第一次月考考前练习二 (廖老师出题)

1、与命题“若 p 则 q”的否命题真假相同的命题是 (　　)

A、若 q 则 p　　B、若 p 则 q　　C、若$\neg q$ 则 p　　D、若$\neg p$ 则 q

2、集合 $P=\{x\in Z|0\le x<3\}, M=\{x\in Z|x^2\le 9\}$，则 P∩M=(　　)

(A) {1, 2}　(B) {0, 1, 2}　(C) {1, 2, 3}　(D) {0, 1, 2, 3}

3、已知集合 $M=\{x\mid y=\log_2\frac{1-x}{x+1}\}, N=\{y\mid y=x^3+x, 且x\in[0,1]\}, M\cap N=$(　　)

A.　$(1,2]$　　B.　$(-1,1)$　　C.　$[0,1)$　　D.　$(0,1)$

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2\ (0\le x\le 1)\\ 2^x\quad(-1\le x<0)\end{cases}$，若 $f(x)=\frac{9}{4}$，则 x= (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C.2　　D. -2

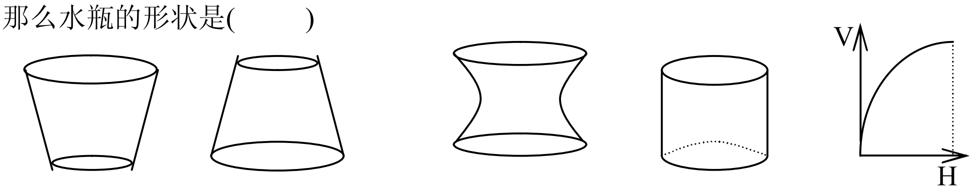
5、函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是 (　　)

(A) (-2,-1)　(B) (-1,0)　(C) (0,1)　(D)　(1,2)

6．已知命题 $P:\exists x\in R, x+1\le 0$，命题 $q:\forall x\in R, x^2+mx+1>0$ 恒成立。若 $p\wedge q$ 为假命题，则实数 m 的取值范围为 (　　)

A、$m\ge 2$　　B、$m\le -2$　　C、$m\le -2$或$m\ge 2$　　D、$-2\le m\le 2$

7、向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如右图所示, 那么水瓶的形状是(　　)



8、已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$，则下列选项的命题中为假命题的是 (　　)

(A) $\exists x\in R, f(x)\le f(x_0)$　(B) $\exists x\in R, f(x)\ge f(x_0)$

(C) $\forall x\in R, f(x)\le f(x_0)$　(D) $\forall x\in R, f(x)\ge f(x_0)$

9、函数 $f(x)$ 满足：x≥4, 则 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$；当 x<4 时 $f(x)=f(x+1)$，则 $f(2+\log_2 3)$ =(　　)

A. $\frac{1}{24}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

10、已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0), f(1)=0$，则“$b>2a$”是“$f(-2)<0$”的 (　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

11、若 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数，则 $a=$___________.

12、已知函数 f (x) 是定义在闭区间 [$-a$，a] (a>0) 上的奇函数，F (x) $=f$ (x) +1，则 F (x) 最大值与最小值之和为 (　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

13、若不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 在 $x\in(1,2)$ 内恒成立，实数 a 的取值范围为________.

14、废气的排放中，废气的污染物数量 P (mg/L) 与时间 t (h) 的关系是 $P=P_0e^{-kt}$，如果在前 5 个小时消除了 10%的污染物，则 10 小时后还剩百分之几的污染物_________

15、已知函数 $f(x)$满足 $f(x+1)=f(x-1)$，且 $f(x)$是偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，若在区间 $[-1,3]$上函数 $g(x)=f(x)-kx-k$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是______.

16、计算(1) $(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.027^{-\frac{1}{3}}+\log_2 36-4\log_4 3$ (2)求 y=$\log_2\frac{x}{2}\log_2\frac{x}{4}$($1\le x\le 8$)的值域

17．设条件 p：$2x^2-3x+1\leqslant 0$，条件 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$，若**非** p 是**非** q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围．

18．函数 $y=\lg(3-4x+x^2)$的定义域为 M，当 $x\in M$ 时，求 $f(x)=2^x+2-3\times 4^x$ 的最值．

19、已知 $f(x)=\log_a(a^x-1)$

(1)求 $f(x)$ 的定义域 (2)讨论函数 $f(x)$ 的单调性

20、已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 R 上有定义，对任意的 $x,y\in R$ 有 $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ 且 $f(1)\neq 0$ （1）求证：$f(x)$ 为奇函数 （2）若 $f(1)=f(2)$， 求 $g(1)+g(-1)$ 的值

21．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)若 $a>b>c$，且 $f(1)=0$，试证明 $f(x)$必有两个零点；

(2)若对 x_1，$x_2\in\mathrm{R}$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$有两个不等实根，证明必有一个实根属于$(x_1，x_2)$.

第一次月考考前练习二 (廖老师出题)

1、与命题“若 p 则 q”的否命题真假相同的命题是（ A ）

A、若 q 则 p　　B、若 p 则 q　　C、若$\neg q$ 则 p　　D、若$\neg p$ 则 q

2、集合 $P=\{x\in Z|0\le x<3\}, M=\{x\in Z|x^2\le 9\}$，则 P∩M=（ B ）

(A) {1,2}　(B) {0,1,2}　(C) {1,2,3}　(D) {0,1,2,3}

3、已知集合 $M=\{x\mid y=\log_2\frac{1-x}{x+1}\}, N=\{y\mid y=x^3+x,且x\in[0,1]\}, M\cap N=$（ C ）

A. $(1,2]$　　B. $(-1,1)$　　C. $[0,1)$　　D. $(0,1)$

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & (0\le x\le 1)\\ 2^x & (-1\le x<0)\end{cases}$，若 $f(x)=\frac{9}{4}$，则 x=（ A ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C.2　　D. -2

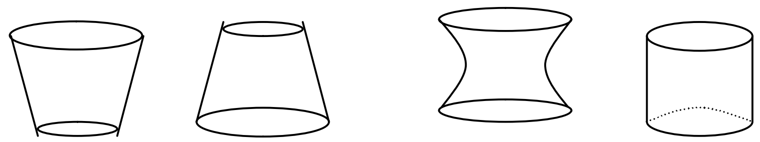
5、函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是（ C ）

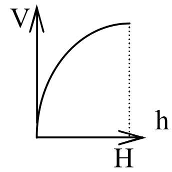
(A)（-2,-1）　(B)（-1,0）(C)（0,1）　(D)　(1,2)

6．已知命题 $P:\exists x\in R, x+1\le 0$，命题 $q:\forall x\in R, x^2+mx+1>0$ 恒成立。若 $p\wedge q$ 为假命题，则实数 m 的取值范围为（C ）

A、$m\ge 2$　　B、$m\le -2$　　C、$m\le -2或m\ge 2$　　D、$-2\le m\le 2$

7、向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如右图所示, 那么水瓶的形状是(B)





8、已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$，则下列选项的命题中为假命题的是（ C ）

(A) $\exists x\in R, f(x)\le f(x_0)$　(B) $\exists x\in R, f(x)\ge f(x_0)$

(C) $\forall x\in R, f(x)\le f(x_0)$　(D) $\forall x\in R, f(x)\ge f(x_0)$

9、函数 $f(x)$ 满足：x≥4, 则 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$；当 x<4 时 $f(x)=f(x+1)$，则 $f(2+\log_2 3)$ =（ A ）　A. $\frac{1}{24}$　B. $\frac{1}{12}$　C. $\frac{1}{8}$　D. $\frac{3}{8}$

10、已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0), f(1)=0$，则“$b>2a$”是“$f(-2)<0$”的（ A ）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

解：当 $b>2a$ 时，设另一个零点为 x_1 则 $x_1+1=-\frac{b}{a}<-2, x_1<-3$，于是 $f(-2)<0$

当 $f(-2)<0$ 时，$4a-2b+c<0, 3a-3b<0, b>a$，

取 $b=3, a=2$ 有 $f(-2)<0$ 但无 $b>2a$

11、若 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数，则 $a=$___________．a=1/2

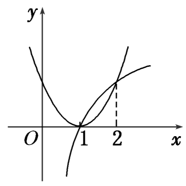
12、已知函数 f（x）是定义在闭区间［$-a$，a］（a>0）上的奇函数，F（x）=f（x）+1，则 F（x）最大值与最小值之和为（ B ）

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

13、若不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 在 $x\in(1,2)$ 内恒成立，实数 a 的取值范围为________.

解：当 $0<a<1$ 时，显然不成立;

当 $a>1$ 时，如图，



要使 $x\in(1,2)$时 $f_1(x)=(x-1)^2$ 的图象在 $f_2(x)=\log_a x$ 的图象下方，只需 $f_1(2)\leqslant f_2(2)$，

即$(2-1)^2\leqslant\log_a 2$， $\log_a 2\geqslant 1$.

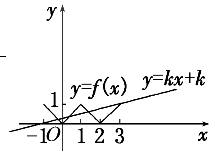
所以 $1<a\leqslant 2$，实数 a 的取值范围是$(1,2]$.

14、废气的排放中，废气的污染物数量 P（mg/L）与时间 t（h）的关系是 $P=P_0e^{-kt}$，如果在前 5 个小时消除了 10%的污染物，则 10 小时后还剩百分之几的污染物__81%_______

解：$P(0)=P_0e^0=P_0, P(5)=P_0e^{-5k}=\dfrac{9}{10}P_0, e^{-5k}=\dfrac{9}{10}$，

$P(10)=P_0e^{-10k}=P_0(e^{-5k})^2=\dfrac{81}{100}P_0, \dfrac{P(10)}{P_0}=\dfrac{81}{100}$

15、已知函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(x-1)$，且$f(x)$是偶函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，若在区间$[-1,3]$上函数$g(x)=f(x)-kx-k$有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是_$\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$__



解：由 $f(x+1)=f(x-1)$得，$f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$是周期为 2 的函数.

∵$f(x)$是偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，∴当 $x\in[-1,0]$时，$f(x)=-x$，

易得当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=-x+2$，当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=x-2$.

在区间$[-1,3]$上函数 $g(x)=f(x)-kx-k$ 有 4 个零点，即函数 $y=f(x)$与 $y=kx+k$ 的图象在区间$[-1,3]$上有 4 个不同的交点．作出函数 $y=f(x)$与 $y=kx+k$ 的图象如图所示，结合图形易知，$k\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$.

16、计算(1) $(2\dfrac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.027^{-\frac{1}{3}}+\log_2 36-4\log_4 3$ (2)求 y=$\log_2\dfrac{x}{2}\log_2\dfrac{x}{4}$($1\le x\le 8$)的值域

17．设条件 p：$2x^2-3x+1\leqslant 0$，条件 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$，若**非** p 是**非** q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

解：条件 p 为：$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，条件 q 为：$a\leqslant x\leqslant a+1$.

非 p 对应的集合 $A=\left\{x|x>1，或x<\dfrac{1}{2}\right\}$，**非** q 对应的集合 $B=\{x|x>a+1，或 x<a\}$.

∵**非** p 是**非** q 的必要不充分条件，

∴$B\subsetneq A$，∴$\begin{cases}a\le\dfrac{1}{2}\\ a+1\ge 1\\ A\ne B\end{cases}$，∴$0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$.故 a 的取值范围是$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

18．函数$y=\lg(3-4x+x^2)$的定义域为 M，当$x\in M$时，求$f(x)=2^x+2-3\times 4^x$的最值.

解：由 $3-4x+x^2>0$，得 $x>3$ 或 $x<1$，∴$M=\{x|x>3，或 x<1\}$，

$f(x)=-3\times(2^x)^2+2^x+2=-3\left(2^x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{25}{12}$.

∵$x>3$ 或 $x<1$，∴$2^x>8$ 或 $0<2^x<2$，

∴当 $2^x=\dfrac{1}{6}$，即 $x=\log_2\dfrac{1}{6}$时，$f(x)$最大，最大值为$\dfrac{25}{12}$，$f(x)$没有最小值.

19、已知 $f(x)=\log_a(a^x-1)$

(1)求 $f(x)$ 的定义域 (2)讨论函数 $f(x)$ 的单调性

解：(1)由 $a^x-1>0$ 得 $a^x>1$，当 $a>1$ 时，$x>0$；当 $0<a<1$ 时，$x<0$.

综上当 $a>1$ 时，$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$的定义域为$(-\infty，0)$.

(2)当 $a>1$ 时，设 $0<x_1<x_2$，则 $1<a^{x_1}<a^{x_2}$

故 $0<a^{x_1}-1<a^{x_2}-1$，$\therefore \log_a(a^{x_1}-1)<\log_a(a^{x_2}-1)$.

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$. 此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

当 $0<a<1$ 时，设 $x_1<x_2<0$，则 $a^{x_1}>a^{x_2}>1$

故 $a^{x_1}-1>a^{x_2}-1>0$，$\therefore \log_a(a^{x_1}-1)<\log_a(a^{x_2}-1)$.

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$. 此时 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也为增函数.

20、已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 R 上有定义，对任意的 $x,y\in R$ 有 $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ 且 $f(1)\neq 0$ （1）求证：$f(x)$ 为奇函数 （2）若 $f(1)=f(2)$， 求 $g(1)+g(-1)$ 的值

解：（1）在 $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ 中令 $x为y,y为x$ 得

$f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$，$f(y-x)=f(y)g(x)-g(y)f(x)$

故 $f(x-y)+f(y-x)=0$，令 $x-y=t$，得 $f(t)+f(-t)=0$，于是 $f(x)$ 为奇函数

（2）在 $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ 中令 $x=1,y=-1$ 得

$f(2)=f(1)g(-1)-g(1)f(-1)$，

因为 $f(2)=f(1)$，$f(-1)=-f(1)$

故 $f(1)=f(1)g(-1)+g(1)f(1),又f(1)\neq 0，所以g(-1)+g(1)=1$

21．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)若 $a>b>c$，且 $f(1)=0$，试证明 $f(x)$必有两个零点；

(2)若对 x_1，$x_2\in$R，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$有两个不等实根，证明必有一个实根属于$(x_1,x_2)$.

证明：(1)$\because f(1)=0$，$\therefore a+b+c=0$，又$\because a>b>c$，$\therefore a>0$，$c<0$，即 $ac<0$.

又$\because \Delta=b^2-4ac\geqslant -4ac>0$，$\therefore$方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根，$\therefore$函数 $f(x)$有两个零点.

(2)令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则 $g(x_1)=f(x_1)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$，

$g(x_2)=f(x_2)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}$，

$\therefore g(x_1)\cdot g(x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}\cdot\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2$.

$\because f(x_1)\neq f(x_2)$，$\therefore g(x_1)\cdot g(x_2)<0$.

$\therefore g(x)=0$ 在(x_1,x_2)内必有一实根.

即 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$在$(x_1,x_2)$内必有一实根.