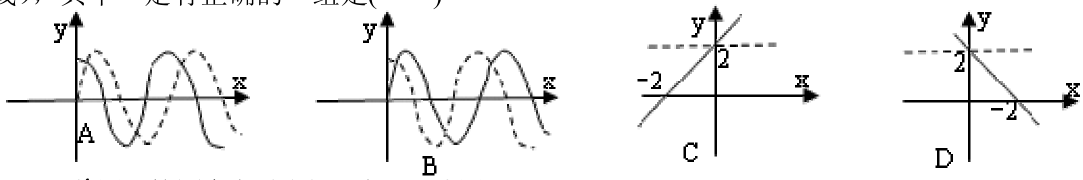
# 导数练习二(廖老师出题)

一、选择

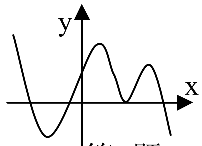
1、如图，在同一坐标系中函数 $y=f(x)$ 的图象（实线）和它的导函数 $y=f'(x)$ 的图象（虚线），其中一定有正确的一组是(　　)



2、若 $y=f'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ (　　)

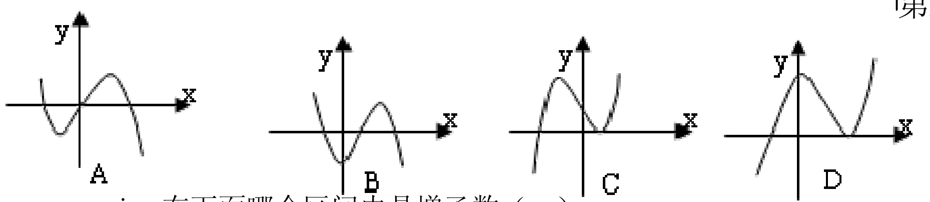
A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

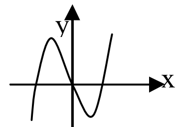
C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间



第2题

3、已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ 的图象是(　　)





第3题

4、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（　）

A $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$　　B (π,2π)　　C $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$　　D (2π,3π)

5、若 a>0, b>0, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于（　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

6、若函数 $y=x^3-3x+a$ 有 3 个不同的零点，则实数 $a$ 的取值范围是(　)

A、$(-2,2)$　B、$[-2,2]$　C、$(-\infty,-1)$　D、$(1,+\infty)$

7、已知奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=5+\cos x, x\in(-1,1)$，若 $f(1-t)+f(1-t^2)<0$，则实数 t 的取值范围是(　)

A、$(0,1)$　B、$(1,\sqrt{2})$　C、$(-2,-\sqrt{2})$　D、$(1,\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)$

8．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 $a$ 的取值范围是(　　)

A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5$或$a\ge 7$

9、设函数 $f(x)=x^3+bx+c$ 是[-1,1]上是增函数，且 $f(-\frac{1}{2})f(\frac{1}{2})<0$，则 $f(x)=0$ 在[-1,1]内(　　)

A、可能有 3 个实根　B、可能有 2 个实根　C、有唯一的实根　D、没有实根

10、已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<f'(x)$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，则有(　)

A、$f(2)<e^2f(0), f(2012)<e^{2012}f(0)$　B、$f(2)>e^2f(0), f(2012)>e^{2012}f(0)$

C、$f(2)>e^2f(0), f(2012)<e^{2012}f(0)$　D、$f(2)<e^2f(0), f(2012)>e^{2012}f(0)$

二、填空题

11、曲线 $y=-x^3+3x+2$ 在点(0,2)处的切线方程为________

12、函数 $y=3x^2-2\ln x$ 的单调递增区间为________

13、函数 $f(x)=a\ln x+x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 $a$ 的值为________

14、函数 $f(x)=e^x+ax$ 有大于零的极值点，则 $a$ 的范围是________

15、若曲线 $f(x)=ax^3+\ln x$ 存在垂直于 $y$ 轴的切线，则实数 $a$ 取值范围是__________

三、解答题

16、已知函数$f(x)=x(x-a)^2, a$是大于零的常数

(Ⅰ)当a＝1时，求$f(x)$的极值；

（Ⅱ）若函数$f(x)$在区间[1,2]上单调递增，求实数a的取值范围

17、已知函数$f(x)=x^2+a\ln x$的图象在点$P(1,f(1))$处的切线斜率为10

(Ⅰ)求实数a的值（Ⅱ）判断方程$f(x)=2x$根的个数，证明你的结论

18、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, 且 $f'(-1)=0$

（I）试用含 $a$ 的代数式表示 $b$；　　（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

19、已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x$

(Ⅰ)求实数 a=-1 时，求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程

（Ⅱ）已知 $a<0$，若函数 $y=f(x)$ 的图象总在直线 $y=-\frac{1}{2}$ 的下方，求 a 的取值范围

20、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$ 的图像在点 P(0,f(0))处的切线方程为 $y=3x-2$.

（Ⅰ）求实数 a，b 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+\frac{m}{x-1}$ 是 $[2,+\infty)$ 上的增函数.求实数 m 的最大值；

21、函数 $f(x)=\ln x+x^2-mx$ 上

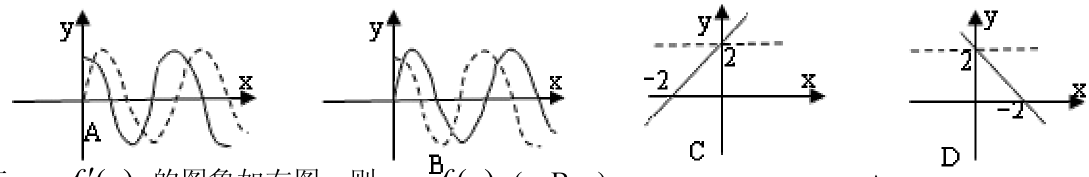
(1)若函数 $f(x)$ 在定义域上递增求 m 的范围

(2)当 $m=1$ 时，$\Delta ABC$ 上有三个点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 在函数的图象上，且 $x_1<x_2<x_3$，$a,b,c$ 分别为$\Delta ABC$ 的角 $A$，$B$，$C$ 的对边，求证：$a^2+c^2<b^2$

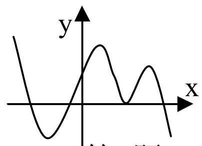
# 导数练习二

一、选择

1、如图，在同一坐标系中函数$y=f(x)$的图象（实线）和它的导函数$y=f'(x)$的图象（虚线），其中一定有正确的一组是( B )



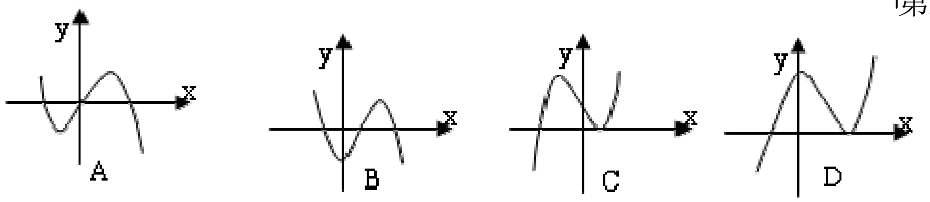
2、若$y=f'(x)$ 的图象如右图，则$y=f(x)$ ( B )

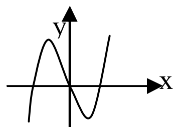

第2题

A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间

3、已知函数$y=xf'(x)$的图象如右图，则$y=f(x)$的图象是( D )




第3题

4、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（B）

A $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$B (π,2π) C $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$D (2π,3π)

5、若 a>0, b>0, 且函数 f(x)=4x$^3$-ax$^2$−2bx+2 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于 D

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

6、若函数$y=x^3-3x+a$有 3 个不同的零点，则实数$a$的取值范围是( A )

A、$(-2,2)$　B、$[-2,2]$　C、$(-\infty,-1)$　D、$(1,+\infty)$

7、已知奇函数$f(x)$的导函数为$f'(x)=5+\cos x, x\in(-1,1)$，若$f(1-t)+f(1-t^2)<0$，则实数 t 的取值范围是( B )

A、$(0,1)$　B、$(1,\sqrt{2})$　C、$(-2,-\sqrt{2})$　D、$(1,\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)$

8．函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$在区间（1，4）上为减函数，在$(6,+\infty)$上为增函数，则实数$a$的取值范围是( B )A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5或a\ge 7$

9、设函数$f(x)=x^3+bx+c$是[-1,1]上是增函数，且$f(-\frac{1}{2})f(\frac{1}{2})<0$，则$f(x)=0$在[-1,1]内( C )A、可能有 3 个实根　B、可能有 2 个实根　C、有唯一的实根　　D、没有实根

10、已知$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，且$f(x)<f'(x)$对任意的$x\in R$恒成立，则有( B )

A、$f(2)<e^2f(0), f(2012)<e^{2012}f(0)$　B、$f(2)>e^2f(0), f(2012)>e^{2012}f(0)$

C、$f(2)>e^2f(0), f(2012)<e^{2012}f(0)$　D、$f(2)<e^2f(0), f(2012)>e^{2012}f(0)$

二、填空题

11、曲线$y=-x^3+3x+2$在点(0,2)处的切线方程为_$y=3x+2$____

11#、过点(0,-1)曲线$y=-x^3+3x^2$的切线方程为_____

解：设切点$(x_0,-x_0{}^3+3x_0{}^2)$，$y'=-3x^2+6x, k=-3x_0{}^2+6x_0$

切线y=$(-3x_0{}^2+6x_0)(x-x_0)-x_0{}^3+3x_0{}^2=(-3x_0{}^2+6x_0)x+2x_0{}^3-3x_0{}^2$

$2x_0{}^3-3x_0{}^2=-1, x_0=1$或$x_0=-\frac{1}{2}, k=3$或$k=-\frac{15}{4}$

$y=3x-1$或$y=-\frac{15}{4}x-1$

12、函数$y=3x^2-2\ln x$的单调递增区间为_$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$_

13、函数$f(x)=a\ln x+x$在$x=1$处取得极值，则$a$的值为_-1____

14、函数$f(x)=e^x+ax$有大于零的极值点，则$a$的范围是_$a<-1$____

15、若曲线$f(x)=ax^3+\ln x$存在垂直于$y$轴的切线，则实数$a$取值范围是_$a<0$______

三、解答题

16、已知函数$f(x)=x(x-a)^2$，$a$是大于零的常数

(Ⅰ)当a＝1时，求$f(x)$的极值；

（Ⅱ）若函数$f(x)$在区间[1,2]上单调递增，求实数a的取值范围

解：(Ⅰ)当a＝1时，$f(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

令$f'(x)=0$得$x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$，

| $x$ | $(-\infty,\frac{1}{3})$ | $\frac{1}{3}$ | $(\frac{1}{3},1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | 递增 | 极大 | 递减 | 极小 | 递增 |

于是$f(x)_{极大}=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}, f(x)_{极小}=f(1)=0$

（Ⅱ）$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$　　$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

令$f'(x)=0$得$x_1=\frac{a}{3}, x_2=a$，函数$f(x)$在区间[1,2]上单调递增

则$[1,2]\subseteq(-\infty,\frac{a}{3}]$或$[1,2]\subseteq[a,+\infty)$，于是$\frac{a}{3}\geq 2$或$0<a\leq 1$故$a\geq 6$或$0<a\leq 1$

17、已知函数$f(x)=x^2+a\ln x$的图象在点$P(1,f(1))$处的切线斜率为10

(Ⅰ)求实数a的值（Ⅱ）判断方程$f(x)=2x$根的个数，证明你的结论

解：(Ⅰ) $f(x)=x^2+a\ln x$，定义域$(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}$

$f'(1)=2+a=10, a=8$，$f(x)=x^2+8\ln x$

（Ⅱ）方程$f(x)=2x$就是$x^2+8\ln x=2x, x^2-2x+8\ln x=0,$

设$g(x)=x^2-2x+8\ln x, g'(x)=2x-2+\frac{8}{x}=\frac{2(x^2-x+4)}{x}>0$

于是$g(x)$在$(0,+\infty)$上递增，因为$g(1)=1-2=-1<0, g(e)=e^2-2e+8>0$

于是$g(x)$在$(1,e)$上有一零点，故$g(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点

方程$f(x)=2x$只有一个根

18、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, 且 $f'(-1)=0$

（I）试用含 $a$ 的代数式表示 $b$；　　（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

解：（I）依题意，得 $f'(x)=x^2+2ax+b$，由 $f'(-1)=1-2a+b=0$ 得 $b=2a-1$

（Ⅱ）由（I）得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a-1)x$

故 $f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 $x=1-2a$

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1-2a)$ 和 $(-1,+\infty)$，单调减区间为 $(1-2a,-1)$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 R；

当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1-2a,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,1-2a)$

19、已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x$

(Ⅰ)求实数 a＝-1 时，求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程

（Ⅱ）已知 $a<0$，若函数 $y=f(x)$ 的图象总在直线 $y=-\frac{1}{2}$ 的下方，求 a 的取值范围

解：(Ⅰ) $f(x)=ax^2+\ln x$，定义域 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$

当 a＝-1 时，$f(x)=-x^2+\ln x,\ f'(x)=-2x+\frac{1}{x}, f(1)=-1, f'(1)=-1$

$P(1,-1)$,在 P 点处的切线 $y+1=-(x-1), y=-x$，

（Ⅱ）$f(x)=ax^2+\ln x\le-\frac{1}{2}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，$f(x)_{\max}\le-\frac{1}{2}$

$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+1}{x}$，令 $f'(x)=0, 2ax^2+1=0, x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$

| $x$ | $(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$ | $\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ | $(\sqrt{-\frac{1}{2a}}+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 单调递增 | 极大 | 单调递减 |

于是当 $x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 时 $f(x)_{\max}=-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}\le-\frac{1}{2}, \ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}\le 0, \sqrt{-\frac{1}{2a}}\le 1, a\le-\frac{1}{2}$

20、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$ 的图像在点 P(0,f(0))处的切线方程为 $y=3x-2$.

（Ⅰ）求实数 a，b 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+\frac{m}{x-1}$ 是 $[2,+\infty)$ 上的增函数.求实数 m 的最大值；

解：（Ⅰ）由 $f'(x)=x^2-2x+a$ 及题设得 $\begin{cases}f'(0)=3\\ f(0)=-2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$。

（Ⅱ）由 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-2+\frac{m}{x-1}$　得 $g'(x)=x^2-2x+3-\frac{m}{(x-1)^2}$。

$\because g(x)$ 是 $[2,+\infty)$ 上的增函数，$\therefore g'(x)\ge 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，

即 $x^2-2x+3-\dfrac{m}{(x-1)^2}\ge 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立。

设 $(x-1)^2=t$ 。$\because x\in[2,+\infty),\therefore t\in[1,+\infty)$，即不等式 $t+2-\dfrac{m}{t}\ge 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立

当 $m\le 0$ 时，不等式 $t+2-\dfrac{m}{t}\ge 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立。

当 $m>0$ 时，设 $y=t+2-\dfrac{m}{t}$，$t\in[1,+\infty)$

因为 $y'=1+\dfrac{m}{t^2}>0$，所以函数 $y=t+2-\dfrac{m}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $y_{\min}=3-m$ 。$\because y_{\min}\ge 0,\therefore 3-m\ge 0$，即 $m\le 3$ 。又 $m>0$，故 $0<m\le 3$ 。

综上，$m$ 的最大值为 3。

21、函数 $f(x)=\ln x+x^2-mx$ 上

(1)若函数 $f(x)$ 在定义域上递增求 m 的范围

(2) 当 $m=1$ 时，$\Delta ABC$ 上有三个点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 在函数的图象上，且 $x_1<x_2<x_3$，$a,b,c$ 分别为 $\Delta ABC$ 的角 $A$，$B$，$C$ 的对边，求证：$a^2+c^2<b^2$

证明：$f(x)=\ln x-x^2+x$

解：(1) $f(x)$ 定义域 $(0,+\infty)$，上递增求 m 的范围

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-m\ge 0,对x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$\dfrac{1}{x}+2x\ge m,设g(x)=\dfrac{1}{x}+2x,x\in(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{1}{x}+2x\ge 2\sqrt{2},当且仅当\dfrac{1}{x}=2x$ ,

所以，$当x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}时$，$g(x)_{\min}=2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}\ge m,故m\le 2\sqrt{2}$

(2) 当 $m=1$ 时由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

因为 $x_1<x_2<x_3$

所以 $y_1<y_2<y_3$

$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(x_1-x_2,y_1-y_2)\bullet(x_3-x_2,y_3-y_2)=(x_1-x_2)(x_3-x_2)+(y_1-y_2)(y_3-y_2)$

$x_1-x_2<0,x_3-x_2>0+y_1-y_2<0,y_3-y_2>0$

于是 $\cos B<0,a^2+c^2<b^2$