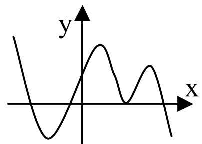
文科导数练习 (廖老师出题)

一、选择

1、若 $y=f'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ (　　)

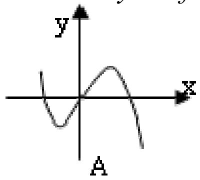


第1题

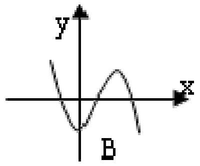
A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间

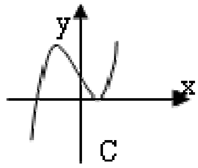
2、已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ 的图象是(　　)



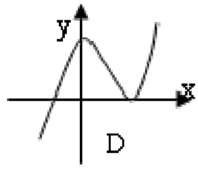
A



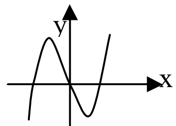
B



C



D



第2题

3、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（　）

A $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$　　B (π,2π)　C $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$　　D (2π,3π)

4、若 a>0, b>0, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于（　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

5、若函数 $y=x^3-3x+a$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A、$(-2,2)$　B、$[-2,2]$　C、$(-\infty,-1)$　D、$(1,+\infty)$

6．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5$或$a\ge 7$

二、填空题

7、曲线 $y=-x^3+3x+2$ 在点(0,2)处的切线方程为________

8、函数 $y=3x^2-2\ln x$ 的单调递增区间为________

9、函数 $f(x)=a\ln x+x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 a 的值为________

10、已知函数 $f(x)=\ln x-f'(1)x^2+5x$，则 $f(1)=$________.

11．已知函数 $f(x)=x^3+x+c$ 的一条切线是 $y=4x+3$，则 C=______

12、直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与曲线 $y=-\frac{1}{2}x+\ln x$ 相切，则 b 的值是________

13．一质点运动的方程为 $s=8t^2-3t^3$. 求质点在 $t=1$ 时速度=_______

14、已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<f'(x)$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，则 $a=e^{\sqrt{2012}}f(2013)$与$b=e^{2013}f(\sqrt{2012})$ 的大小关系是________

三、解答题

15、求过点(1,0)的直线与曲线 $y=x^3$ 的相切

16、已知函数 $f(x)=x(x-a)^2, a$ 是大于零的常数

(Ⅰ)当 a＝1 时，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间[1,2]上单调递增，求实数 a 的取值范围

17、已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x$ 的图象在点 $P(1,f(1))$ 处的切线斜率为 10

(Ⅰ)求实数 a 的值（Ⅱ）判断方程 $f(x)=2x$ 根的个数，证明你的结论

18、已知 $x=-1$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$ 的一个极值点

（I）试用含 a 的代数式表示 b；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

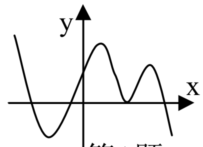
导数练习

一、选择

1、若 $y=f'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ （ B ）

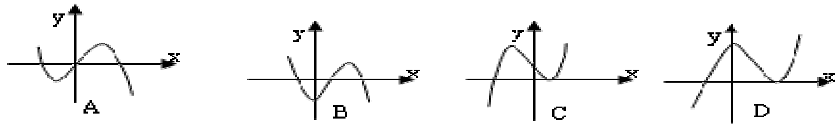
A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

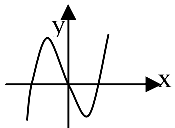
C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间



第1题

2、已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ 的图象是（ C ）





第2题

3、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（B）

A $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ B (π,2π) C $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ D (2π,3π)

4、若 a>0, b>0, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于 D

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

5、若函数 $y=x^3-3x+a$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是(A)

A、$(-2,2)$　B、$[-2,2]$　C、$(-\infty,-1)$　D、$(1,+\infty)$

6．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是（B ）A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5$或$a\ge 7$

二、填空题

7、曲线 $y=-x^3+3x+2$ 在点(0,2)处的切线方程为_ $y=3x+2$ ____

8、函数 $y=3x^2-2\ln x$ 的单调递增区间为_ $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ _

9、函数 $f(x)=a\ln x+x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 a 的值为_-1____

10、已知函数 $f(x)=\ln x-f'(1)x^2+5x$，则 $f(1)=$___3_____.

11．已知函数 $f(x)=x^3+x+c$ 的一条切线是 $y=4x+3$，则 C=_5 或 1_____

解：设切点是(x_0,y_0),因 $f'(x)=3x^2+1$，于是 $k_{切}=f'(x_0)=3{x_0}^2+1=4$，$x_0=\pm 1$，

当 $x_0=1$ 时 $y_0=7$，$2+c=7\Rightarrow c=5$，当 $x_0=-1$ 时 $y_0=-1$，$-2+c=-1\Rightarrow c=1$

12、直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与曲线 $y=-\frac{1}{2}x+\ln x$ 相切，则 b 的值是________

解：设切点是(x_0,y_0),因 $y=-\frac{1}{2}x+\ln x$ 故 $y'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$，

$$k_{切}=y'|_{x=x_0}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{2},x_0=1,y_0=-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+b,b=-1$$

13．一质点运动的方程为 $s=8t^2-3t^3$. 求质点在 $t=1$ 时速度=__10_____

解：速度 $v=s'=16t-6t^2$,当 $t=1$ 时，$v=16-6=10$

14、已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<f'(x)$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，则 $a=e^{\sqrt{2012}}f(2013)$与$b=e^{2013}f(\sqrt{2012})$ 的大小关系是________

解：$g(x)=\frac{f(x)}{e^x},g'(x)=\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=\frac{e^x[f'(x)-f(x)]}{e^{2x}}>0$

故 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 递增 $g(2013)>g(\sqrt{2012}),\frac{f(2013)}{e^{2013}}>\frac{f(\sqrt{2012})}{\sqrt{2012}},a>b$

三、解答题

15、求过点(1,0)的直线与曲线$y=x^3$的相切

解：设过(1,0)的直线与$y=x^3$相切于点$(x_0，x_0^3)$，所以切线方程为$y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，

即$y=3x_0^2x-2x_0^3$，又(1,0)在切线上，则$x_0=0$或$x_0=\frac{3}{2}$，

当$x_0=0$时，切线$y=0$ 当$x_0=\frac{3}{2}$时，切线$y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$

16、已知函数$f(x)=x(x-a)^2$,a是大于零的常数

(Ⅰ)当a＝1时，求$f(x)$的极值；(Ⅱ)若函数$f(x)$在区间[1,2]上单调递增，求实数a的取值范围

解：(Ⅰ)当a＝1时，$f(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

令$f'(x)=0$得$x_1=\frac{1}{3},x_2=1$，

x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大	递减	极小	递增

于是$f(x)_{极大}=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27},f(x)_{极小}=f(1)=0$

（Ⅱ）$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$ $f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

令$f'(x)=0$得$x_1=\frac{a}{3},x_2=a$，

因为$a>0$，所以$\frac{a}{3}<a$

因为$f(x)$在 [1,2]上单调递增

所以$f(x)\geq 0$对$x\in[1,2]$恒成立

于是$[1,2]\subseteq(-\infty,\frac{a}{3}]$或$[1,2]\subseteq[a,+\infty)$，于是$\frac{a}{3}\geq 2$或$0<a\leq 1$故$a\geq 6$或$0<a\leq 1$

17、已知函数$f(x)=x^2+a\ln x$的图象在点$P(1,f(1))$处的切线斜率为10

(Ⅰ)求实数a的值（Ⅱ）判断方程$f(x)=2x$根的个数，证明你的结论

解：(Ⅰ) $f(x)=x^2+a\ln x$，定义域$(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}$

$f'(1)=2+a=10,a=8$，$f(x)=x^2+8\ln x$

（Ⅱ）方程$f(x)=2x$就是$x^2+8\ln x=2x,x^2-2x+8\ln x=0,$

设$g(x)=x^2-2x+8\ln x,g'(x)=2x-2+\frac{8}{x}=\frac{2(x^2-x+4)}{x}>0$

于是$g(x)$在$(0,+\infty)$上递增，因为$g(1)=1-2=-1<0,g(e)=e^2-2e+8>0$

于是$g(x)$在$(1,e)$上有一零点，故$g(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点

方程$f(x)=2x$只有一个根

18、已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx,$且$f'(-1)=0$

(I) 试用含a的代数式表示b；（Ⅱ）求$f(x)$的单调区间；

解：(I) 依题意，得$f'(x)=x^2+2ax+b$，由$f'(-1)=1-2a+b=0$得$b=2a-1$

（Ⅱ）由(I) 得$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a-1)x$，

故$f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 $x=1-2a$

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1-2a)$ 和 $(-1,+\infty)$，单调减区间为 $(1-2a,-1)$；当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1-2a,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,1-2a)$