

第一次月考练习一(廖老师出题)

一、选择题

1、设不等式 $x^2 - x \leq 0$ 的解集为 M, 函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 的定义域为 N 则 $M \cap N$ 为 ()
 A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $[0, 1]$ D. $(-1, 0]$

2、若函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的反函数, 且 $f(2) = 1$, 则 $f(x) =$ ()
 A. $\log_2 x$ B. $\frac{1}{2^x}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} x$ D. 2^{x-2}

3、设 $\alpha \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 R 且为奇函数的所有 α 值为 ()
 A. 1,3 B. -1,1 C. -1,3 D. -1,1,3

4、为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有点 ()
 A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

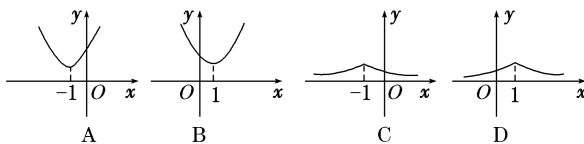
5、已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 ()

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ (D) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

6、设 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2, b = \log_{\frac{1}{2}} 3, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$, 则 ()
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

7. 下列函数 $f(x)$ 中, 满足“对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ”的是 ()
 A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = (x-1)^2$ C. $f(x) = e^x$ D. $f(x) = \ln(x+1)$

8. 函数 $f(x) = 2^{|x-1|}$ 的图象是 ()



9. 已知 $x = a + \frac{1}{a-2} (a > 2), y = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b} (b < 0)$, 则 x, y 之间的大小关系是 ()
 A. $x > y$ B. $x < y$ C. $x = y$ D. 不能确定

10、若函数 $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = |x|$, 则函数 $y = f(x) - \log_3 |x|$ 的零点的个数为 () A.2 B.3 C.4 D.多于 4

二、填空题

11、若 $a^3 = 49$, 则 $\log_7 a =$ _____

12、 $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 3$, 且 $f(3) = 6$, 则 $f(-3) =$ _____.

13、函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$, 则若 $f(a) < \frac{1}{2}$, 则实数 a 的取值范围是 _____

14、设函数 $f(x) = |x+a|$, $g(x) = x-1$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15、若函数 $f(x) = \log_a(x^2 - ax + 3) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 满足对任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2 \leq \frac{a}{2}$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 实数 a 的取值范围是 _____

三、解答题

16、(1)函数 $f(x) = \log_2(2x-1)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$ 的定义域为集合 N. 求 $M \cap N$

(2)计算 $\lg 25 + \lg 2 \cdot \lg 50 + (\lg 2)^2$;

17、设命题 P: 关于 x 的不等式 $a^{x^2-ax-2a^2} > 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的解集为 $\{x | -a < x < 2a\}$;

命题 Q: $y = \lg(ax^2 - x + a)$ 的定义域为 R. 如果 P 或 Q 为真, P 且 Q 为假, 求 a 的取值范围

18、已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$, 常数 $a \in \mathbb{R}$).

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2)若 $f(1) = 2$, 试用单调性的定义判断 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的单调性.

19、已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + b$ ($a \neq 0$), 若 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上有最大值 5, 最小值 2.

(1)求 a, b 的值;

(2)若 $b < 1$, $g(x) = f(x) - m \cdot x$ 在 $[2, 4]$ 上单调, 求 m 的取值范围.

20、运货卡车以每小时 x 千米的速度匀速行驶 130 千米 ($50 \leq x \leq 100$) (单位: 千米/小时). 假

设汽油的价格是每升 2 元, 而汽车每小时耗油 $\left(2 + \frac{x^2}{360}\right)$ 升, 司机的工资是每小时 14 元.

(1)求这次行车总费用 y 关于 x 的表达式;

(2)当 x 为何值时, 这次行车的总费用最低, 并求出最低费用的值.

21、设 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $g(t)$,

(1)求 $g(t)$ 的解析式 (2)求函数 $g(t)$ 的值域 (3)若 $f(x) < 2$ 对 $x \in [t, t+1]$ 恒成立, 求的范围

第一次月考练习一答案

1、设不等式 $x^2 - x \leq 0$ 的解集为 M, 函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 的定义域为 N 则 $M \cap N$ 为 (A)
 A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $[0, 1]$ D. $(-1, 0]$

2、若函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的反函数, 且 $f(2) = 1$, 则 $f(x) =$ (A)
 A. $\log_2 x$ B. $\frac{1}{2^x}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} x$ D. 2^{x-2}

3、设 $\alpha \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^\alpha$ 的定义域为 R 且为奇函数的所有 α 值为 (A)
 A. 1,3 B. -1,1 C. -1,3 D. -1,1,3

4、为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有点 (C)
 A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

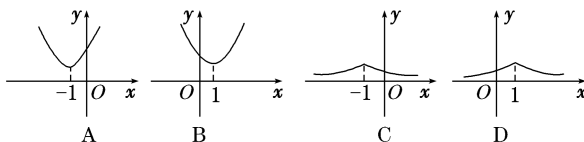
5、已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 (A)
 (A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ (D) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

6、设 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2, b = \log_{\frac{1}{2}} 3, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$, 则 (D)

A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

7. 下列函数 $f(x)$ 中, 满足“对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ”的是 (A)
 A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = (x-1)^2$ C. $f(x) = e^x$ D. $f(x) = \ln(x+1)$

8. 函数 $f(x) = 2^{x-1}$ 的图象是 (B)



9. 已知 $x = a + \frac{1}{a-2} (a > 2), y = \left(\frac{1}{2}\right)^{b^2-2} (b < 0)$, 则 x, y 之间的大小关系是 (A)

A. $x > y$ B. $x < y$ C. $x = y$ D. 不能确定

10、若函数 $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = |x|$, 则函数 $y = f(x) - \log_3 |x|$ 的零点的个数为 (C) A.2 B.3 C.4 D.多于 4

二、填空题

11、若 $a^3 = 49$, 则 $\log_7 a = \underline{\frac{2}{3}}$

12、 $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 3$, 且 $f(3) = 6$, 则 $f(-3) = \underline{36}$.

13、函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$, 则若 $f(a) < \frac{1}{2}$, 则实数 a 的取值范围是

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14、设函数 $f(x) = |x+a|, g(x) = x-1$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则实数 a

的取值范围是 $a \geq -1$.

15、若函数 $f(x) = \log_a(x^2 - ax + 3)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 满足对任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2 \leq \frac{a}{2}$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 实数 a 的取值范围是 $1 < a < 2\sqrt{3}$.

三、解答题

16、(1)函数 $f(x) = \log_2(2x - 1)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ 的定义域为集合 N. 求 $M \cap N$

(2)计算 $\lg 25 + \lg 2 \cdot \lg 50 + (\lg 2)^2$;

解: (1) $(\frac{1}{2}, 4]$ (2)原式 = $2 \lg 5 + \lg 2 \cdot \lg 100 = 2 \lg 5 + 2 \lg 2 = 2$

17、设命题 P: 关于 x 的不等式 $a^{x^2 - ax - 2a^2} > 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的解集为 $\{x | -a < x < 2a\}$;

命题 Q: $y = \lg(ax^2 - x + a)$ 的定义域为 \mathbf{R} . 如果 P 或 Q 为真, P 且 Q 为假, 求 a 的取值范围

解: P 真: $a^{x^2 - ax - 2a^2} > a^0$, 当 $a > 1$ 时, $x^2 - ax - 2a^2 > 0$ 解集不可能 $\{x | -a < x < 2a\}$

当 $0 < a < 1$ 时, $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ 解集 $\{x | -a < x < 2a\}$, 综上 $0 < a < 1$, 设 $A = (0, 1)$

Q 真: $ax^2 - x + a > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立

于是 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 1 - 4a^2 < 0, a > \frac{1}{2} \end{cases}$, 设 $B = (\frac{1}{2}, +\infty)$

P 或 Q 为真, 则 $a \in A \cup B = (0, +\infty)$, P 且 Q 为真, 则 $a \in A \cap B = (\frac{1}{2}, 1)$

于是 P 或 Q 为真, P 且 Q 为假, 得 a 的范围是 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$

18、已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$, 常数 $a \in \mathbf{R}$).

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2)若 $f(1) = 2$, 试用单调性的定义判断 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的单调性.

解(1)当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ 偶函数

当 $a \neq 0$ 时, $f(-1) = f(-1) = 1 - a$, $f(1) = 1 + a$, $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) + f(1) \neq 0$

于是不是偶函数也不是奇函数

(2) 若 $f(1) = 2$, 则 $a = 1$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, 设 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + \frac{1}{x_1} - x_2^2 - \frac{1}{x_2} = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left[(x_1 + x_2) - \frac{1}{x_1 x_2} \right] \\ &= (x_1 - x_2) \cdot \frac{(x_1 + x_2)x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

因 $2 \leq x_1 < x_2$, 故 $x_1 - x_2 < 0$, $(x_1 + x_2)x_1 x_2 - 1 > 0$

$f(x_1) - f(x_2) < 0$, $f(x_1) < f(x_2)$

故 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 递增

19、已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + b$ ($a \neq 0$), 若 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上有最大值 5, 最小值 2.

(1)求 a, b 的值;

(2)若 $b < 1$, $g(x) = f(x) - mx$ 在 $[2, 4]$ 上单调, 求 m 的取值范围.

解: (1) $f(x) = a(x - 1)^2 + 2 + b - a$.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上为增函数,

$$\text{故} \begin{cases} f(3) = 5, \\ f(2) = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a - 6a + 2 + b = 5, \\ 4a - 4a + 2 + b = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$$

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上为减函数,

$$\text{故} \begin{cases} f(3) = 2, \\ f(2) = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a - 6a + 2 + b = 2, \\ 4a - 4a + 2 + b = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 3. \end{cases}$$

(2) $\because b < 1, \therefore a = 1, b = 0$, 即 $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 - mx = x^2 - (2 + m)x + 2,$$

$\therefore g(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调, $\therefore \frac{2+m}{2} \leq 2$ 或 $\frac{m+2}{2} \geq 4, \therefore m \leq 2$ 或 $m \geq 6$.

20、运货卡车以每小时 x 千米的速度匀速行驶 130 千米 ($50 \leq x \leq 100$) (单位: 千米/小时). 假

设汽油的价格是每升 2 元, 而汽车每小时耗油 $\left(2 + \frac{x^2}{360}\right)$ 升, 司机的工资是每小时 14 元.

(1) 求这次行车总费用 y 关于 x 的表达式;

(2) 当 x 为何值时, 这次行车的总费用最低, 并求出最低费用的值.

解: (1) 行车所用时间为 $t = \frac{130}{x}$ (h),

$$y = \frac{130}{x} \times 2 \times \left(2 + \frac{x^2}{360}\right) + \frac{14 \times 130}{x}, \quad x \in [50, 100].$$

$$\text{故 } y = \frac{2340}{x} + \frac{13}{18}x, \quad x \in [50, 100]. \text{ 为所求}$$

(2) 因 $x > 0$, 故

$$y = \frac{2340}{x} + \frac{13}{18}x \geq 26\sqrt{10}, \text{ 当且仅当 } \frac{2340}{x} = \frac{13}{18}x, \text{ 即 } x = 18\sqrt{10} \text{ 时取等号}$$

因 $18\sqrt{10} \in [50, 100]$

当 $x = 18\sqrt{10}$ 时, 这次行车的总费用最低, 最低费用为 $26\sqrt{10}$ 元.

21、设 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $g(t)$,

(1) 求 $g(t)$ 的解析式 (2) 求函数 $g(t)$ 的值域 (3) 若 $f(x) < 2$ 对 $x \in [t, t+1]$ 恒成立, 求 t 的范围

解: (1) $f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

当 $\begin{cases} t \leq 1 \\ t+1 \geq 1 \end{cases}$ 即 $0 \leq t \leq 1$ 时, $g(t) = f(1) = -2$

当 $t+1 < 1$ 即 $t < 0$ 时, $g(t) = f(t+1) = t^2 - 2$

当 $t > 1$ 时, $g(t) = f(t) = t^2 - 2t - 1$

$$\text{综上, } g(t) = \begin{cases} t^2 - 2, & t < 0 \\ -2, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 - 2t - 1, & t > 1 \end{cases}$$

(2) $t < 0$ 时, $g(t) > -2$, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $g(t) = -2$, 当 $t > 1$ 时, $g(t) > -2$

综上, $g(t) \geq -2$

(3) 若 $f(x) < 2$ 对 $x \in [t, t+1]$ 恒成立, 等价于 $\begin{cases} f(t+1) = t^2 - 2 < 2 \\ f(t) = t^2 - 2t - 1 < 2 \end{cases}, \begin{cases} -2 < t < 2 \\ -1 < t < 3 \end{cases}, -1 < t < 2$

故 t 的范围是 $(-1, 2)$