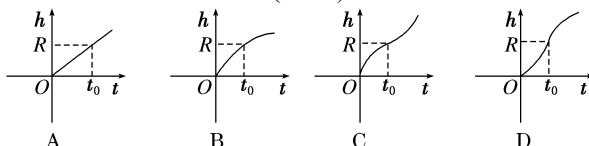


函数练习一（廖老师选题）

- 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}} + \lg(2x-1)$  的定义域是( )  
 A.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$     B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$     C.  $(\frac{2}{3}, +\infty)$     D.  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
- 函数  $y = \frac{1}{x^2+2}$  的值域为( )  
 A.  $\mathbb{R}$     B.  $\{y|y \geq \frac{1}{2}\}$     C.  $\{y|y \leq \frac{1}{2}\}$     D.  $\{y|0 < y \leq \frac{1}{2}\}$
- 函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5$  在  $[-2, +\infty)$  上递增, 在  $(-\infty, -2]$  上递减, 则  $f(1) =$  ( )  
 A.  $-7$     B.  $1$     C.  $17$     D.  $25$
- 已知等腰  $\triangle ABC$  周长为 10, 则底边长  $y$  关于腰长  $x$  的函数关系为  $y = 10 - 2x$ , 则函数的定义域为( )  
 A.  $\mathbb{R}$     B.  $\{x|x > 0\}$     C.  $\{x|0 < x < 5\}$     D.  $\{x|\frac{5}{2} < x < 5\}$
- 已知函数  $f(x) = x|x| - 2x$ , 则下列结论正确的是( )  
 A.  $f(x)$  是偶函数, 递增区间是  $(0, +\infty)$     B.  $f(x)$  是偶函数, 递减区间是  $(-\infty, 1)$   
 C.  $f(x)$  是奇函数, 递减区间是  $(-1, 1)$     D.  $f(x)$  是奇函数, 递增区间是  $(-\infty, 0)$
- 已知函数  $f(x) = |x+a| - |x-a| (a \neq 0)$ ,  $h(x) = \begin{cases} -x^2+x, & x > 0, \\ x^2+x, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(x), h(x)$  的奇偶性依次为( )  
 A. 偶函数, 奇函数    B. 奇函数, 偶函数  
 C. 偶函数, 偶函数    D. 奇函数, 奇函数
- 设  $f(x)$  是周期为 2 的奇函数, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = 2x(1-x)$ , 则  $f(-\frac{5}{2}) =$  ( )  
 A.  $-\frac{1}{2}$     B.  $-\frac{1}{4}$     C.  $\frac{1}{4}$     D.  $\frac{1}{2}$
- 现向一个半径为  $R$  的球形容器内匀速注入某种液体, 下面图形中能表示在注入过程中容器的液面高度  $h$  随时间  $t$  变化的函数关系的是( )  

- 设函数  $f(x)$  定义在实数集上,  $f(1-x) = f(1+x)$ , 且当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ , 则有( )  
 A.  $f(\frac{1}{3}) < f(2) < f(\frac{1}{2})$     B.  $f(\frac{1}{2}) < f(2) < f(\frac{1}{3})$     C.  $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3}) < f(2)$     D.  $f(2) < f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3})$
- 设偶函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 且  $f(2) = 0$ , 则不等式  $\frac{f(x)+f(-x)}{x} > 0$  的解集为( )  
 A.  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$     B.  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$     C.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$     D.  $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2, \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2, \end{cases}$  若方程  $f(x) - a = 0$  有三个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围为( )  
 A.  $(1, 3)$     B.  $(0, 3)$     C.  $(0, 2)$     D.  $(0, 1)$
- 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) > 0$ , 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有( )  
 A. 最小值  $f(a)$     B. 最大值  $f(b)$     C. 最小值  $f(b)$     D. 最大值  $f(\frac{a+b}{2})$
- 函数  $y = \sqrt{x-x}(x \geq 0)$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 已知  $f(\sqrt{x+1}) = x + 2\sqrt{x}$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_;

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x < 1, \\ x^2+ax, & x \geq 1, \end{cases}$  若  $f(f(0)) = 4a$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

16. 有以下判断:

(1)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  与  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  表示同一函数;

(2) 函数  $y = f(x)$  的图象与直线  $x = 1$  的交点最多有 1 个;

(3)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  与  $g(t) = t^2 - 2t + 1$  是同一函数;

(4) 若  $f(x) = |x-1| - |x|$ , 则  $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0$ .

其中正确判断的序号是 \_\_\_\_\_.

17. 求函数  $y = \sqrt{-x^2+x+12} + \frac{(x-1)^0}{\lg(2-x)}$  的定义域

18. 二次函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) - f(x) = 2x$ , 且  $f(0) = 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式; (2) 解不等式  $f(x) > 2x + 5$ .

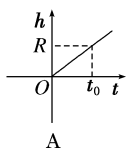
19. 已知  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+4}$  是奇函数 ①求  $a$  的值 ②证明  $f(x)$  在  $(-2, 2)$  上是减函数

20. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且它的图象关于直线  $x = 1$  对称.

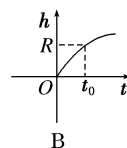
(1) 求证:  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数;

(2) 若  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $0 < x \leq 1$ ), 求  $x \in [-5, -4]$  时, 函数  $f(x)$  的解析式.

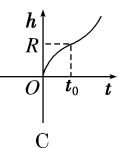
函数练习一（答案）

1. 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}} + \lg(2x-1)$  的定义域是(C)
- A.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$  B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  C.  $(\frac{2}{3}, +\infty)$  D.  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
2. 函数  $y = \frac{1}{x^2+2}$  的值域为( D ) A.  $\mathbb{R}$  B.  $\{y | y \geq \frac{1}{2}\}$  C.  $\{y | y \leq \frac{1}{2}\}$  D.  $\{y | 0 < y \leq \frac{1}{2}\}$
3. 函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5$  在  $[-2, +\infty)$  上递增, 在  $(-\infty, -2]$  上递减, 则  $f(1) = ( D )$   
A. -7 B. 1 C. 17 D. 25
4. 已知等腰  $\triangle ABC$  周长为 10, 则底边长  $y$  关于腰长  $x$  的函数关系为  $y = 10 - 2x$ , 则函数的定义域为( C ) A.  $\mathbb{R}$  B.  $\{x | x > 0\}$  C.  $\{x | 0 < x < 5\}$  D.  $\{x | \frac{5}{2} < x < 5\}$
5. 已知函数  $f(x) = x|x| - 2x$ , 则下列结论正确的是( C )  
A.  $f(x)$  是偶函数, 递增区间是  $(0, +\infty)$  B.  $f(x)$  是偶函数, 递减区间是  $(-\infty, 1)$   
C.  $f(x)$  是奇函数, 递减区间是  $(-1, 1)$  D.  $f(x)$  是奇函数, 递增区间是  $(-\infty, 0)$
6. 函数  $f(x) = |x+a| - |x-a| (a \neq 0)$ ,  $h(x) = \begin{cases} -x^2+x, & x > 0, \\ x^2+x, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(x), h(x)$  的奇偶性依次为( D )  
A. 偶函数, 奇函数 B. 奇函数, 偶函数 C. 偶函数, 偶函数 D. 奇函数, 奇函数
7. 设  $f(x)$  是周期为 2 的奇函数, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = 2x(1-x)$ , 则  $f(-\frac{5}{2}) = ( A )$   
A.  $-\frac{1}{2}$  B.  $-\frac{1}{4}$  C.  $\frac{1}{4}$  D.  $\frac{1}{2}$
8. 现向一个半径为  $R$  的球形容器内匀速注入某种液体, 下面图形中能表示在注入过程中容器的液面高度  $h$  随时间  $t$  变化的函数关系的是( C )
- 

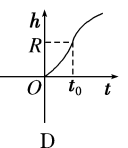
A



B



C



D
9. 设函数  $f(x)$  定义在实数集上,  $f(1-x) = f(1+x)$ , 且当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ , 则有( C )  
A.  $f(\frac{1}{3}) < f(2) < f(\frac{1}{2})$  B.  $f(\frac{1}{2}) < f(2) < f(\frac{1}{3})$  C.  $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3}) < f(2)$  D.  $f(2) < f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3})$
10. 设偶函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 且  $f(2) = 0$ , 则不等式  $\frac{f(x)+f(-x)}{x} > 0$  的解集为( B )  
A.  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$  B.  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$  C.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  D.  $(-2, 0) \cup (0, 2)$
11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2, \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2, \end{cases}$  若方程  $f(x) - a = 0$  有三个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围为( D ) A.  $(1, 3)$  B.  $(0, 3)$  C.  $(0, 2)$  D.  $(0, 1)$

12. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y)=f(x)+f(y)$ , 当  $x<0$  时,  $f(x)>0$ , 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有 ( C ) A. 最小值  $f(a)$  B. 最大值  $f(b)$  C. 最小值  $f(b)$  D. 最大值  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

13. 函数  $y=\sqrt{x-x}(x\geq 0)$  的最大值为  $\frac{1}{4}$ .

14. 已知  $f(\sqrt{x+1})=x+2\sqrt{x}$ , 则  $f(x) = \underline{f(x)=x^2-1(x\geq 1)}$ ;

15. 已知函数  $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x<1, \\ x^2+ax, & x\geq 1, \end{cases}$  若  $f(f(0))=4a$ , 则实数  $a = \underline{2}$ .

16. 有以下判断: (1)  $f(x)=\frac{|x|}{x}$  与  $g(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$  表示同一函数;

(2) 函数  $y=f(x)$  的图象与直线  $x=1$  的交点最多有 1 个;

(3)  $f(x)=x^2-2x+1$  与  $g(t)=t^2-2t+1$  是同一函数; (4) 若  $f(x)=|x-1|-|x|$ , 则  $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=0$ .

其中正确判断的序号是 (2) (3).

17. 求函数  $y=\sqrt{-x^2+x+12}+\frac{(x-1)^0}{\lg(2-x)}$  的

答案: 定义域  $\{x|-3\leq x<1, \text{ 或 } 1<x<2\}$ .

18. 二次函数  $f(x)$  满足  $f(x+1)-f(x)=2x$ , 且  $f(0)=1$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式; (2) 解不等式  $f(x)>2x+5$ .

解: (1) 设二次函数  $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ .

$\because f(0)=1, \therefore c=1. f(x)=ax^2+bx+1$ , 代入  $f(x+1)-f(x)=2x$ , 有

$a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x \quad \therefore 2ax+a+b=2x$ .

$\therefore a=1, b=-1. \therefore f(x)=x^2-x+1$ .

(2) 由  $x^2-x+1>2x+5$ , 即  $x^2-3x-4>0$ ,

解得  $x>4$  或  $x<-1$ . 故原不等式解集为  $\{x|x>4, \text{ 或 } x<-1\}$ .

19. 已知  $f(x)=\frac{x+a}{x^2+4}$  是奇函数 (1) 求  $a$  的值 (2) 证明  $f(x)$  在  $(-2, 2)$  上是增函数

解 (1)  $a=0$  (2) 证明略

20. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且它的图象关于直线  $x=1$  对称.

(1) 求证:  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数;

(2) 若  $f(x)=\sqrt{x}(0\leq x\leq 1)$ , 求  $x\in[-5, -4]$  时, 函数  $f(x)$  的解析式.

解: (1) 证明:  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 得  $f(x+1)=f(1-x)$ ,

$f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 故有  $f(-x)=-f(x)$ .

于是  $f(x+4)=f[1+(x+3)]=f[1-(x+3)]=f(-x-2)=-f(x+2)=-f[1-(x+1)]$

$=-f(-x)=f(x)$ , 故  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数.

(2)由函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 有  $f(0) = 0$ .  $f(x) = \sqrt{x} (0 < x \leq 1)$ , 对  $x=0$  也成立于是  $f(x) = \sqrt{x} (0 \leq x \leq 1)$ , 设  $x \in [-5, -4]$ , 则  $x+4 \in [-1, 0]$ ,  $-(x+4) \in [0, 1]$  于是  $f[-(x+4)] = \sqrt{-(x+4)}$  于是  $f(x) = f(x+4) = -f[-(x+4)] = -\sqrt{-x-4}$

综上, 当  $x \in [-5, -4]$ ,  $f(x) = -\sqrt{-x-4}$

函数练习一 (廖老师选题)

1. 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}} + \lg(2x-1)$  的定义域是 ( C )

- A.  $[\frac{2}{3}, +\infty)$       B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$       C.  $(\frac{2}{3}, +\infty)$       D.  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

解析: 选 C 由  $\begin{cases} 3x-2 > 0, \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$  得  $x > \frac{2}{3}$ .

2. 函数  $y = \frac{1}{x^2+2}$  的值域为 ( )

- A.  $\mathbb{R}$       B.  $\{y | y \geq \frac{1}{2}\}$       C.  $\{y | y \leq \frac{1}{2}\}$       D.  $\{y | 0 < y \leq \frac{1}{2}\}$

解析: 选 D  $\because x^2+2 \geq 2, \therefore 0 < \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \therefore 0 < y \leq \frac{1}{2}$ .

3. 函数  $f(x) = 4x^2 - mx + 5$  在  $[-2, +\infty)$  上递增, 在  $(-\infty, -2]$  上递减, 则  $f(1) = ( )$

- A. -7      B. 1      C. 17      D. 25

解析: 选 D 依题意, 知函数图象的对称轴为  $x = -\frac{-m}{8} = \frac{m}{8} = -2$ , 即  $m = -16$ , 从而  $f(x) = 4x^2 + 16x + 5, f(1) = 4 + 16 + 5 = 25$ .

4. 已知等腰  $\triangle ABC$  周长为 10, 则底边长  $y$  关于腰长  $x$  的函数关系为  $y = 10 - 2x$ , 则函数的定义域为 ( )

- A.  $\mathbb{R}$       B.  $\{x | x > 0\}$       C.  $\{x | 0 < x < 5\}$       D.  $\{x | \frac{5}{2} < x < 5\}$

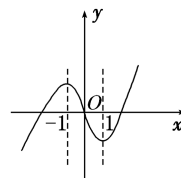
解析: 选 C 由题意知  $\begin{cases} x > 0, \\ 10 - 2x > 0, \end{cases}$  即  $0 < x < 5$ .

5. (2012·北京海淀区期末) 已知函数  $f(x) = x|x| - 2x$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  是偶函数, 递增区间是  $(0, +\infty)$       B.  $f(x)$  是偶函数, 递减区间是  $(-\infty, 1)$   
C.  $f(x)$  是奇函数, 递减区间是  $(-1, 1)$       D.  $f(x)$  是奇函数, 递增区间是  $(-\infty, 0)$

解析: 选 C 将函数  $f(x) = x|x| - 2x$  去掉绝对值得  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x, & x < 0, \end{cases}$  画出函数  $f(x)$

的图象, 如图, 观察图象可知, 函数  $f(x)$  的图象关于原点对称, 故函数  $f(x)$  为奇函数, 且在  $(-1, 1)$  上单调递减.



6、已知函数  $f(x)=|x+a|-|x-a|(a \neq 0)$ ,  $h(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x>0, \\ x^2+x, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(x)$ ,  $h(x)$  的奇偶性

依次为( )

- A. 偶函数, 奇函数                      B. 奇函数, 偶函数  
C. 偶函数, 偶函数                      D. 奇函数, 奇函数

解析: 选 D  $f(-x) = |-x+a| - |-x-a| = |x-a| - |x+a| = -f(x)$ , 故  $f(x)$  为奇函数.

画出  $h(x)$  的图象可观察到它关于原点对称或当  $x>0$  时,  $-x<0$ , 则  $h(-x) = x^2 - x = -(x^2 + x) = -h(x)$ , 当  $x<0$  时  $-x>0$ , 则  $h(-x) = -x^2 - x = -(x^2 + x) = -h(x)$ .

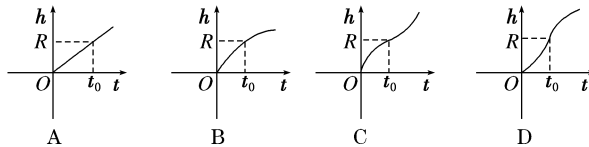
$x=0$  时,  $h(0)=0$ , 故  $h(x)$  为奇函数.

7、设  $f(x)$  是周期为 2 的奇函数, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = 2x(1-x)$ , 则  $f\left(-\frac{5}{2}\right) = ( )$

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{2}$

解析: 选 A 由题意得  $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}-2\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[2 \times \frac{1}{2} \times \left(1-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}$ .

8、现向一个半径为  $R$  的球形容器内匀速注入某种液体, 下面图形中能表示在注入过程中容器的液面高度  $h$  随时间  $t$  变化的函数关系的是( )



解析: 选 C 从球的形状可知, 水的高度开始时增加的速度越来越慢, 当超过半球时, 增加的速度又越来越快.

9. 设函数  $f(x)$  定义在实数集上,  $f(1-x) = f(1+x)$ , 且当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ , 则有( )

- A.  $f\left(\frac{1}{3}\right) < f(2) < f\left(\frac{1}{2}\right)$                       B.  $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(2) < f\left(\frac{1}{3}\right)$   
C.  $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f(2)$                       D.  $f(2) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

10、设偶函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 且  $f(2) = 0$ , 则不等式  $\frac{f(x)+f(-x)}{x} > 0$  的解集为( )

- A.  $(-2,0) \cup (2, +\infty)$     B.  $(-\infty, -2) \cup (0,2)$     C.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$     D.  $(-2,0) \cup (0,2)$

解:  $f(x)$  为偶函数,  $\therefore \frac{f(x)+f(-x)}{x} = \frac{2f(x)}{x} > 0$ .

$\therefore x f(x) > 0. \therefore \begin{cases} x > 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x < 0, \\ f(x) < 0. \end{cases}$

又  $f(-2) = f(2) = 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数,

故  $x \in (0,2)$  或  $x \in (-\infty, -2)$ . [答案] B

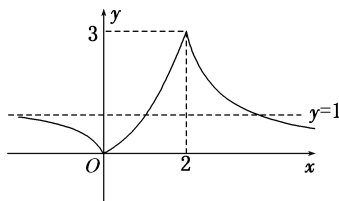
11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2, \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2, \end{cases}$  若方程  $f(x) - a = 0$  有三个不同的实数根, 则实数  $a$  的

取值范围为( )

- A. (1,3) B. (0,3) C. (0,2) D. (0,1)

解析: 选 D 因为方程  $f(x) - a = 0$  的根, 即是直线  $x = a$  与函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2, \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$

的图象交点的横坐标, 画出函数图象进行观察可以得知,  $a$  的取值范围是(0,1).



12. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) > 0$ , 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有( )

- A. 最小值  $f(a)$  B. 最大值  $f(b)$   
C. 最小值  $f(b)$  D. 最大值  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

解析: 选 C  $\because f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数, 且

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$\therefore f(0) = 0, \text{ 令 } y = -x, \text{ 则有 } f(x) + f(-x) = f(0) = 0.$$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ .  $\therefore f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数. 设  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $\therefore f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2)$

$$= f(x_1 - x_2) > 0.$$

$\therefore f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上是减函数.  $\therefore f(x)$  在  $[a, b]$  有最小值  $f(b)$ .

解析: 选 C 由  $f(2-x) = f(x)$  可知,  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \ln x$ , 可知当  $x \geq 1$  时  $f(x)$  为增函数, 所以当  $x < 1$  时  $f(x)$  为减函数, 因为  $\left|\frac{1}{2} - 1\right| < \left|\frac{1}{3} - 1\right| < |2 - 1|$ ,

所以  $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f(2)$ .

13. 函数  $y = \sqrt{x} - x (x \geq 0)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

$$\text{解析: } y = \sqrt{x} - x = -(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } y_{\max} = \frac{1}{4}.$$

答案:  $\frac{1}{4}$

14. 已知  $f(\sqrt{x+1})=x+2\sqrt{x}$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_;

: 设  $t=\sqrt{x+1}$ , 则  $x=(t-1)^2(t\geq 1)$ ;

代入原式有  $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-2t+1+2t-2=t^2-1$ .

故  $f(x)=x^2-1(x\geq 1)$ .

15. 已知函数  $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x<1, \\ x^2+ax, & x\geq 1, \end{cases}$  若  $f(f(0))=4a$ , 则实数  $a=$  \_\_\_\_\_.

解析:  $\because f(0)=3\times 0+2=2$ ,  $f(f(0))=f(2)=4+2a=4a$ ,

$\therefore a=2$ .

答案: 2

16. 有以下判断:

(1)  $f(x)=\frac{|x|}{x}$  与  $g(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$  表示同一函数;

(2) 函数  $y=f(x)$  的图象与直线  $x=1$  的交点最多有 1 个;

(3)  $f(x)=x^2-2x+1$  与  $g(t)=t^2-2t+1$  是同一函数;

(4) 若  $f(x)=|x-1|-|x|$ , 则  $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=0$ .

其中正确判断的序号是 \_\_\_\_\_.

[自主解答] 对于(1), 由于函数  $f(x)=\frac{|x|}{x}$  的定义域为  $\{x|x\in\mathbb{R}, \text{且 } x\neq 0\}$ , 而函数  $g(x)=$

$\begin{cases} 1, & x\geq 0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$  的定义域是  $\mathbb{R}$ , 所以二者不是同一函数; 对于(2), 若  $x=1$  不是  $y=f(x)$  定义域

的值, 则直线  $x=1$  与  $y=f(x)$  的图象没有交点, 如果  $x=1$  是  $y=f(x)$  定义域内的值, 由函数定义可知, 直线  $x=1$  与  $y=f(x)$  的图象只有一个交点, 即  $y=f(x)$  的图象与直线  $x=1$  最多有一个交点; 对于(3),  $f(x)$  与  $g(t)$  的定义域、值域和对应关系均相同, 所以  $f(x)$  和  $g(t)$  表示同一函数;

对于(4), 由于  $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}-1\right|-\left|\frac{1}{2}\right|=0$ , 所以  $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=1$ .

综上所述, 正确的判断是(2)(3).

17. 求函数  $y=\sqrt{-x^2+x+12}+\frac{(x-1)^0}{\lg(2-x)}$  的定义域

解析: 由  $\begin{cases} -x^2+x+12\geq 0, \\ x-1\neq 0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\neq 1 \end{cases}$  得  $\begin{cases} -3\leq x\leq 4, \\ x\neq 1, \\ x<2, \end{cases}$

则  $\begin{cases} -3\leq x<2, \\ x\neq 1, \end{cases}$  所以定义域是  $\{x|-3\leq x<1, \text{或 } 1<x<2\}$ .



18. 二次函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) - f(x) = 2x$ , 且  $f(0) = 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式;

(2) 解不等式  $f(x) > 2x + 5$ .

解: (1) 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ .

$$\because f(0) = 1, \therefore c = 1.$$

把  $f(x)$  的表达式代入  $f(x+1) - f(x) = 2x$ , 有

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 - (ax^2 + bx + 1) = 2x.$$

$$\therefore 2ax + a + b = 2x.$$

$$\therefore a = 1, b = -1.$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1.$$

(2) 由  $x^2 - x + 1 > 2x + 5$ , 即  $x^2 - 3x - 4 > 0$ ,

解得  $x > 4$  或  $x < -1$ .

故原不等式解集为  $\{x | x > 4, \text{ 或 } x < -1\}$ .

19. 运货卡车以每小时  $x$  千米的速度匀速行驶 130 千米 ( $50 \leq x \leq 100$ ) (单位: 千米/小时). 假

设汽油的价格是每升 2 元, 而汽车每小时耗油  $\left(2 + \frac{x^2}{360}\right)$  升, 司机的工资是每小时 14 元.

(1) 求这次行车总费用  $y$  关于  $x$  的表达式;

(2) 当  $x$  为何值时, 这次行车的总费用最低, 并求出最低费用的值.

解: (1) 行车所用时间为  $t = \frac{130}{x}$  (h),

$$y = \frac{130}{x} \times 2 \times \left(2 + \frac{x^2}{360}\right) + \frac{14 \times 130}{x}, \quad x \in [50, 100].$$

所以, 这次行车总费用  $y$  关于  $x$  的表达式是

$$y = \frac{2340}{x} + \frac{13}{18}x, \quad x \in [50, 100].$$

(2)  $y = \frac{2340}{x} + \frac{13}{18}x \geq 26\sqrt{10}$ , 当且仅当  $\frac{2340}{x} = \frac{13}{18}x$ ,

即  $x = 18\sqrt{10}$  时, 上述不等式中等号成立.

当  $x = 18\sqrt{10}$  时, 这次行车的总费用最低, 最低费用为  $26\sqrt{10}$  元.

20. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且它的图象关于直线  $x = 1$  对称.

(1) 求证:  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数;

(2) 若  $f(x) = \sqrt{x} (0 < x \leq 1)$ , 求  $x \in [-5, -4]$  时, 函数  $f(x)$  的解析式.

解: (1) 证明: 由函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 得  $f(x+1) = f(1-x)$ ,

即有  $f(-x) = f(x+2)$ .

又函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数,

故有  $f(-x) = -f(x)$ .

故  $f(x+2) = -f(x)$ .

从而  $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ,

即  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数.

(2) 由函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 有  $f(0) = 0$ .

$x \in [-1, 0)$  时,  $-x \in (0, 1]$ ,

$f(x) = -f(-x) = -\sqrt{-x}$ , 又  $f(0) = 0$ ,

故  $x \in [-1, 0]$  时,  $f(x) = -\sqrt{-x}$ .

$x \in [-5, -4]$ ,  $x+4 \in [-1, 0]$ ,

$f(x) = f(x+4) = -\sqrt{-x-4}$ .

从而,  $x \in [-5, -4]$  时,

函数  $f(x) = -\sqrt{-x-4}$ .