椭圆练习（廖老师出题）

一、选择

1．F_1、F_2是定点，$|F_1F_2|=6$，动点M满足$|MF_1|+|MF_2|=6$，则点M的轨迹是　　（　）

A．椭圆　　B．直线　　C．线段　　D．圆

2、椭圆$mx^2+y^2=1$的长轴是短轴长的2倍,则$m=$(　　)

(A) $\frac{1}{4}$　(B) 2　(C) 4或$\frac{1}{4}$　(D) 2或$\frac{1}{2}$

3．椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上一点M到焦点$F_1$的距离为2，N是$MF_1$的中点，则$|ON|=$　(　　)

A、2　　B、4　　C、6　　D、8

4、$2<m<6$是方程$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{6-m}=1$表示椭圆的(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分与不必要条件

5．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（**a>b>0**）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的弦AB的中点坐标为(2,1)，　　（　）

A．$x+y+3=0$　B．$x+y-3=0$　C．$x-y+3=0$　D．$x-y-3=0$

6、设F_1，F_2是椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为30°的等腰三角形，则$E$的离心率为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{4}{5}$

7、已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两焦点为F_1，F_2，点M在椭圆上，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则$M$到$y$轴的距离为(　　)

A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\sqrt{3}$

8、已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两顶点为$A(a,0)$，$B(0，b)$，且左焦点为$F$，$\triangle FAB$是以角$B$为直角的直角三角形，则椭圆的离心率$e$为(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C.$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

9、椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4+k}=1$的离心率为$\frac{4}{5}$，则$k$的值为(　　)

A．-21　　B．21　　C．$-\frac{19}{25}$或21　　D.$\frac{19}{25}$或21

10、已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.双曲线$x^2-y^2=1$的渐近线与椭圆$C$有四个交点，以这四个交点为顶点的四边形的面积为16，则椭圆C的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$　　B.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$　　C.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　D.$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

二、填空题

11、若椭圆经过原点，且焦点为F_1（1，0），F_2（3，0），则其离心率为________________

12．动点P在椭圆$4x^2+9y^2=36$上,作PA⊥x轴于Q,则PQ的中点的轨迹方程是________

13．已知圆$C:(x+1)^2+y^2=25$及点$A(1,0)$,Q为圆上一点,AQ的垂直平分线交CQ于M,则点M的轨迹方程为______________

14、设F_1，F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的左，右焦点，$P$为椭圆上任一点，点$M$的坐标为(6,4)，

则$|PM|+|PF_1|$的最大值为_____________.

15、$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆 C 的上半部分于点 P，则过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线与直线 $x=\frac{a^2}{c}$的交点的坐标是__________

三、解答题

16、已知过 M(0,2)的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于 A、B 在上，$\overrightarrow{MA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB}$，求 l 的方程

17、已知直线l：$y=kx+2$与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交于两个两点A，B，

(1) 若$\angle AOB=90^\circ$求k的值(2)若$\angle AOB$为锐角求k的范围。

18、已知直线 l：$y=x+\sqrt{6}$，圆 O：$x^2+y^2=5$，椭圆 E：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 被圆 O 截得的弦长与椭圆的短轴长相等.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)过圆 O 上任意一点 P 作椭圆 E 的两条切线，若切线都存在斜率，求证：两切线的斜率之积为定值.

椭圆练习（廖老师出题）

一、选择

1．F_1、F_2是定点，$|F_1F_2|=6$，动点M满足$|MF_1|+|MF_2|=6$，则点M的轨迹是 （C）

A．椭圆　　B．直线　　C．线段　　D．圆

2、椭圆$mx^2+y^2=1$的长轴是短轴长的2倍,则$m=$(C)

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 2 (C) 4或$\frac{1}{4}$ (D) 2或$\frac{1}{2}$

3．椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上一点M到焦点$F_1$的距离为2，N是$MF_1$的中点，则|ON|= （ B ）

A、2　　B、4　　C、6　　D、8

4、$2<m<6$是方程$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{6-m}=1$表示椭圆的(B)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分与不必要条件

解析：选B　若$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{6-m}=1$表示椭圆，则有$\begin{cases} m-2>0, \\ 6-m>0, \\ m-2\neq 6-m, \end{cases}$ $\therefore 2<m<6$且$m\neq 4$，

故$2<m<6$是$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{6-m}=1$表示椭圆的必要不充分条件．

5．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（**a>b>0**）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的弦AB的中点坐标为(2,1)， （B ）

A．$x+y+3=0$ B．$x+y-3=0$ C．$x-y+3=0$ D．$x-y-3=0$

6、设F_1，F_2是椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为30°的等腰三角形，则$E$的离心率为(C)A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{2}{3}$ C.$\frac{3}{4}$ D.$\frac{4}{5}$

解：由题意可得$|PF_2|=|F_1F_2|$，$\therefore 2\left(\frac{3}{2}a-c\right)=2c$，$\therefore 3a=4c$，$\therefore e=\frac{3}{4}$.

7、已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的两焦点为F_1，F_2，点M在椭圆上，$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则$M$到$y$轴的距离为(B) A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　B.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\sqrt{3}$

解：由条件知，点M在以线段F_1F_2为直径的圆上，该圆的方程是$x^2+y^2=3$，即$y^2=3-x^2$，代入椭圆方程得$\frac{x^2}{4}+3-x^2=1$，解得$x^2=\frac{8}{3}$，则$|x|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，即点M到y轴的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

8、椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两顶点为$A(a,0)$，$B(0,b)$，且左焦点为$F$，$\triangle FAB$是以角$B$为直角的直角三角形，椭圆的离心率$e$为(B)A.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　B.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C.$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　D.$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

解：$b^2=ac$，$e^2+e-1=0$，解得$e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.又$e>0$，故所求的椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9、椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4+k}=1$的离心率为$\frac{4}{5}$，则$k$的值为(C)

A．-21　B．21　C．$-\frac{19}{25}$或21　D.$\frac{19}{25}$或21

解析：选C　若$a^2=9$，$b^2=4+k$，则$c=\sqrt{5-k}$，由$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，即$\frac{\sqrt{5-k}}{3}=\frac{4}{5}$，得$k=-\frac{19}{25}$;

若 $a^2=4+k$，$b^2=9$，则 $c=\sqrt{k-5}$，由$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，即$\frac{\sqrt{k-5}}{\sqrt{4+k}}=\frac{4}{5}$，解得 $k=21$.

10、已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点，以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16，则椭圆 C 的方程为(　D　)

A.$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$　B.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$　C.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　D.$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

解　∵椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$a=2b$.故椭圆方程为 $x^2+4y^2=4b^2$.

∵双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线方程为 $x\pm y=0$，∴渐近线 $x\pm y=0$ 与椭圆 $x^2+4y^2=4b^2$ 在第一象限的交点为$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}b，\frac{2\sqrt{5}}{5}b\right)$，∴由圆锥曲线的对称性得四边形在第一象限部分的面积为$\frac{2\sqrt{5}}{5}b\times\frac{2\sqrt{5}}{5}b=4$，∴$b^2=5$，即 $a^2=4b^2=20$. 故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.[答案]　D

二、填空题

11、若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1，0)$，$F_2(3，0)$，则其离心率为___1/2_____________

12．动点 P 在椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 上,作 PA$\perp x$轴于Q ,则 PQ 的中点的轨迹方程是 $4x^2+36y^2=36$___

13.已知圆$C:(x+1)^2+y^2=25$及点$A(1,0)$,Q为圆上一点，AQ 的垂直平分线交 CQ 于 M，则点 M 的轨迹方程为_$\frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{21}=1$____

14、设 F_1，F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左，右焦点，P 为椭圆上任一点，点 M 的坐标为(6,4)，则$|PM|+|PF_1|$的最大值为___15___.

15、$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆 C 的上半部分于点 P，则过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线与直线 $x=\frac{a^2}{c}$的交点的坐标是____

解：$P\left(-c，\frac{b^2}{a}\right),F_2(c,0)$，$k_{PF_2}=-\frac{b^2}{2ac},k_{F_2Q}=\frac{2ac}{b^2}$,直线$F_2Q$: $y=\frac{2ac}{b^2}(x-c)$

令 $x=\frac{a^2}{c}$ 得 $y=2a,Q(\frac{a^2}{c},2a)$

三、解答题

16、已知过 M(0,2)的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于 A、B 在上，$\overrightarrow{MA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB}$,求 l 的方程

解：当$l\perp x$轴时，$\overrightarrow{MA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB}$不成立于是

设l: $y=kx+2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{MA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{MB},(x_1,y_1-2)=\frac{5}{3}(x_2,y_2-2)$

$x_1=\frac{5}{3}x_2(1),y_1-2=\frac{5}{3}(y_2-2)$

联立$\begin{cases}y=kx+2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$消 y 得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$

即$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+1}(2),x_1x_2=\dfrac{12}{4k^2+1}(3)$,

由(1)(2)得$x_1=-\dfrac{10k}{4k^2+1},x_2=-\dfrac{6k}{4k^2+1}$代入(3)得,

$\dfrac{60k^2}{(4k^2+1)^2}=\dfrac{12}{4k^2+1},k^2=1,k=\pm1,$此时$\Delta>0$,所求直线$l:y=\pm x+2$

17、已知直线l：$y=kx+2$与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$相交于两个两点A，B，

(1) 若$\angle AOB=90°$求k的值(2)若$\angle AOB$为锐角求k的范围。

解：(1)答$y=\pm 2x+2$

(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,因 $\angle AOC$为锐角

故$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}>0,x_1x_2+y_1y_2>0$ (1)

联立$\begin{cases}y=kx+2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$消$y$得$(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$

$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\dfrac{12k^2}{4k^2+1}-\dfrac{32k^2}{4k^2+1}+4=\dfrac{4-4k^2}{4k^2+1}$,

代入(1)得$\dfrac{16-4k^2}{4k^2+1}>0,k^2<4,-2<k<2$

由$\Delta=16^2k^2-48(4k^2+1)$

由(2)得$k^2>\dfrac{3}{4},k<-\dfrac{\sqrt3}{2}或k>\dfrac{\sqrt3}{2}$,综上$-2<k<-\dfrac{\sqrt3}{2}$或$\dfrac{\sqrt3}{2}<k<2$

19、已知直线l：$y=x+\sqrt6$，圆O：$x^2+y^2=5$，椭圆E：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\dfrac{\sqrt3}{3}$，直线$l$被圆$O$截得的弦长与椭圆的短轴长相等.

(1)求椭圆E的方程；

(2)过圆O上任意一点P作椭圆E的两条切线，若切线都存在斜率，求证：两切线的斜率之积为定值.

解:(1)设椭圆的半焦距为c，圆心O到直线l的距离$d=\dfrac{\sqrt6}{\sqrt{1+1}}=\sqrt3$，$\therefore b=\sqrt{5-3}=\sqrt2$.

由题意知$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt3}{3},\\a^2=b^2+c^2,\\b=\sqrt2,\end{cases}$ $\therefore a^2=3$，$b^2=2$. $\therefore$椭圆E的方程为$\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{2}=1$.

(2)设过$P(x_0，y_0)$的切线$y=kx+m$，$\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{2}=1$.

联立$\begin{cases}y=kx+m\\2y^2+3x^2=6\end{cases}$，消y得$\begin{cases}y=kx+m\\2y^2+3x^2=6\end{cases}$消$y$得:$(2k^2+3)x^2+4kmx+2m^2-6=0$

由$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+3)(2m^2-6)=0$得$2k^2-m^2+3=0$

由$P(x_0，y_0)$在$y=kx+m$上，得$y_0=kx_0+m,\therefore m=y_0-kx_0$代入$2k^2-m^2+3=0$

得$2k^2-(y_0-kx_0)^2+3=0$按k整理得，$(2-x_0{}^2)k^2-2x_0y_0k+3-y_0{}^2=0$

两切线的斜率k_1和k_2就是此方程的两个根，所以$k_1k_2=\dfrac{3-y_0{}^2}{2-x_0{}^2}=\dfrac{3-(5-x_0{}^2)}{2-x_0{}^2}=-1$