

函数与导数练习(廖老师选题)

1. 已知 $a=2^{0.2}$, $b=0.4^{0.2}$, $c=0.4^{0.6}$, 则()
 A. $a>b>c$ B. $a>c>b$ C. $c>a>b$ D. $b>c>a$
2. 已知 $f(x)=2^x+2^{-x}$, 若 $f(a)=3$, 则 $f(2a)$ 等于()
 A. 5 B. 7 C. 9 D. 11
3. 设函数 $y=x^3$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的图象交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在的区间是()
 A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)
4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x>0 \\ \log_2(-x), & x<0 \end{cases}$ 若 $f(m)<f(-m)$, 则实数 m 的取值范围是()
 A. $(-1,0)\cup(0,1)$ B. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ C. $(-1,0)\cup(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)\cup(0,1)$
5. 当 $0<x\leq\frac{1}{2}$ 时, $4^x<\log_a x$, 则 a 的取值范围是()
 A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$
6. 设函数 $f(x)=g(x)+x^2$, 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为()
 A. $-\frac{1}{4}$ B. 2 C. 4 D. $-\frac{1}{2}$
7. 若点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y=x-2$ 的最小距离为()
 A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{3}$
8. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$, 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 在 $x\in[-2,5]$ 上有 3 个零点, 则 m 的取值范围为()
 A. $(-24,8)$ B. $(-24,1]$ C. $[1,8]$ D. $[1,8)$
9. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)+f(x)\leq 0$, 对任意正数 a, b , 若 $a<b$, 则必有()
 A. $af(b)\leq bf(a)$ B. $bf(a)\leq af(b)$ C. $af(a)\leq f(b)$ D. $bf(b)\leq f(a)$
10. 如图所示为 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象, 则 $x_1^2+x_2^2$ 的值是()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{9}$
11. 已知函数 $f(x)=\ln x - f'(-1)x^2 + 3x - 4$, 则 $f'(1)=$ _____.
12. 已知函数 $f(x)=e^x - x + a$ 有零点, 则 a 的取值范围是_____.
13. 直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与曲线 $y=-\frac{1}{2}x+\ln x$ 相切, 则 b 的值是_____.

14、当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, x 与 $\ln(1+x)$ 的大小关系是_____

15、设 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$, 若对所有的 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

16、 化简下列各式(其中各字母均为正数).

$$(1) \frac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^5}} \quad (2) \frac{1}{2}\lg \frac{32}{49} - \frac{4}{3}\lg\sqrt{8} + \lg\sqrt{245}$$

17、函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$, 求 a 的值.

18、已知曲线 $C: f(x)=x^3-ax+a$ ，若过曲线 C 外一点 $A(1,0)$ 引曲线 C 的两条切线，它们的倾斜角互补，求 a 的值

19、已知函数 $f(x)=3-2\log_2x$ ， $g(x)=\log_2x$.

(1)当 $x \in [1,4]$ 时，求函数 $h(x)=[f(x)+1] \cdot g(x)$ 的值域；

(2)如果对任意的 $x \in [1,4]$ ，不等式 $f(x^2) \cdot f(\sqrt{x}) > k \cdot g(x)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

20、设 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x - (a+1)x$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间

(2) 设 α, β 是 $f(x)$ 的两个极值点 $\alpha < \beta, \beta \in (1, e]$

求证：对任意的 $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ，不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ 恒成立

ABBCB CBDAD

11、8 12、 $(-\infty, -1]$ 13、-1. 14、 $x > \ln(1+x)$ 15、 $a \leq 1$

函数与导数练习

1. 已知 $a=2^{0.2}$, $b=0.4^{0.2}$, $c=0.4^{0.6}$, 则()

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$ C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

解: (1)由 $0.2<0.6, 0.4<1$, 并结合指数函数的图象可知 $0.4^{0.2}>0.4^{0.6}$, 即 $b>c$; 因为 $a=2^{0.2}>1$, $b=0.4^{0.2}<1$, 所以 $a>b$. 综上, $a>b>c$.

2. 已知 $f(x)=2^x+2^{-x}$, 若 $f(a)=3$, 则 $f(2a)$ 等于()

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

解: 由 $f(a)=3$ 得 $2^a+2^{-a}=3$, 两边平方得 $2^{2a}+2^{-2a}+2=9$, 即 $2^{2a}+2^{-2a}=7$, 故 $f(2a)=7$.

3. 设函数 $y=x^3$ 与 $y=(\frac{1}{2})^{x-2}$ 的图象交点为 (x_0, y_0) , 则 x_0 所在的区间是()

A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

解: 设函数 $f(x)=x^3-(\frac{1}{2})^{x-2}$, $f(1) \cdot f(2)<0$, 且 $f(x)$ 为单调函数, 则 $x_0 \in (1,2)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0 \\ \log_2(-x), & x<0 \end{cases}$ 若 $f(m)<f(-m)$, 则实数 m 的取值范围是()

A. $(-1,0) \cup (0,1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ C. $(-1,0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

解析: 当 $m>0$ 时, $f(m)<f(-m) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}m < \log_2m \Rightarrow m>1$;

当 $m<0$ 时, $f(m)<f(-m) \Rightarrow \log_2(-m) < \log_{\frac{1}{2}}(-m) \Rightarrow -1<m<0$.

所以, m 的取值范围是 $(-1,0) \cup (1, +\infty)$. 选 C

5、当 $0<x \leq \frac{1}{2}$ 时, $4^x < \log_a x$, 则 a 的取值范围是()

A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

解 构造函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_a x$, 当 $a>1$ 时不满足条件, 当 $0<a<1$ 时, 画出两个函数在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上的图象, 可知, $f(\frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2})$, 即 $2 < \log_a \frac{1}{2}$, 则 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 a 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

6、设函数 $f(x)=g(x)+x^2$, 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为()

A. $-\frac{1}{4}$ B. 2 C. 4 D. $-\frac{1}{2}$

解: $\because$ 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+1$, $\therefore g'(1)=k=2$.

又 $f'(x)=g'(x)+2x$, $\therefore f'(1)=g'(1)+2=4$, 故切线的斜率为 4. 答 C

7. 若点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y=x-2$ 的最小距离为()

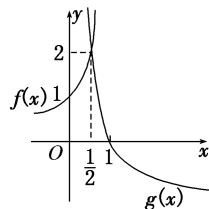
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

解: 选 B 设 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $y=x-2$ 的距离最小, 则 $y'|_{x=x_0}=2x_0-\frac{1}{x_0}=1$.

得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$ (舍). $\therefore P$ 点坐标 $(1,1)$.

$\therefore P$ 到直线 $y=x-2$ 距离为 $d=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$.

8、已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$, 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 在 $x \in [-2,5]$ 上有 3 个零点, 则 m 的取值范围为()



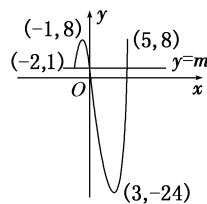
- A. $(-24, 8)$ B. $(-24, 1]$
C. $[1, 8]$ D. $[1, 8)$

解: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 3$.

当 $x \in [-2, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (3, 5]$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(3) = -24$, 极大值为 $f(-1) = 8$;

而 $f(-2) = 1$, $f(5) = 8$, 函数图象大致如图所示. 故要使方程 $g(x) = f(x) - m$ 在 $x \in [-2, 5]$ 上有 3 个零点, 只需函数 $f(x)$ 在 $[-2, 5]$ 内的函数



图象与直线 $y = m$ 有 3 个交点. 故 $\begin{cases} m < 8, \\ m \geq 1, \end{cases}$ 即 $m \in [1, 8)$. [答案] D

9. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$, 对任意正数 a, b , 若 $a < b$, 则必有()

- A. $af(b) \leq bf(a)$ B. $bf(a) \leq af(b)$ C. $af(a) \leq f(b)$ D. $bf(b) \leq f(a)$

解析: 选 A $\because xf'(x) \leq -f(x)$, $f(x) \geq 0$,

$$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \leq \frac{-2f(x)}{x^2} \leq 0.$$

则函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的, 由于 $0 < a < b$, 则 $\frac{f(a)}{a} \geq \frac{f(b)}{b}$, 即 $af(b) \leq bf(a)$.

10. 如图所示为 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值是()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{9}$

解: 由图象可知, 函数图象与 x 轴交于三点, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, 故该函数有三个零点 $-1, 0, 2$.

由 $f(0) = 0$, 得 $d = 0$, 故函数解析式可化为 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx = x(x^2 + bx + c)$, 显然 $-1, 2$ 为方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根.

$$\text{由根与系数的关系, 得 } \begin{cases} -1 + 2 = -b, \\ (-1) \times 2 = c, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = -1, \\ c = -2. \end{cases} \text{ 故 } f(x) = x^3 - x^2 - 2x.$$

由图象可知, x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点,

$$\text{又 } f'(x) = 3x^2 - 2x - 2,$$

故 x_1, x_2 为 $f'(x) = 0$, 即 $3x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两根, 故 $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}$.

$$\text{故 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}. \text{ [答案] D}$$

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - f'(-1)x^2 + 3x - 4$, 则 $f'(1) =$ _____.

解析: $\because f'(x) = \frac{1}{x} - 2f'(-1)x + 3$, $f'(-1) = -1 + 2f'(-1) + 3$,

$$\therefore f'(-1) = -2, \therefore f'(1) = 1 + 4 + 3 = 8. \text{ 答案: } 8$$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - x + a$ 有零点, 则 a 的取值范围是 _____.

解: $\because f(x) = e^x - x + a$, $\therefore f'(x) = e^x - 1$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

故 $f(x)_{\min} = f(0) = 1 + a$. 若函数 $f(x)$ 有零点, 则 $f(x)_{\min} \leq 0$,

即 $1 + a \leq 0$, 得 $a \leq -1$. [答案] $(-\infty, -1]$

13. 直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与曲线 $y = -\frac{1}{2}x + \ln x$ 相切, 则 b 的值为 _____

解: 设切点的坐标为 $\left(a, -\frac{1}{2}a + \ln a\right)$, 依题意, 对于曲线 $y = -\frac{1}{2}x + \ln x$,

有 $y' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$, 所以 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, 得 $a = 1$. 又切点 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 在直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 上, 故 $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + b$, 得 $b = -1$.

14、当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, x 与 $\ln(1+x)$ 的大小关系是_____

15、 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ 若对所有的 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

解: $g(x) = f(x) - ax = (x+1)\ln(x+1) - ax$

则 $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$, 由 $g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a = 0$, 得 $x = e^{a-1} - 1$.

在区间 $(-1, +\infty)$ 列表,

x	$(-1, e^{a-1} - 1)$	$e^{a-1} - 1$	$(e^{a-1} - 1, +\infty)$
$Q'(x)$	-	0	+
$Q(x)$	递减	极大	递增

注意到 $g(0) = 0$, 故只能 $e^{a-1} - 1 \leq 0$, 所以 $a \leq 1$.

16、化简下列各式(其中各字母均为正数).

$$(1) \frac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^5}} \quad (2) \frac{1}{2}\lg \frac{32}{49} - \frac{4}{3}\lg \sqrt{8} + \lg \sqrt{245}$$

$$(1) \text{原式} = \frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}} = a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = \frac{1}{a}$$

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{2} \times (5\lg 2 - 2\lg 7) - \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \lg 2 + \frac{1}{2}(\lg 5 + 2\lg 7) \\ = \frac{5}{2}\lg 2 - \lg 7 - 2\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 5 + \lg 7 = \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 5 = \frac{1}{2}\lg(2 \times 5) = \frac{1}{2}.$$

17、函数 $f(x) = a^x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$, 求 a 的值.

解: 当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^x$ 为增函数, 在 $x \in [1, 2]$ 上, $f(x)_{\text{最大}} = f(2) = a^2$, $f(x)_{\text{最小}} = f(1) = a$.

$$\therefore a^2 - a = \frac{a}{2}. \text{ 即 } a(2a - 3) = 0. \therefore a = 0 (\text{舍}) \text{ 或 } a = \frac{3}{2} > 1. \therefore a = \frac{3}{2}.$$

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x) = a^x$ 为减函数,

在 $x \in [1, 2]$ 上, $f(x)_{\text{最大}} = f(1) = a$, $f(x)_{\text{最小}} = f(2) = a^2$.

$$\therefore a - a^2 = \frac{a}{2}. \therefore a(2a - 1) = 0, \therefore a = 0 (\text{舍}) \text{ 或 } a = \frac{1}{2}. \therefore a = \frac{1}{2}.$$

综上所述, $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

18、已知曲线 $C: f(x) = x^3 - ax + a$, 若过曲线 C 外一点 $A(1, 0)$ 引曲线 C 的两条切线, 它们的倾斜角互补, 求 a 的值

解: 设切点坐标为 $(t, t^3 - at + a)$. 由题意知, $f'(x) = 3x^2 - a$,

切线的斜率为 $k = y'|_{x=t} = 3t^2 - a$. ①

所以切线方程为 $y - (t^3 - at + a) = (3t^2 - a)(x - t)$. ②

将点 $(1, 0)$ 代入②式得 $-(t^3 - at + a) = (3t^2 - a)(1 - t)$, 解得 $t = 0$ 或 $t = \frac{3}{2}$.

分别将 $t = 0$ 和 $t = \frac{3}{2}$ 代入①式, 得 $k = -a$ 和 $k = \frac{27}{4} - a$,

由题意得它们互为相反数, 得 $a = \frac{27}{8}$.

19、已知函数 $f(x) = 3 - 2\log_2 x$, $g(x) = \log_2 x$.

(1) 当 $x \in [1, 4]$ 时, 求函数 $h(x) = [f(x) + 1] \cdot g(x)$ 的值域;

(2) 如果对任意的 $x \in [1, 4]$, 不等式 $f(x^2) \cdot f(\sqrt{x}) > k \cdot g(x)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

解: (1) $h(x) = (4 - 2\log_2 x) \cdot \log_2 x = -2(\log_2 x - 1)^2 + 2$,

因为 $x \in [1, 4]$, 所以 $\log_2 x \in [0, 2]$. 故函数 $h(x)$ 的值域为 $[0, 2]$.

(2) 由 $f(x^2) \cdot f(\sqrt{x}) > k \cdot g(x)$ 得

$(3-4\log_2 x)(3-\log_2 x) > k \cdot \log_2 x$, 令 $t = \log_2 x$, 因为 $x \in [1, 4]$, 所以 $t = \log_2 x \in [0, 2]$, 所以 $(3-4t)(3-t) > k \cdot t$ 对一切 $t \in [0, 2]$ 恒成立,

① 当 $t = 0$ 时, $k \in \mathbb{R}$;

② 当 $t \in (0, 2]$ 时, $k < \frac{(3-4t)(3-t)}{t}$ 恒成立, 即 $k < 4t + \frac{9}{t} - 15$ 恒成立,

因为 $4t + \frac{9}{t} \geq 12$, 当且仅当 $4t = \frac{9}{t}$, 即 $t = \frac{3}{2}$ 时取等号,

所以 $4t + \frac{9}{t} - 15$ 的最小值为 -3 , 即 $k \in (-\infty, -3)$.

20、设 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x - (a+1)x$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间

(2) 设 α, β 是 $f(x)$ 的两个极值点 $\alpha < \beta, \beta \in (1, e]$

求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ 恒成立

解: (1) 定义域是 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = x + \frac{a}{x} - (a+1) = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-1)(x-a)}{x}$$

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = a$

当 $a = 1$ 时 $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 递增区间是 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$, 递减区间是 $(1, a)$

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 递增区间是 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 递减区间是 $(a, 1)$

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 递增区间是 $(1, +\infty)$, 递减区间是 $(0, 1)$

(2)

因为 α, β 是 $f(x)$ 的两个极值点 $\alpha < \beta, \beta \in (1, e]$

故 $\alpha = 1, \beta = a, 1 < a \leq e$

要证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, a]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ 恒成立

只要证: $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} < 1$, (*)

由(1)知当 $1 < a \leq e$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上递减

$$\text{于是 } f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(1) - f(a) = \left[\frac{1}{2} - (a+1)\right] - \left[\frac{1}{2}a^2 + a \ln a - (a+1)a\right]$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} - a \ln a$$

$$\text{设 } h(a) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} - a \ln a, \text{ 则 } h'(a) = a - \ln a - 1$$

$$h''(a) = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a},$$

因 $1 < a \leq e$, 于是 $h''(a) > 0, h'(a)$ 递增, 于是 $h'(a) > h'(1) = 0$, 故 $h(a)$ 递增,

$$h(a) \leq h(e) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - e = \frac{1}{2}(e^2 - 2e) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1)^2 - 1 < \frac{1}{2} \times 2^2 - 1 = 1$$

于是 (*) 式成立, 故原不等式成立