

2013 年莆田市高中毕业班教学质量检查试卷

数学（文科）

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)。本试卷满分 150 分。考试时间 120 分钟。

参考公式：

样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本平均数

柱体体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 为底面面积, h 为高

锥体体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 为底面面积, h 为高

球的表面积、体积公式

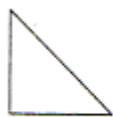
$$S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 为球的半径

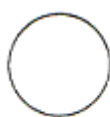
第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- i 是虚数单位, $2 - i^5$ 等于 ()
A. 1 B. 3 C. $2 + i$ D. $2 - i$
- 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{x | -1 < x < 0\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$ C. $\{x | 0 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$
- 已知平面向量 $\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{b} = (-3, 1)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 x 的值等于 ()
A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3
- “ $a < 0$ ” 是 “一元二次方程 $x^2 + x + a = 0$ 有一个正根和一个负根” 的 ()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要
- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$, 前 n 项和为 S_n 。若 $S_3 = \frac{7}{2}$, 则 S_6 等于 ()
A. $\frac{31}{2}$ B. $\frac{63}{2}$ C. 63 D. $\frac{127}{2}$
- 若某几何体的正视图、侧视图、俯视图完全相同, 则该几何体的正视图不可能的是 ()



A



B



C



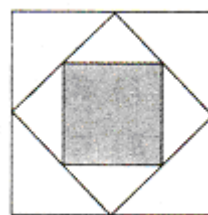
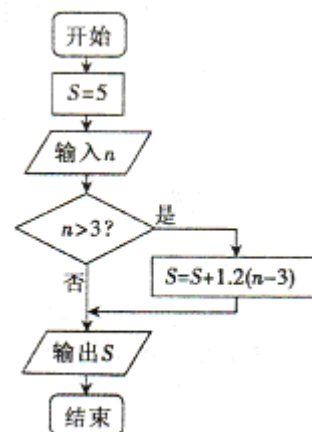
D

7. 依据小区管理条例, 小林同学编制了求其小区每个住户每月应缴纳卫生费的程序框图, 并编写了相应的程序。已知小要家共有 6 口人 (即 $n=6$), 则他家每个月应缴纳的卫生费 (单位: 元) 是 ()

- A. 3.6 B. 5 C. 7.2 D. 8.6

8. 任意画一个正方形, 再将这个正方形各边的中点相连得到第二个正方形, 依此类推, 这样一共画了 3 个正方形, 如图所示。若向图形中随机投一点, 则所投点落在第三个正方形的概率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$



9. 若实数 x 和 y 满足 $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \geq 3, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z = y - x$ 的取值范围是 ()

- A. $[1, 3]$ B. $[-3, 1]$ C. $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ D. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

10. 已知两圆的圆心均在直线 $x + y + c = 0$ 上, 且两圆相交于 $A(1, 3), B(m, -1)$ 两点, 则 c 的值是 ()

- A. -4 B. 0 C. 8 D. 2

11. 已知 a, b 为正实数, 若函数 $f(x) = ax^3 + bx + ab - 1$ 是奇函数, 则 $f(2)$ 的最小值是 ()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

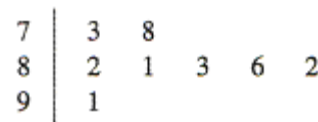
12. 已知 a, b, ω 是实数, 函数 $f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ 满足“图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 且在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处 $f(x)$ 取最小值”。若函数 $f(x)$ 的周期为 T , 则以下结论一定成立的是 ()

- A. $a = 0$ B. $b = 0$ C. $T = \frac{2}{3}\pi$ D. $\omega = 9$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在答题卡相应位置.

13. 某校高三年级 8 个班级参加“喜迎十八大”合唱比赛, 得分情况如茎叶图所示, 则这组数据的中位数是_____。



14. 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____。

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(x) \leq 1$, 则 x 的取值范围是_____。

16. 已知 P 是椭圆 E 上异于长轴端点的一点, F_1, F_2 分别是椭圆 E 的左、右焦点, M 是 $\square PF_1F_2$ 的内切圆的圆心。若 $S_{\square MPF_1} + S_{\square MPF_2} = 2S_{\square MF_1F_2}$, 则椭圆的离心率是_____。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n ， $s_3 = 6a_1$ 且对 $n \in N^*$ ，点 (n, a_n) 恒在直线 $f(x) = 2x + K$ 上，其中 K 为常数。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $T_n = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \cdots + \frac{1}{s_n}$ ，求 T_{20} 的值。

18. (本小题满分 12 分)

某校高三文科共有 100 名学生，在一次数学考试中，每道填空题的考前预估难度 p_i' 及考后实测难度 P_i 的数据如下表 (填空第 i 题的难度计算公式为 $P_i = \frac{R_i}{N}$ ，其中 R_i 为答对该题的人数， N 为参加测试的总人数)：

题号	1	2	3	4
考前预估难度值 x_i	0.9	0.8	0.6	0.6
考后实测难度值 P_i	0.8	0.8	0.7	0.4

(1) 定义描述填空题难度预估值与实测值偏离程度的统计量为 $S^* = \frac{1}{n} \left[(p_1' - P_1)^2 + (p_2' - P_2)^2 + \cdots + (p_n' - P_n)^2 \right]$ ，若 $S^* < 0.01$ ，则称填空题的难度预估是合理的，否则为不合理。请你判断该次测试中填空题的难度预估是否合理？并说明理由；

(2) 按学生解答填空第 4 题“对”、“错”的比例抽取出 5 名学生。若从已抽取的 5 名学生中随机选出 2 名作进一步分析，求被选出的 2 名学生中，恰有 1 名答对填空题第 4 题的概率。

19. (本小题满分 12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $a = 1, b = 2$ ，且 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1$ 。

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积 s ；

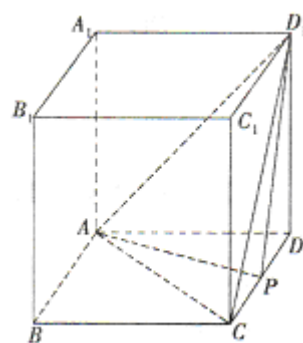
(2) 求 $\sin A$ 的值。

20. (本小题满分 12 分)

如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 为棱 CD 上的一点, 且三棱锥 $A-CPD_1$ 的体积为 $\frac{2}{3}$ 。

(1) 求 CP 的长;

(2) 请直接写出正方体的棱上满足 $C_1M \parallel$ 平面 APD_1 的所有点 M 的位置, 并任选其中的一点予以证明。

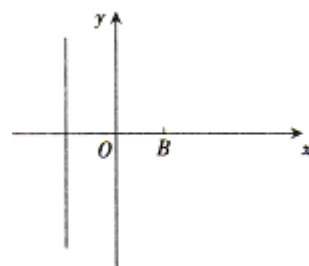


21. (本小题满分 12 分)

已知动圆 A 经过点 $B(1,0)$, 且和直线 $x+1=0$ 相切.

(1) 求圆心 A 的轨迹 E 方程;

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$ 为曲线 E 上的任意一点, 点 M 的坐标为 $(x_0+2, 0)$, 过点 M 作直线 PB 的垂线, 垂足为 N , 当 x_0 变化时, 线段 PN 的长度是否为定值? 若是, 请写出这个定值, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由。



22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率;

(2) 若 a 为实数, 函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上的极值, 求 a 的取值范围;

(3) 试问是否存在 $k, b \in \mathbb{N}$, 使得 $e^x > kx + b > f(x)$ 恒成立? 若存在, 请写出 k, b 的值, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由。

参考答案与解题提示

文科数学

(莆田市质检卷)

说明:

一、本解答指出了解答题主要考查的基础知识、基本能力和基本思想方法,并给出了一种或几种解法供参考.如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容,参照评分标准的精神制定相应的评分细则.

二、当考生解答题的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应给分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、选择题和填空题不给中间分,解答题只给整数分数.

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 5 分,满分 60 分.

1. D 2. C 3. A 4. C 5. B 6. D 7. D 8. B 9. A 10. B 11. C 12. B

二、填空题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 4 分,满分 16 分.

13. 82 14. $-\frac{1}{2}$ 15. $-1 \leq x \leq 2$ 16. $\frac{1}{2}$

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 本小题主要考查等差数列的概念、通项及其前 n 项和公式、数列求和等基础知识,考查运算求解能力,考查化归与转化思想、函数与方程思想. 满分 12 分.

解:(I)方法一:依题意 $a_n = 2n + k$, 得 $a_1 = 2 + k, a_2 = 4 + k, a_3 = 6 + k, \dots$ 3 分

所以 $S_3 = 12 + 3k$ 4 分

又 $S_3 = 6a_1$, 所以 $12 + 3k = 12 + 6k$, 解得 $k = 0$ 5 分

即 $a_n = 2n$ 6 分

方法二:依题意得 $a_n = 2n + k$, 1 分

所以 $a_{n+1} - a_n = (2n + 2 + k) - (2n + k) = 2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $2 + k$ 为首项, 2 为公差的等差数列. 3 分

因为 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 6$ 4 分

又 $S_3 = 6a_1$, 所以 $a_1 = 2$ 5 分

所以 $a_n = 2 + (n - 1) \times 2 = 2n$ 6 分

(II) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 2n}{2} \cdot n = n(n + 1)$, 7 分

所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$, 9 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{20} - \frac{1}{21}) \cdots \cdots 11 \text{ 分} \\ &= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \cdots \cdots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

18. 本小题主要考查统计量计算及其推断、古典模型及其概率计算等基础知识,考查数据处理能力、运算求解能力和应用意识,考查或然与必然思想. 满分 12 分.

解:(I) 该次考试填空题的难度预估不合理. 理由如下: 1 分

$$\begin{aligned} \text{因为 } S^* &= \frac{1}{4}[(0.9-0.8)^2 + (0.8-0.8)^2 + (0.6-0.7)^2 + (0.6-0.4)^2] \cdots \cdots 3 \text{ 分} \\ &= \frac{1}{4}[0.01 + 0.01 + 0.04] \\ &= 0.015 > 0.01. \cdots \cdots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

故该次考试填空题的难度预估是不合理的. 5 分

(II) 依题意知, 抽取出的 5 名学生中, 填空题第 4 题答对的有 2 人, 答错的有 3 人. 6 分

记抽取出的 5 名学生中, 填空题第 4 题答对的学生为 A_1, A_2 , 答错的学生为 B_1, B_2, B_3 7 分

则从 5 名学生中随机选出 2 名的所有基本事件如下: $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$, 共 10 个. 9 分

记“恰有 1 名答对填空题第 4 题”的事件为 M , 其中事件 M 的基本事件有 6 个. 10 分

$$\text{所以 } P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

答: 恰有 1 名答对填空题第 4 题的概率是 $\frac{3}{5}$ 12 分

19. 本小题主要考查平面向量的数量积、正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等基础知识,考查运算求解能力,考查化归与转化思想. 满分 12 分.

解:(I) 由 $a=1, b=2, \vec{CA} \cdot \vec{CB} = -1$ 得

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos C = -1, \cdots \cdots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 2\cos C = -1, \text{ 即 } \cos C = -\frac{1}{2}. \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又角 } C \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内角, 所以 } C = \frac{2\pi}{3}. \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 4分

$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6分

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 7分

$= 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7$, 8分

即 $c = \sqrt{7}$ 9分

由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ 10分

即 $\frac{\sqrt{7}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sin A}$ 11分

所以 $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 12分

3. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识, 考查空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力, 考查化归与转化思想、分类与整合思想. 满分 12 分.

解: (I) 依题意得, $AD \perp$ 平面 CPD , $AD = DD_1 = 2$.

所以 $V_{\text{三棱锥 } A-CPD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle CPD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times CP \times 2 = \frac{2}{3}$ 3分

所以 $CP = 1$ 5分

(II) M 点的位置为 A_1B_1 中点和 B 点. 7分

(i) 选取 A_1B_1 中点为 M , 证明如下:

取 C_1D_1 中点 N , 连接 PN, A_1N, C_1M , 如图 1.

$\because A_1M \parallel C_1N$, $\therefore$ 四边形 A_1MC_1N 为平行四边形, $\therefore C_1M \parallel A_1N$.

又 $\because AA_1 \parallel PN$, $\therefore$ 四边形 $APNA_1$ 为平行四边形, $\therefore A_1N \parallel AP$.

$\therefore C_1M \parallel AP$ 9分

又 $\because AP \subset$ 平面 APD_1 , $C_1M \not\subset$ 平面 APD_1 , 11分

$\therefore C_1M \parallel$ 平面 APD_1 12分

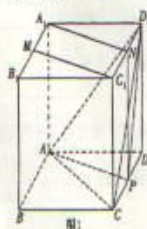


图1

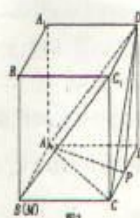


图2

(ii) 选取 B 点为 M , 证明如下:

连接 C_1B , 如图 2.

$\because AB \perp D_1C_1, \therefore$ 四边形 ABC_1D_1 为平行四边形, $\therefore C_1B \parallel D_1A$ 9 分

又 $\because D_1A \subset$ 平面 $APD_1, C_1B \not\subset$ 平面 APD_1 , 11 分

$\therefore C_1B \parallel$ 平面 APD_1 , 即 $C_1M \parallel$ 平面 APD_1 12 分

21. 本小题主要考查抛物线的标准方程与性质、直线的方程及其位置关系、点到直线的距离公式等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想. 满分 12 分.

解: (I) 方法一: 依题意, 由抛物线定义知, 轨迹 E 是以 $B(1, 0)$ 为焦点, 直线 $x = -1$ 为准线的抛物线, 2 分

所以轨迹 E 的方程是 $y^2 = 4x$ 4 分

方法二: 设 $A(x, y)$, 则 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x+1|$, 2 分

化简整理得 $y^2 = 4x$.

所以轨迹 E 的方程是 $y^2 = 4x$ 4 分

(II) 线段 PN 的长度为定值 2. 证明如下: 5 分

方法一: 当 $x_0 = 1$ 时, 点 $P(1, \pm 2)$, $PB \perp x$ 轴, 点 N 与点 B 重合,

$|PN| = |PB| = 2$ 6 分

当 $x_0 \neq 1$ 时, 直线 PB 的斜率 $k_{PB} = \frac{y_0}{x_0 - 1}$, 故直线 PB 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$,

即 $y_0x - (x_0 - 1)y - y_0 = 0$ 8 分

所以点 M 到直线 PB 的距离 $|MN| = \frac{|\frac{x_0 y_0}{x_0 - 1} + y_0|}{\sqrt{(\frac{y_0}{x_0 - 1})^2 + y_0^2}} = \frac{|y_0(x_0 + 1)|}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 1}} = |y_0|$, 11 分

所以 $|PN| = \sqrt{|PM|^2 - |MN|^2} = \sqrt{(-2)^2 + y_0^2 - y_0^2} = 2$ 12 分

综上, 线段 PN 的长度为定值 2. 12 分

方法二: 当 $x_0 = 1$ 时, 点 $P(1, \pm 2)$, $PB \perp x$ 轴, 点 N 与点 B 重合,

$|PN| = |PB| = 2$ 6 分

当 $y_0 = 0$ 时, 点 $P(0, 0)$, 点 $M(2, 0)$, 点 N 与点 M 重合,

$|PN| = |PM| = 2$ 7 分

当 $x_0 \neq 1$ 且 $y_0 \neq 0$ 时, 线段 PN 的长就是点 P 到直线 MN 的距离,

而直线 PB 的斜率 $k_{PB} = \frac{y_0}{x_0 - 1}$, 故直线 MN 的方程为 $y = -\frac{x_0 - 1}{y_0}(x - x_0 - 2)$,

即 $(x_0 - 1)x + y_0y - (x_0^2 + x_0 - 2) = 0$ 9 分

$$\text{所以 } |PN| = \frac{|(x_0-1)x_0+y_0^2-(x_0^2+x_0-2)|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}} = \frac{|2-2x_0+y_0^2|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{把 } y_0^2=4x_0 \text{ 代入得 } |PN| = \frac{|2x_0+2|}{\sqrt{x_0^2+2x_0+1}} = \frac{|2x_0+2|}{\sqrt{(x_0+1)^2}} = \frac{2|x_0+1|}{|x_0+1|} = 2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

综上, 线段 PN 的长度为定值 2. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

方法三: 依题意, 线段 PN 的长度就是 $\overrightarrow{PM}$ 在 $\overrightarrow{PB}$ 方向上的投影的绝对值,

$$\text{即 } |\overrightarrow{PN}| = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PB}|}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PM} = (2, -y_0), \overrightarrow{PB} = (-x_0+1, -y_0), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PN}| = \frac{|\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|2(-x_0+1)+y_0^2|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}} = \frac{|2-2x_0+y_0^2|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

下同方法二.

方法四: 当 $x_0=1$ 时, 点 $P(1, \pm 2)$, $PB \perp x$ 轴, 点 N 与点 B 重合.

$$|PN| = |PB| = 2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $y_0=0$ 时, 点 $P(0,0)$, 点 $M(2,0)$, 点 N 与点 M 重合,

$$|PN| = |PM| = 2. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

当 $x_0 \neq 1$ 且 $y_0 \neq 0$ 时, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H , 则 $|MH| = 2$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

因为 $|PB| = x_0+1$, $|MB| = x_0+1$, 所以 $|PB| = |MB|$,

所以 $Rt\triangle PBH \cong Rt\triangle MBN$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

得 $|BH| = |BN|$, 因此 $|PN| = |MH| = 2$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

综上, 线段 PN 的长度为定值 2. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 本小题主要考查导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性、极值、最值等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力、抽象概括能力, 考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想. 满分 14 分.

$$\text{解: (I) 因为 } f'(x) = -\frac{\ln x}{x} f'(1) = 0, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 0. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{(II) 因为 } f(x) = \frac{1+\ln x}{x}, x>0, \text{ 由 } f'(x) = -\frac{\ln x}{x}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x=1.$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上存在极值,

所以 $a < 1 < a+1$, 解得 $0 < a < 1$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(Ⅲ) 因为 $y = e^x$ 过点 $(0, 1)$, 结合函数 $y = e^x$ 的图象可知, 当 $b \geq 1$ 时, 直线 $y = kx + b$ 与函数 $y = e^x$ 的图象恒有公共点, 不合题意, 所以 $b < 1$, 又 $b \in \mathbb{N}$, 故 $b = 0$.

在不等式 $e^x > kx > f(x)$ 中, 令 $x = 1$, 得 $e > k > 1$, 又 $k \in \mathbb{N}$, 所以 $k = 2$.

以下证明 $k = 2, b = 0$ 时命题成立, 即证 $e^x > 2x > f(x)$ 恒成立. 8 分

方法一: 因为 $e^x > 2x > f(x) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > 2 > \frac{1 + \ln x}{x^2}$. (*)

(i) 设 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

则 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = e > 2$, 即不等式 $\frac{e^x}{x} > 2$ 成立. 10 分

(ii) 设 $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, 则 $h'(x) = \frac{x - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = -\frac{1 + 2\ln x}{x^3} (x > 0)$,

令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

则 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $h(x) \leq h(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e}{2} < 2$, 即不等式 $\frac{\ln x + 1}{x^2} < 2$ 成立. 13 分

综上所述(*)式成立, 即存在 $k = 2, b = 0$ 满足题意. 14 分

方法二: $e^x > 2x > f(x) \Leftrightarrow e^x > 2x$, 且 $2x^2 > 1 + \ln x$. (*)

(i) 设 $g(x) = e^x - 2x$, $g'(x) = e^x - 2$. 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \ln 2$.

则 $g(x)$ 在区间 $(0, \ln 2)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$. 即 $e^x > 2x$ 恒成立. 10 分

(ii) 设 $h(x) = 2x^2 - \ln x - 1$, 则 $h'(x) = 4x - \frac{1}{x} (x > 0)$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

则 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) \geq h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} > \ln \sqrt{e} - \frac{1}{2} = 0$.

即 $2x^2 > 1 + \ln x$ 恒成立. 13 分

综上所述(*)成立, 即存在 $k = 2, b = 0$ 满足题意. 14 分