2013年漳州市普通高中毕业班质量检查

数学（文科）试题

（满分：150分，考试时间：150分钟）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）．本试卷共5页．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．考生作答时，将答案答在答题卡上．请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效．在草稿纸、试题卷上答题无效．

3．选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；非选择题答案使用0．5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚．

4．保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

参考公式：

样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的标准差

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本平均数

柱体体积公式

$V=Sh$

其中 S 为底面面积，h 为高

锥体体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 为底面面积，h 为高

球的表面积、体积公式

$S=4\pi R^2$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 为球的半径

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．i 是虚数单位，若集合 $A=\{-1,1,i,-i\}$，则下列选项不正确的是

A．$i\in S$　　B．$i^2\in S$　　C．$i^3\in S$　　D．$\frac{2}{i}\in S$

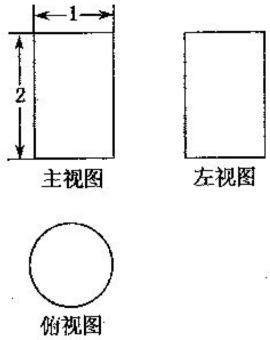
2．命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant0$"的否定是

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant0$　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$　　C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$　　D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant0$

3．已知角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的正半轴重合，终边与单位圆交点的纵坐标为 $\frac{4}{5}$，则 $\cos\alpha$

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\pm\frac{3}{5}$　　D．$\pm\frac{4}{5}$

4. 一个空间几何体的主视图和左视图都是矩形，俯视图是一个的圆，尺寸如图，那么这个几何体的全面积为



A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. 2π　　C. $\frac{5}{2}\pi$　　D. 3π

5. 直线 l：$y=k(x+1)$ 与圆 C：$x^2+y^2=2$ 的位置关系是

A. 相交　　B. 相切

C. 相交或相切　　D. 相交或相离

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ h(x) & (x<0)\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-4)$ 的值是

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. 2

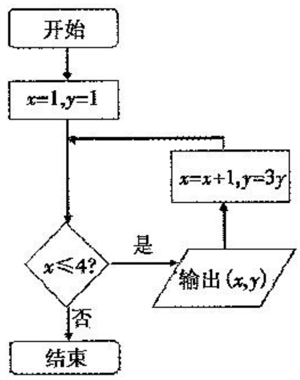
7. 已知双曲线的渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$，且双曲线的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同，则双曲线方程为

A. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{24}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

8. 漳州某商场在春节期间举行抽奖促销活动，规则是：从装有编号为0，1，2，3四个完全相同的金蛇形小玩具抽奖箱中同时抽出两个小玩具，两个小玩具的号码之和等于5中一等奖，等于4中二等奖，等于3中三等奖，则中奖的概率是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

9. 如图所示程序框图的输出的所有点（x，y）都在函数



A. $y=x^3$ 的图象上　　B. $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象上

C. $y=3^x$ 的图象上　　D. $y=3^{x-1}$ 的图象上

10. 在△ABC 中，已知 D 是 AB 边上一点，若 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

11. 已知向量 $\vec{a}=(x^2-2z,1)$，$\vec{b}=(1,y^2+z)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，若变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geq-1\\ y\geq x+1\\ 3x+2y\leq5\end{cases}$，则 z 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=(x-\frac{1}{2})^3+1$，

若 $f(\frac{1}{2013})+f(\frac{2}{2013})+f(\frac{3}{2013})+\cdots+f(\frac{2010}{2013})+f(\frac{2011}{2013})+f(\frac{2012}{2013})=503(a^2+b^2)$，则 ab 的最大值

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分．把答案填在答题卡相应位置．

13. 某调查公司对10个城市居民年平均收入x与小汽车销售量y进行统计，得到一组数据$(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,10)$，根据它们的散点图知$x$，$y$具有线性相关关系，且它们之间的线性回归方程是$\hat{y}=2x+10$，若$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=12$，则$y_1+y_2+\cdots+y_{10}=$______．

14. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_5+a_6=4$，则$\log_2(2^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdots 2^{a_{10}})=$____________．

15. 一位同学在研究椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$与圆$x^2+y^2=r^2$的性质时，联想已知在圆上一点$M(x_0,y_0)$处的切线方程为$xx_0+yy_0=r^2$，采用类比的思想，得到在椭圆上一点$M(x_0,y_0)$处的切线方程为____________．

16. 在平面直角坐标系中，若点M，N同时满足：①点M，N都在函数$f(x)$图象上；②点M，N关于原点对称，则称点对(M,N)是函数$y=f(x)$的一个"望点对"（规定点对(M,N)与点对(N,M)是同一个"望点对"）．那么函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ -x^2-2x & (x\leqslant 0)\end{cases}$的"望点对"的个数为____________．

三、解答题：本大题共6小题，共74分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17. （本题满分12分）

在$\triangle ABC$中，$\cos C=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$．

（Ⅰ）求$\sin A$值；

（Ⅱ）设$AC=\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积．

18. （本题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=1$，且a_2，a_4-2，a_6成等比数列．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

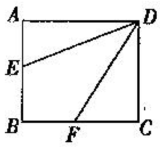
（Ⅱ）设$b_n=\dfrac{3}{(n+1)(a_n+2)}(n\in N_+)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$．

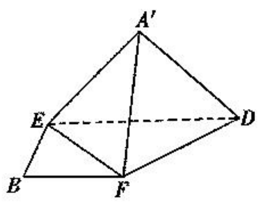
19. （本题满分12分）

如图，边长为3的正方形$ABCD$中，点E，F分别为边AB，BC上的点，将$\triangle AED$，$\triangle DCF$分别沿DE，DF折起，使A，C两点重合于点A'

（Ⅰ）求证：$A'D\perp EF$；

（Ⅱ）当$BE=BF=\dfrac{1}{3}BC$时，求三棱锥$E-A'FD$的体积．





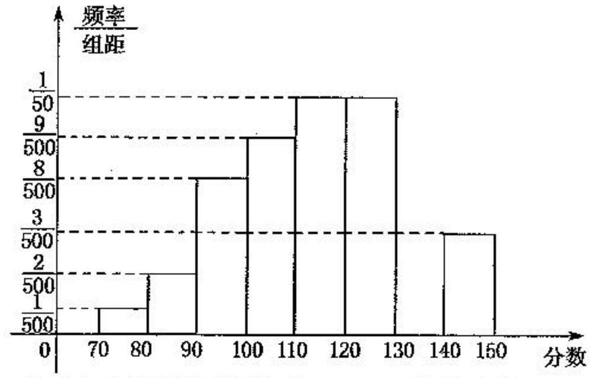
20. （本题满分12分）

漳州市有甲、乙两所学校高一年级分别有1200人和1000人，为了了解这两所学校全体高一年级学生在期末市质检的数学成绩情况，采用分层抽样方法从两所学校一共抽取了110名学生的数学成绩，作出了甲校频数分布表和乙校的频率分布直方图：

甲校：（表一）

分组	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)	[100, 110)
频数	3	4	8	15
分组	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150]
频数	15	x	3	2

乙校：（图二）



（Ⅰ）计算表一中的 x 值，并求出乙校数学成绩在 [130, 140] 的人数

（Ⅱ）若规定考试成绩在[120,150]内为优秀，请分别估计两所学校数学成绩的优秀率；

（Ⅲ）由以上统计数据填写下面 2×2 列联表，并判断是否有 95% 的把握认为两所学校的数学成绩有差异.

参考数据与公式：由列联表中数据计算 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

临界值表：

$P(K\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

	甲校	乙校	总计
优秀			
非优秀			
总计			

21.（本题满分 12 分）

设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$

（Ⅰ）求抛物线的标准方程；

（Ⅱ）若点 P 是抛物线上的动点，点 P 在 y 轴上的投影是 Q，点 $M\left(1,\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，试判断 $|PM|+|PQ|$ 是否存在最小值，若存在求出其最小值，若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）过抛物线焦点 F 作互相垂直的两直线 l 与 l 分别交抛物线于 A、C、B、D，求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

22.（本题满分 14 分）

已知：函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{a}{2}$

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $P(1,0)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）设 $x_1>x_2>0$，求证：$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<x_1+x_2$

2013年漳州市普通高中毕业班质量检查

数学(文科)试题参考答案

一、选择题：本大题共12题，每小题5分，满分60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	C	A	A	D	B	D	B	A	B

二、填空题（本大题共4小题，每小题4分，共16分）

13. 124　14. 20　15. $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$　16. 1

三、解答题：本大题共6小题，满分74分. 解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解:(Ⅰ)在$\triangle ABC$中,由$\cos C=-\frac{\sqrt{3}}{3}<0$得$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$且$C\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ ………………… 2分

$\therefore B\in(0,\frac{\pi}{2})$,由$\sin B=\frac{1}{3}$,得$\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ………………………………… 3分

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{1}{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

……………………………………………………………………………… 6分

(Ⅱ)由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$所以$BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=3\sqrt{2}$ ………………………… 8分

因此,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}$. ……………… 12分

18. 解:(Ⅰ)由题意得$(a_4-2)^2=a_2a_6$, ……………………………………………… 2分

即$(3d-1)^2=(1+d)(1+5d)$,解得$d=3$或$d=0$ ………………………… 4分

由已知公差d不为0,所以$d=3$,故$a_n=3n-2,n\in N^*$ ……………… 5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$b_n=\frac{3}{(n+1)(a_n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ……………………… 10分

$\therefore S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ………………………… 11分

$\therefore S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ ……………………………………………… 12分

19. 解:(Ⅰ)将$\triangle AED$,$\triangle DCF$分别沿DE,DF折起,使A,C两点重合于点A',

$\therefore DA'\perp AE,DA'\perp AF$ ……………………………………………… 2分

又$\because AE\subset$面AEF,$AF\perp$面AEF,且$AE\cap AF=A'$ ………………………… 4分

$\therefore DA'\perp$面AEF ……………………………………………………… 5分

$\therefore DA' \perp EF$ ………………………………………………………………………… 6分

(Ⅱ)在边长为3的正方形 $ABCD$ 中,$BE=BF=\frac{1}{3}BC=1$,$\therefore AE=CF=2$

$\therefore EF=\sqrt{2}, AE=AF=2$,

$\therefore S_{\triangle AFE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore V_{E-AFD}=V_{D-AFE}=\frac{1}{3}S_{\triangle AFE}\cdot AD$ ………………………………………… 9分

$\therefore V_{E-AFE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. ………………………………………………………………… 12分

20.(Ⅰ)依题意,抽取比例为$\frac{110}{1200+1000}=\frac{1}{20}$,所以甲校抽取 $1200\times\frac{1}{20}=60$ 人,乙校抽取 $1000\times\frac{1}{20}=50$ 人,于是可解得 $x=10$

根据乙校频率分布直方图知:乙校数学成绩在[130,140]频率为$\frac{7}{50}$,

乙校数学成绩在[130,140]的人数为7. ……………………………………………… 5分

(Ⅱ)估计甲校优秀率为$\frac{15}{60}\times100\%=25\%$,乙校优秀率为$\frac{20}{50}\times100\%=40\%$. ………… 7分

(Ⅲ)表格填写如图,

	甲校	乙校	总计
优秀	15	20	35
非优秀	45	30	75
总计	60	50	110

………………………………………………………………………………………… 9分

$k^2=\frac{110(15\times30-20\times45)^2}{60\times50\times35\times75}\approx2.83>2.706, 2.83<3.841$ ………………………… 11分

$\therefore$ 没有95%的把握认为两个学校的数学成绩有差异. ……………………………… 12分

21.(Ⅰ)由题意知准线为直线 $l:x=-\frac{1}{2}$ 的抛物线方程为 $y^2=2x$. ………………………… 3分

(Ⅱ)易知点 M 在抛物线的外侧,延长 PM 交直线 $x=-\frac{1}{2}$ 于 N,

由抛物线的定义可知 $|PN|=|PQ|+\frac{1}{2}=|PF|$,$\therefore |PM|+|PQ|=|PM|+|PF|-\frac{1}{2}$

………………………………………………………………………………… 4分

$\therefore |PM|+|PQ|$ 的最小值也就是 $|PM|+|PF|$ 的最小值

$\therefore$ 当三点 M,P,F 共线时，$|PM|+|PF|$ 最小，此时为 $|PM|+|PF|=|MF|$，…… 5分

又焦点坐标为 $F(\frac{1}{2},0)$，所以 $|MF|=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{15}}{2})^2}=2$，

所以 $|PM|+|PQ|$ 的最小值为 $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ………………………………………… 7分

（Ⅲ）依题意得过点 F 的直线 l 的斜率显然存在且不等于0.

$\therefore$ 设过 F 的直线 l 方程为 $y=k(x-\frac{1}{2})$，$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-\frac{1}{2}) \\ y^2=2x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(k^2+2)x+\frac{k^2}{4}=0$，

$\triangle=4k^2+4>0$ 恒成立.

且由韦达定理得 $x_1+x_2=1+\frac{2}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{4}$， ………………………………………… 9分

所以 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2+\frac{2}{k^2}$，

$\because l\perp l'$，$\therefore -\frac{1}{k}$ 代 k 可得 $|BD|=2+2k^2$. ………………………………………… 10分

$\because AC\perp BD$

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}(2+\frac{2}{k^2})(2+2k^2)=2(2+k^2+\frac{1}{k^2})$

$\geqslant 8$，

即四边形 $ABCD$ 面积的最小值为8. ………………………………………… 12分

22. 解：$\because f(x)=\ln x+\frac{a}{x+1}-\frac{a}{2}$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，………………………………………… 1分

且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{(x+1)^2}$ ………………………………………… 2分

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}$，$\therefore f'(1)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，函数 $f(x)$ 在点 $P(1,0)$ 处的切

线方程 $y=\frac{1}{2}(x-1)$ ………………………………………… 4分

（Ⅱ）$\because f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-ax}{x(x+1)^2}$，且 $x\in(0,+\infty)$

$\therefore$ 由函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数

得 $(x+1)^2-ax=x^2+2x+1-ax\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，………………………… 6分

$\therefore a\leqslant x+\frac{1}{x}+2$ ………………………………………… 7分

$\because x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 等号成立，$\therefore a\leqslant 2+2$，即 $a\leqslant 4$ ······················· 9 分

（Ⅲ）$\because x_1>x_2>0$

要证 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<x_1+x_2$，只需证 $\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}<\dfrac{x_1}{x_2}+1$， ······················· 10 分

即证：$\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$，

$\because \ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}=\ln\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{2}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}-1$，

由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，得 $a\leqslant 4$

$\therefore$ 当 $a=2$ 时 $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x+1}-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数

$\because x_1>x_2>0$，$\therefore \dfrac{x_1}{x_2}>1$ $\therefore$ 当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x+1}-1>f(1)=0$ ··············· 13 分

$\therefore \ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}=\ln\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{2}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}-1>0$，

$\therefore x_1>x_2>0$ 时，$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<x_1+x_2$ 成立 ······················· 14 分