的对称分解

于是只要能把AA^T与AA^T做对称分解就能完成奇异分解

例 1、把$A=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$做奇异分解

解：$AA^T=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

于是$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}$

$$A^TA=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

于是$V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，综上$A=U\Lambda V^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{32} & 0\\ 0 & \sqrt{18}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

事实上$V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$是$A=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}$的行空间的单位正交向量的矩阵

$U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$是$A=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}$的列空间的单位正交向量的矩阵

例 2、把$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$做奇异分解

解：$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$的行空间由$\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}$构成单位化后$\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，零空间是$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

于是$V^T=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$的列空间由$\begin{bmatrix}4\\ 8\end{bmatrix}$构成单位化后$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，零空间是$\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

于是$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

$A^TA=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80 & 60\\ 60 & 45\end{bmatrix}$,特征值125，0

于是$A=U\Lambda V^T=U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

第六章、线性变换

第一节、线性变换及性质

一、线性变换的概念

1、变换：一个非空集合 M 到 M 的映射叫做 M 内的变换

2、设 T 是向量空间V上的变换，若对任意向量$\alpha,\beta\in V$,$k\in$数域F,都有

$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$，$T(k\alpha)=kT(\alpha)$，则称$T$为向量空间$V$中的线性变换。

二、线性变换的性质

1、$T(0)=0$，$T(-\alpha)=-T(\alpha)$

2、$T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_nT(\alpha_n)$

3、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则向量组$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots T(\alpha_n)$也线性相关。

三、线性变换的运算

1、线性变换的和：$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)$

2、线性变换的积：$(T_1T_2)(\alpha)=T_1(T_2(\alpha))$

3、数乘变换：$(\lambda T)(\alpha)=\lambda T(\alpha)$

4、线性变换T可逆时，逆变换T^{-1}　　都是线性变换。

5、线性变换的多项式：$f(\sigma)=a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0\varepsilon$

例．R是实数域，$\overline{X}=R^3=\{(a,b,c)|a,b,c\in R\}$

（1）　当a,b,c同号或至少一个为零时，令$\sigma(a,b,c)=(a,b,c)$

当a,b,c不全同号时，令$\sigma(a,b,c)=(-a,-b,-c)$

（2）设$\alpha=(a_1,a_2,a_3),\forall\xi\in V,\xi=(x_1,x_2,x_3)$，令

$\tau_\alpha(\xi)=(a_2x_3-a_3x_2,a_3x_{1_1}-a_1x_3,a_1x_2-a_2x_1)$

问σ,τ_α是V的线性变换吗？若是$\overline{V}$的线性变换，求出它在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵，这里

$\varepsilon_1=(1,0,0)$,$\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$是$R^3$的标准基。

解：（1）是变换，但不是线性变换，如令$\alpha=(-1,-2,-3),\beta=(-1,-2,1)$有

$$\sigma(\alpha)=\sigma(-1,-2,-3)=(-1,2,-3),\sigma(\beta)=(1,2,-1)，$$

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(-2,-4,-2) = (-2,-4,-2),$$

$$\sigma(\alpha)+\sigma(\beta) = (0,0,-4)。$$

（2） 变换，是线性变换，在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵是$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

第二节 线性变换的矩阵

一、设σ是 V 的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是 V 的一个基，且

$$\sigma(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n$$

$$\alpha(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\sigma(\varepsilon_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots a_{nn}\varepsilon_n$$

记$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots\sigma(\varepsilon_n))$

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \qquad (*)$$

其中$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$叫线性变换$\sigma$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵。

例 1、线性空间 R^2 上的线性变换$\boldsymbol{\rho}$: $\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = x-2y \end{cases}$

(1)求$\boldsymbol{\rho}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$下的矩阵

(2)求$\boldsymbol{\rho}$在基$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$下的矩阵

解：（1）因$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，故

$\rho(\varepsilon_1)=\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\varepsilon_1+\varepsilon_2,\rho(\varepsilon_1)$的坐标$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$\rho(\varepsilon_2)=\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=3\varepsilon_1-2\varepsilon_2,\rho(\varepsilon_2)$的坐标$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

于是$\begin{bmatrix}\rho(\varepsilon_1)&\rho(\varepsilon_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}$

因此，ρ在基ε_1，ε_2下的矩阵是$\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}$，（注：这个矩阵是变换的自然矩阵）

(2)

$\rho(\xi_1)=\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=5\xi_1+6\xi_2,\rho(\xi_1)$的坐标$\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

$\rho(\xi_2)=\begin{bmatrix}2&3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=-3\xi_1-5\xi_2,\rho(\xi_2)$的坐标$\begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix}$

于是$\begin{bmatrix}\rho(\varepsilon_1)&\rho(\varepsilon_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-3\\6&-5\end{bmatrix}$

因此，ρ在基ξ_1，ξ_2下的矩阵是$\begin{bmatrix}5&-3\\6&-5\end{bmatrix}$

注：同一个变换在不同的基下的矩阵不同，变换ρ在基ξ_1，ξ_2下的矩阵是由

$\rho(\xi_1)$的坐标$\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$与$\rho(\xi_2)$的坐标$\begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix}$合并而成

例 2、线性空间$\{f(x)\mid f(x)=ax^2+bx+c,a,b,c\in R\}$上的线性变换是求导数，

求这这个变换在基$1,x,x^2$下的矩阵

解：因

$$\begin{aligned}1'&=0=0\times1+0x+0x^2\\x'&=1=1\times1+0x+0x^2\\(x^2)'&=2x=0\times1+2x+0x^2\end{aligned}\qquad\text{故所求的矩阵是}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$$

二、线性变换在不同的基下的矩阵的关系

1、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是数域$P$上$n$维线性空间 V 的两组基

线性变换ρ在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为 A, 在$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵为 B

若$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T$,则

$$\begin{aligned}&(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B=\rho(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\rho(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AT=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)T^{-1}AT\end{aligned}$$

于是$B=T^{-1}AT$

2、矩阵的相似

对数域P上的两个矩阵 A,B，若存在可逆矩阵 T 使得$B=T^{-1}AT$，则称矩阵 A 与 B 相似

3、同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的，反之亦然

例 3.、线性变换σ在基e_1,e_2,e_3,e_4下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$，求这个线性变换在以下基下的矩阵

（1）e_1,e_3,e_2,e_4；

（2）$e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$。

解：（1）由题设得 $\sigma(e_1)=e_1+3e_2+2e_3+e_4$

$$\sigma(e_2)=2e_1+5e_3+2e_4$$

$$\sigma(e_3)=-e_2+3e_3+e_4$$

$$\sigma(e_4)=e_1+2e_2+e_3+3e_4$$

即$\begin{cases}\sigma(e_1)=e_1+2e_3+3e_2+e_4\\ \sigma(e_3)=3e_3-e_2+e_4\\ \sigma(e_2)=2e_1+5e_3+2e_4\\ \sigma(e_4)=e_1+e_3+2e_2+3e_4\end{cases}$

$\therefore$ σ在基e_1,e_3,e_2,e_4的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$

（2） 解法一：$\sigma(e_1)=x_1e_1+x_2(e_1+e_2)+x_3(e_1+e_2+e_3)+x_4(e_1+e_2+e_3+e_4)$

即$e_1+3e_2+2e_3+e_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)e_1+(x_2+x_3+x_4)e_2+(x_3+x_4)e_3+x_4e_4$

于是得 $x_1=-2,x_2=1,x_3=1,x_4=1$

$\therefore\sigma(e_1)=-2e_1+(e_1+e_2)+(e_1+e_2+e_3)+(e_1+e_2+e_3+e_4)$

同理可以求得 $\sigma(e_1+e_2)=-4(e_1+e_2)+4(e_1+e_2+e_3)+3(e_1+e_2+e_3+e_4)$

$$\sigma(e_1+e_2+e_3)=e_1-8(e_1+e_2)+6(e_1+e_2+e_3)+4(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$$\sigma(e_1+e_2+e_3+e_4)=-7(e_1+e_2)+4(e_1+e_2+e_3)+7(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$\therefore$ σ 在基 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$

解法二：设 σ 在基 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 之下的矩阵为 B，则 $B=P^{-1}AP$,其中 P 是由基 e_1,e_2,e_3,e_4 到基 $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$ 的过渡矩阵，A 是 σ 在基 e_1,e_2,e_3,e_4 的矩阵，即 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

则 $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$

第三节 其它

一、线性变换的值域与核及其求法

$\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)|\alpha\in V\}$ 值域记为，$I_m(\sigma)$

$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha|\sigma(\alpha)=0,\alpha\in\overline{V}\}$,记为 $\ker(\sigma)$

1）$\sigma(V),\sigma^{-1}(0)$ 都是 $\overline{V}$ 的子空间

2）设 V 是 P 上的线性空间，则 $\dim I_m(\sigma)+\dim\ker(\sigma)=n$

例 4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是数域 P 上四维线性空间 V 的一个基，已知线性变换 σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，求 σ 的值域与核。

解：由核的定义，得方程组$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ x_1+2x_2+5x_3+5x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$，解之得

$$\alpha_1=(-2,-\frac{3}{2},1,0),\alpha_2=(-1,-2,0,1)$$

$\therefore \sigma^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2)$

又$\begin{cases} \sigma\varepsilon_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2_4 \\ \sigma\varepsilon_2=2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-3\varepsilon_4 \\ \sigma\varepsilon_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\varepsilon_4 \\ \sigma\varepsilon_4=\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3-2\varepsilon_4 \end{cases}$

$\therefore \sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\sigma\varepsilon_3,\sigma\varepsilon_4$的秩为$2$，且$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2$线性无关

$$\sigma V=L(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\sigma\varepsilon_3,\sigma\varepsilon_4)=L(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2)$$

二、特征向量的性质

2） $A=(a_{ij})_{m\times n}$的全部特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$；

3） λ是可逆矩阵A的特征值，x是对应的特征向量，则$\lambda\neq 0$且$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的一个特征值；

4） λ是A的一个特征值，则λ^m是A^m的一个特征值；

5） 属于不同特征值的 特征向量线性无关。

例 5.设σ是R上线性空间R^3的线性变换,

$\forall\alpha=(x,y,z)\in R^3,\sigma(\alpha)=\sigma(x,y,z)=(2y+z,-2x+3y,-x-3y)$,求$\sigma$的特征根与特征向量.

解; 取 R^3的一个基$\varepsilon_1=(1,,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$,

$\sigma(\varepsilon_1)=(0,-2,-1)$
$\sigma(\varepsilon_2)=(2,0,-3)$ $\quad (\sigma(\varepsilon_1)\sigma(\varepsilon_2)\sigma(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,则$\sigma$在此基下的
$\sigma(\varepsilon_3)=(1,3,0)$

矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 2 & \lambda & -3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+14\lambda=\lambda(\lambda^2+14)$

$\therefore \lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}i,\lambda_3=-\sqrt{14}i$,它们是$A$的特征根,$\sigma$在$R$内的特征根为$\lambda=0$.

对于 $\lambda=0$,求齐次线性方程组 $(0E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ 的一个基础解系为 $(3,-1,2)$,于是 A 的属于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $\{k(3,-1,2)|k\in R,k\neq 0\}$,而 σ 的属于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $\{3k\varepsilon_1-k\varepsilon_2+2k\varepsilon_3|k\in R且\neq 0\}$.

例 6、.求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&n+1\\&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\n&n+1&n+2&\cdots&2n-2&2n-1\end{pmatrix}$ 的特征多项式 $(n\geq 2)$

分析，关键是求 S_k 。

解：从 $|A|$ 的最后一列开始，逐列减去相邻的前一列，得 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&1&1&\cdots&1\\3&1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$，容易看出

A 的秩$=2$，所以当 $k\geq 3$ 时，$S_k=0$，因此特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n-S_1\lambda^{n-1}+S_2\lambda^{n-1}$，

$S_1=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ ，再计算 S_2，取 A 的第 k 行，第 $k+i$ 行，第 k 列，第 $k+i$ 列，得二阶主子式

$$\begin{vmatrix}2k-1&2k-1+i\\2k-1+i&2k-1+2i\end{vmatrix}=-i^2,(k=1,2,\cdots,n-1;i=1,2,\cdots,n-k)$$

于是

$$S_2=-(\sum_{i=1}^{n-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-2}i^2+\cdots+1)=\frac{1}{6}[(n-1)n(2n-1)+(n-2)(n-1)(2n-3)+\cdots+1•2•3]=-\frac{1}{6}•\frac{n^2(n-1)(n+1)}{2}$$

所以特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n-n^2\lambda^{n-1}-\frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}\lambda^{n-2}$$

五、设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换按公式 $(*)$ 对应一个 $n\times n$ 矩阵，这个对应具有以下性质：

1、线性变换的和对应与矩阵的和；
2、线性变换的积对应与矩阵的积；

3、线性变换的数量乘积对应与矩阵的数量乘积；
4、可逆的线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应与逆矩阵。
例 7.设V是n维线性空间,证明: V中任意线性变换必可表为一个可逆线性变换与一个幂等变换(σ是幂等变换,即σ满足$\sigma^2=\sigma$)的乘积.

证 取V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,设$\sigma$是$\overline{V}$的任意线性变换,且

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A \qquad ①$$

其中A为n阶矩阵.

设秩$A=r$,那么存在可逆矩阵P,Q,使$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$

$$\therefore A=(PQ)\left(Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q\right)=BC \quad 其中 B=PQ \quad C=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

$$C^2=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=C$$ 即C为幂等矩阵

再作V的两个线性变换如下

$$\tau_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_3)B \qquad ②$$

$$\tau_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C \qquad ③$$

则 $(\tau_1\tau_2)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)BC \qquad ④$

又①②③④ $\therefore \sigma=\tau_1\tau_2$ 其中τ_1为可逆变换，$\tau_2^2=\tau_2$($\because C^2=C$)

四、不变子空间

1、定义：令 V 是数域 F 上一个向量空间, σ 是 V 的一个线性变换.如果$\sigma(W)\subseteq W$.，那么 W 就叫做 σ 的一个不变子空间

2、性质：**设 V 是数域 F 上一个 n 维向量空间，σ 是 V 的一个线性变换。假设σ有一个非平凡不变子空间 W，那么取 W 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 再补充成 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,a_n$. 由于 W 在 σ 之下不变，所以 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 仍在 W 内，因而可以由 W 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。我们有：**

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{r1}\boldsymbol{\alpha}_r,$
……………………………………………
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_r)=a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2r}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r,$
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_{r+1})=a_{1,r+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{r,r+1}\boldsymbol{\alpha}_r+a_{r+1,r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+a_{n,r+1}\boldsymbol{\alpha}_n,$
……………………………………………
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{rn}\boldsymbol{\alpha}_r+a_{r+1,n}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.$

因此，σ 关于这个基的矩阵有形状 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ o & A_2 \end{pmatrix}$,

这里 $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}\,|\,w$ 关于 **W** 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 而 **A** 中左下方的 **O** 表示一个 $(n-r)\times r$ 零矩阵由此可见，如果线性变换 σ 有一个非平凡不变子空间，那么适当选取 **V** 的基，可以使与 σ 对应的矩阵中有一些元素是零。特别，如果 **V** 可以写成两个非平凡子空间的 W_1 与 W_2 直和：$V=W_1\oplus W_2$，那么选取 W_1 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 W_2 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,a_n$. 凑成 **V** 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 当 W_1 与 W_2 都在 σ 之下不变时，容易看出，σ 关于这样选取的基的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} A_1 & o \\ o & A_2 \end{pmatrix}$, 这里 A_1 是一个 **r** 阶矩阵,它是 $\boldsymbol{\sigma}\,|\,w_1$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的矩阵，而 A_2 是 **n–r** 阶矩阵，它是 $\boldsymbol{\sigma}\,|\,w_2$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,a_n$ 的矩阵。

一般地，如果向量空间 V 可以写成 s 个子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_S$ 的直和，并且每一子空间都在线性变换 σ 之下不变，那么在每一子空间中取一个基，凑成 V 的一个基，σ 关于这个基的矩阵就有形状

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & A_s \end{pmatrix}$$ 这里 A_i 是 $\boldsymbol{\sigma}\,|\,W_i$ 关于所取的 W_i 的基的矩阵.

例 8、设 σ 是实数域 R 上 n 维线性空间 $\overline{V}$ 的线性变换，$\lambda\in R$ 试证 $\overline{V}$ 的子集 $\overline{W}=\{\alpha\in\overline{V}\,|\,(\sigma-\lambda)^n\alpha=0\}$ 是 σ 的不变子空间。

证：先证 $\overline{W}$ 是的 $\overline{V}$ 子空间，$\forall\alpha,\beta,\in\overline{W},k\in R$，因为

$(\sigma-\lambda)^n(\alpha+\beta)=(\sigma-\lambda)^n\alpha+(\sigma-\lambda)^n\beta$，所以$\alpha+\beta\in\overline{W}$。

$(\sigma-\lambda)^n(k\alpha)=k((\sigma-\lambda)^n\alpha)=0$，所以$k\alpha\in\overline{W},\overline{W}$是$\overline{V}$的子空间。

又对于$\alpha\in\overline{W}(\sigma-\lambda)^n(\sigma\alpha)=\sigma(\sigma-x)^n(\alpha)=\sigma(0)=0 \quad \therefore\sigma(\alpha)\in\overline{W}$

$\overline{W}$是$\overline{V}$的不变子空间。

例 9、.设$f(x)$是树域P上的二次多项式，在P内有互异的根x_1,x_2，σ是数域P上线性空间$\overline{V}$的线性变换，$\sigma\neq x_i(i=1,2)$且$f(\sigma)=0$，证明x_1,x_2是σ的特征根，而 $\overline{V}$可分解为σ的属于x_1,x_2的特征子空间的直和。

证：设$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2),(a\neq0,a\in P)$，则$f(\sigma)=a(\sigma-x)(\sigma-x_2)=0$，因$\sigma\neq x_2\ \therefore\sigma-x_2\neq0$，存在$\alpha\in\overline{V},\alpha\neq0$，使$(\sigma-x_2)(\alpha)\neq0$，令$\beta=(\sigma-x_2)(\alpha)$，则$(\sigma-x_1)\beta=(\sigma-x_1)(\sigma-x_2)(\alpha)=0(\alpha)=0$，所以$\sigma\beta=x_1\beta,x_1$是$\sigma$的特征根。同理可证$x_2$也是$\sigma$的特征根。

其次，存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使$(x-x_1)u(x0+(x-x_2)v(x)=1$

$\therefore(\sigma-x_1)u(\sigma)+(\sigma-x_2)v(x)=l \qquad \forall\alpha\in\overline{V}$

$\alpha=l\alpha=(\sigma-x_1)u(\sigma)\beta\alpha+(\sigma-x_2)v(\sigma)\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中$\alpha_1=(\sigma-x_1)v(\sigma)\alpha$，$\alpha_2=(\sigma-x_1)u(\sigma)\alpha$，而

$(\sigma-x_1)\alpha_1=(\sigma-x_1)(\sigma-x_2)v(\sigma)\alpha=v(\sigma)[(\sigma-x_1)(\sigma-x_2)(\alpha)]=v(\sigma)(0)=0$

$\therefore\alpha_1\in\ker(\sigma-x_1)=\overline{V}_{x_1}$，同理$\alpha_2\in\ker(\sigma-x_2)=\overline{V}_{x_2}$，从而$\overline{V}=\overline{V}_{x_1}+\overline{V}_{x_2}$。

若$\beta\in\overline{V}_{x_1}\cap\overline{V}_{x_2}$，则$(\sigma-x_1)\beta=(\sigma-x_2)\beta=0 \quad \therefore\sigma\beta=x_1\beta=x_2\beta$，故$(x_1-x_2)\beta=0$，由$x_1\neq x_2$，$\therefore\beta=0$，故$\overline{V}_{x_1}\bigcap\overline{V}_{x_2}=\{0\}$，从而$\overline{V}=\overline{V}_{x_1}+\overline{V}_{x_2}$。

第七章 行列式

第一节 行列式的概念

1、$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

2、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

3、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_2\text{是} \\ 1,2\cdots,\ n\text{的排列}}} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{2j_n}$，

t是排列$j_1 j_2 \cdots j_2$每次交换两个元素变到排列$123\cdots n$的交换的次数

例 1、用定义计算$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

解： $a_{11}a_{22}a_{33} = 2$，列号排列 123 添正号，t=0, 添正号

$a_{11}a_{23}a_{32} = 2$，列号排列 132，把 32 交换得 123, t=1,添负号，

$a_{12}a_{21}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = 0$

$a_{13}a_{21}a_{32} = 4$，列号排列 312，31 交换得 132, 32 交换得 123, t=2,添正号，

$a_{13}a_{22}a_{31} = 4$，列号排列 321，32 交换得 231, 31 交换得 213, 21 交换得 123,t=3,添负号，

于是$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 0 + 0 + 4 - 4 = 0$

二、行列式的性质

性质 1　行列式的所有的行与对应的列互换，行列式的值不变,即 $D^T = D$

性质 2　行列式的任意两行(列)互换，行列式仅改变符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 4　行列式中某一行(列)各元素的公因子可以提到
行列式符号外面

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1　行列式某一行(列)各元素均为零，行列式为零.

性质 5 把行列式某一行(列)的各元素同乘以 k 后加到另一行对应元素上，行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{r_2+kr_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用行列式的性质，计算行列式的值

例 1、$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

三、行列式按行(列)展开

1、余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去，余下的 n-1 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式．记为 M_{ij} ，$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式 记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad a_{32} \text{ 代数余子式为 } A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2、按行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

按列展开也类似

例 3、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

解 注意到第一行有两个 0，按第一行展开，得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

四、用递推法计算行列式

例1 求行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n)} \qquad (1)$$

D_n的构造是：主对角线元全为$\alpha+\beta$；主对角线上方第一条次对角线的元全为$\alpha\beta$，下方第一条次对角线的元全为1，其余元全为0；即D_n为**三对角线型**。又右下角的（n）表示行列式为n阶。

解 把类似于D_n，但为k阶的三对角线型行列式记为D_k。

把（1）的行列式按第一列展开，有两项，一项是

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1)} = (\alpha+\beta)D_{n-1}$$

另一项是

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

上面的行列式再按第一行展开，得$\alpha\beta$乘一个$n-2$阶行列式，这个$n-2$阶行列式和原行列式D_n的构造相同，于是有递推关系：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \qquad (2)$$

移项，提取公因子β：

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

类似地：

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=\beta(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})$$

……………………

$$D_3-\alpha D_2=\beta(D_2-\alpha D_1)$$

$$\therefore\ D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})$$

$$=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$ （递推计算）

直接计算

$$D_1=\alpha+\beta$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta\\ 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$$

$$\therefore\ D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n$$

若 $\alpha=0$，便得 $D_n=\beta^n$；否则，除以 α^n 后移项：

$$\frac{D_n}{\alpha^n}=\frac{D_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

再一次用递推计算：

$$\frac{D_n}{\alpha^n}=\frac{D_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=\frac{D_{n-2}}{\alpha^{n-2}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

$$=\cdots=\frac{D_1}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3+\cdots+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

$$=1+\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

$$=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}-1}{\frac{\beta}{\alpha}-1}=\frac{1}{\alpha^n}\cdot\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

$\therefore\ D_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$， 当 $\beta\neq\alpha$ （3）

当 $\beta=\alpha$，从

$$\frac{D_n}{\alpha^n}=1+\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

$$=1+1+\cdots+1 \qquad (n+1\text{项})$$

$$=n+1$$

从而 $D_n=(n+1)\alpha^n$。

由（3）式，若 $\alpha=0$ 且 $\beta\neq\alpha$，则 $D_n=\dfrac{\beta^{n+1}}{\beta}=\beta^n$。

$$\therefore\quad D_n=\begin{cases}\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} & \text{当}\beta\neq\alpha\\(n+1)\alpha^n & \text{当}\beta=\alpha\end{cases}$$

注 递推式（2）通常称为**常系数齐次二阶线性差分方程**.

例2 计算 n 阶范德蒙行列式行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a3_3^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

解:

$$D_n\ \underline{\underline{\substack{(n-1)\times(-a_1)+n\\(n-2)\times(-a_1)+(n-1)\\\cdots\cdots\cdots}}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a_2-a_1&\cdots&a_n-a_1\\0&a_2(a_2-a_1)&\cdots&a_n(a_n-a_1)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_2^{n-3}(a_2-a_1)&\cdots&a_n^{n-3}(a_n-a_1)\\0&a_2^{n-2}(a_2-a_1)&\cdots&a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)$$
$$(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)D_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)$$
$$\cdot(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n-a_{n-1})$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\a_{n-1}&a_n\end{vmatrix}=a_n-a_{n-1}$$

即 n 阶范德蒙行列式等于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 a_i-a_j 的乘积

$$D_n=\prod_{1\le j\le i\le n}(a_i-a_j)$$

注2：$D_n = 0 \Leftrightarrow \exists i, j$ 使 $a_i = a_j$

例3：计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1} \qquad ①$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1} \qquad ②$$

①×（x＋a）　$(x+a)D_n = a(x+a)^n + (x^2 - a^2)D_{n-1}$

②×（x－a）　$(x-a)D_n = -a(x-a)^n + (x^2 - a^2)D_{n-1}$

$$D_n = \frac{a(x+a)^n + a(x-a)^n}{(x+a)-(x-a)} = \frac{1}{2}[(x+a)^n - (x-a)^n]$$

例4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} (x \neq 0)$$

分析：这个行列式的特点是除对角线外,各列元素分别相同.根据这一特点,可采用加边法.

解

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{x\neq0\quad n\times\left(\frac{1}{x}\right)+1 \\ \cdots \\ 3\times\left(\frac{1}{x}\right)+1 \\ 2\times\left(\frac{1}{x}\right)+1}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=\left[1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x}\right]x^n=x^n+x^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$