2013年莆田市高中毕业班教学质量检查试卷

数学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)，第Ⅱ卷第21题为选考题，其他题为必考题．本试卷满分150分．考试时间120分钟．

参考公式：

样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的标准差

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]}$$

其中 $\overline{x}$ 为样本平均数

柱体体积公式

$V=Sh$

其中 S 为底面面积，h 为高

锥体体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 为底面面积，h 为高

球的表面积、体积公式

$S=4\pi R^2$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 为球的半径

第Ⅰ卷（选择题　共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.把答案填写在答题卷的相应位置。

1．设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\},A=\{2,4,6\},B=\{2,3,5\}$，则 $\left(\complement_U^A\right)\cap B$ 等于（　　）

A．$\{3,5\}$　　B．$\{4,6\}$　　C．$\{1,2,3,5\}$　　D．$\{1,2,4,6\}$

2．已知平面向量 $\vec{a}=(x,-1),\vec{b}=(-2,1)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则实数 x 的值等于（　　）

A．2　　B．-2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

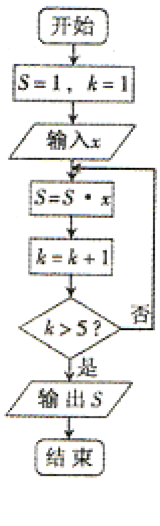
3．“$x>1$”是“$\ln x>0$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

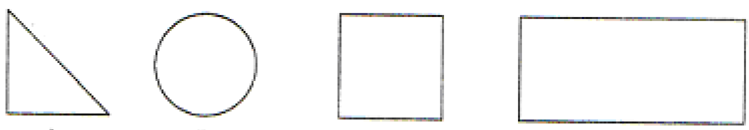
C．充要条件　　D．既不充分也不必要

4．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序。若输入 $x=i$（i 为虚数单位），则输出的结果是（　　）

A．1　　B．i　　C．-1　　D．$-i$

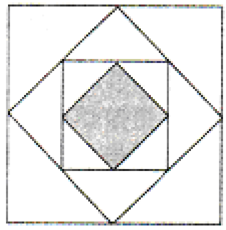


5．若某几何体的正视图、侧视图、俯视图完全相同，则该几何体的正视图不可能的是（　　）



A　　B　　C　　D

6．任意画一个正方形，再将这个正方体各边的中点相连得到第二个正方形，依此类推，这样一共画了 4 个正方形，如图所示。若向图形中随机投一点，则所投点落在第四个正方形的概率是（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{8}$　　D．$\dfrac{1}{16}$

7．抛物线 $y^2=4x$ 与过其焦点且垂直于 x 轴的直线的直线相交于 A、B 两点，其准线与 x 轴的交点为 M，则过 M,A,B 三点的圆的标准方程是（　　）

A．$x^2+y^2=5$　　B．$\left(x-1\right)^2+y^2=1$　　C．$\left(x-1\right)^2+y^2=2$　　D．$\left(x-1\right)^2+y^2=4$

8．在□ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c。若 $a=1,b=2$，且 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$，则 $\sin A$ 的值是（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

9．若不等式组 $\begin{cases} y\le -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-1\right), \\ y\le k\left(x+1\right), \\ y\ge 0 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个等腰三角形区域，则直线 $y=k\left(x+1\right)$ 的倾斜角 α 的大小是（　　）

A．30^0　　B．$30^0,75^0$　　C．$30^0,120^0$　　D．$75^0,120^0$

10．对于函数 $f\left(x\right)$，$x\in D$，若满足对任意正数 ε，总存在正数 δ，使得对任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1\ne x_2$，只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$，就有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$，则称函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 D 内具有性质 P。下列四个函数：

①$f\left(x\right)=x+2,x\in\left(0,2\right)$；　　②$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x},x\in\left(0,2\right)$；

③$f\left(x\right)=2^x,x\in\left[0,2\right]$；　　④$f\left(x\right)=\begin{cases} 4,x=0, \\ x^2,0<x\le 2. \end{cases}$

其中在定义域内具有性质 P 的函数的序号是（　　）

A．①②　B．①③　C．②④　D．③④

第Ⅱ卷（非选择题　　共 100 分）

二、填空题:本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．把答案填写在答题卷的相应位置．

11．若$\cos\alpha=\frac{1}{2},\alpha\in(0,\pi)$，则$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$____________________。

12．$(a+b)^2(b+c)^3$的展开式中ab^2c^2的系数是____________________。

13．已知a、b为实数，$ab>0$，若函数$f(x)=\frac{x}{a}+\frac{1}{b}\sin\frac{\pi x}{2}+a+b-1$是奇函数，则$f(1)$的最小值是__________________。

14．一组数据如茎叶图所示。若从中剔除 2 个数据，使得新数据组的平均数不变且方差最小，则剔除的 2 个数据的积等于____________。

0	3	8		
1	2	1	3	6
2	1			

15．已知 P 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支上异于顶点的一点，$F_1$、$F_2$分别是双曲线的左、右焦点，$M$是$\triangle PF_1F_2$的内切圆的圆心。若$S_{\triangle MPF_1}-S_{\triangle MPF_2}=\frac{1}{2}S_{\triangle MF_1F_2}$，则$\frac{b}{a}=$______________。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．把答案填写在答题卷的相应位置．

16．（本小题满分 13 分）

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，对$n\in N^*$，点(n,a_n)恒在直线$f(x)=-2x+k$上，点(n,S_n)恒在抛物线$g(x)=ax^2+x$上，其中k,a为常数。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求直线$f(x)$与抛物线$g(x)$所围成的封闭图形的面积。

17．（本小题满分 13 分）

某数学兴趣小组共 10 名学生，参加一次只有 5 道填空题的测试。填空第i题的难度计算公式为$P_i=\frac{R_i}{N}$（其中R_i为答对该题的人数，N为参加测试的总人数）。该次测试每道填空题的考前预估难度$p_i^{'}$及考后实测难度P_i的数据如下表：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度$p_i^{'}$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4
考后实测难度P_i	0.8	0.8	0.7	0.7	0.2

（1）定义描述填空题难度预估值与实测值偏离程度的统计量为$S^*=\frac{1}{n}\left[\left(p_1^{'}-P_1\right)^2+\left(p_2^{'}-P_2\right)^2+\cdots+\left(p_n^{'}-P_n\right)^2\right]$，若$S^*<0.01$，则称填空题的难度预估是合理的，否则为不合理。请你判断该次测试中填空题的难度预估是否合理？并说明理由；

（2）从该小组中随机抽取 2 个考生，记被抽取的考生中第 5 题答对的人数为ξ，求ξ的分布列及数学期望。

18．（本小题满分 13 分）

已知a为实数，函数$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+(a^2-2a)x$。

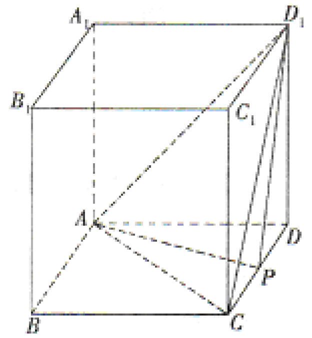
（1）当$a=1$时，求函数$f(x)$在$x=0$处的切线方程；

（2）若函数$f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减，求$f(-3)$的取值范围。

19．（本小题满分 13 分）

如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 为棱 CD 上的一点，且三棱锥 $A\text{-}CPD_1$ 的体积为 $\frac{2}{3}$。

（1）求 CP 的长；



（2）求直线 AD 与平面 APD_1 所成的角 θ 的正弦值；

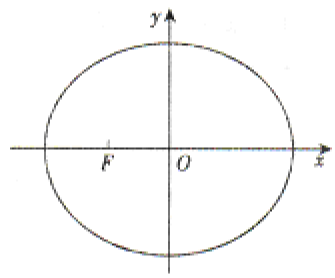
（3）请直接写出正方体的棱上满足 C_1M // 平面 APD_1 的所有点 M 的位置，并任选其中的一点予以证明。

20．（本小题满分 14 分）

已知直线 $\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0$ 过椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点。

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）F 为椭圆 E 的左焦点，且 P (x_0,y_0) 椭圆上的动点，过点 M$(\frac{1}{4}x_0,0)$ 作直线 PF 的垂线，垂足为 N，当 x_0 变化时，线段 PN 的长度是否为定值？若是，请写出这个定值，并证明你的结论；若不是，请说明理由。



20．（本小题满分 14 分）

湄洲湾港被誉为“世界不多，中国少有”的天然良港。港口各泊位每天的水深（水面与洋底的距离）$f(x)$（单位：米）与时间 x（单位：小时）的函数关系近似地满足 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+B(A,B>0,0\le\varphi<2\pi)$。在通常情况下，港口各泊位能正常进行额定吨位的货船的装卸货任务，而当货船的吨位超过泊位的额定吨位

时，货船需在涨潮时驶入航道，靠近码头卸货，在落潮时返回海洋。

该港口某五万吨级泊位接到一艘七万吨货船卸货的紧急任务，货船将凌晨 0 点在该泊位开始卸货。已知该泊位当天的最低水深 12 米，最大水深 20 米，并在凌晨 3 点达到最大水深。

（1）求该泊位当天的水深 f(x)的解析式；

（2）已知该货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 12。5 米，安全条例规定，当船底与洋底距离不足 1。5 米时，货船必须停止卸货，并将船驶向较深的水域。据测算，一个装卸小队可使货船吃水深度以每小时 0。1 米的速度减少。

（Ⅰ）如果只安排一装卸小队进行卸货，那么该船在什么时间必须停止卸货，并将船驶向较深的水域（精确到小时）？

（Ⅱ）如果安排三个这样的装卸小队同时执行该货船的卸货任务，问能否连续不间断的完成卸货任务？说明你的理由。

参考答案与解题提示

理科数学

（莆田市质检卷）

说明：

一、本解答指出了解答题主要考查的基础知识、基本能力和基本思想方法，并给出了一种或几种解法供参考．如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容，参照评分标准的精神制定相应的评分细则．

二、当考生解答题的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

四、选择题和填空题不给中间分，解答题只给整数分数．

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分50分．

1.A　2.A　3.C　4.B　5.D　6.C　7.D　8.D　9.B　10.B

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题4分，满分20分．

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　12. 6　13. 4　14. 63　15. $\sqrt{3}$

三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16. 本小题主要考查等差数列的概念、通项公式及其前 n 项和公式、一元二次方程解法和定积分的几何意义及其计算等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想．满分13分．

解：（Ⅰ）方法一：依题意得 $a_n=-2n+k$，$S_n=an^2+n$． ………… 1分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2na+(-a+1)$， ………… 2分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=a+1$ 也符合上式． ………… 3分

又 $a_n=-2n+k$，所以 $\begin{cases}2a=-2,\\-a+1=k,\end{cases}$ ………… 4分

解得 $\begin{cases}a=-1,\\k=2.\end{cases}$ ………… 6分

所以 $a_n=-2n+2$． ………… 7分

方法二：依题意得 $a_n=-2n+k$，$S_n=an^2+n$． ………… 1分

所以 $a_{n+1}-a_n=(-2n-2+k)-(-2n+k)=-2$， ………… 2分

所以数列$\{a_n\}$是以 $a_1=-2+k$ 为首项，-2 为公差的等差数列． ………… 3分

所以 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{(-2+k)+(-2n+k)}{2}\cdot n=-n^2+(k-1)n$． ………… 4分

因为 $S_n=an^2+n$，所以 $\begin{cases}a=-1,\\k-1=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-1,\\k=2.\end{cases}$ ………… 6分

所以 $a_n=-2n+2$． ………… 7分

方法三：依题意得 $a_n=-2n+k$，$S_n=an^2+n$． ………… 1分

令 $n=1$，得 $a_1=-2+k$，$S_1=a+1$． ………… 2分

令 $n=2$，得 $a_2=-4+k$，$S_2=4a+2$． ………… 3分

所以 $\begin{cases}a+1=-2+k,\\4a+2=-2+k+(-4+k),\end{cases}$ ………… 5分

解得$\begin{cases} a=-1, \\ k=2. \end{cases}$ …………………………………………………………………… 6分

所以 $a_n=-2n+2$，经验证，$a_n=-2n+2$ 满足题意. …………………………… 7分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=-2x+2$，$g(x)=-x^2+x$.

联立方程组 $\begin{cases} y=-2x+2, \\ y=-x^2+x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-2. \end{cases}$ …………………………… 9分

所以所求封闭图形的面积

$S=\int_1^2[(-x^2+x)-(-2x+2)]dx$ …………………………………………………… 11分

$=\int_1^2(-x^2+3x-2)dx=\frac{1}{6}$. ……………………………………………………………… 13分

17. 本小题主要考查统计量计算及其推断、超几何分布、离散型随机变量的分布列及其数学期望等基础知识，考查数据处理能力、运算求解能力和应用意识，考查或然与必然思想. 满分13分.

解：(Ⅰ)该次测试填空题的难度预估不合理. 理由如下：…………………………… 1分

因为 $S^2=\frac{1}{5}[(0.9-0.8)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2$

$+(0.6-0.7)^2+(0.4-0.2)^2]$ ………………………………………………… 3分

$=0.012>0.01$. ……………………………………………………………………………… 5分

故该次测试的难度预估不合理. ………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)依题意得 ξ 的可能取值为0,1,2. ……………………………………………… 6分

$P(\xi=0)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$，$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$. ……………… 9分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

…………………………………………………………………………………………………… 10分

所以 ξ 的数学期望 $E\xi=\frac{16}{45}\times1+\frac{1}{45}\times2=\frac{2}{5}$. ……………………………… 13分

18. 本小题主要考查导数的几何意义及其应用、二次函数、不等式等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想. 满分13分.

解：(Ⅰ)因为 $f'(x)=-x^2-2x+a^2-2a$，…………………………………………………… 1分

当 $a=1$ 时，$f'(x)=-x^2-2x-1$，$f'(0)=-1$，…………………………………………… 2分

又 $f(0)=0$，切点为 $(0,0)$，………………………………………………………………… 3分

故切线方程为 $y=-x$. ………………………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)因为 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减，

所以 $f'(x)\leqslant0$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立.(*) …………………………………… 7分

因为 $f'(x)=-x^2-2x+a^2-2a$ 的图象是开口向下，且对称轴为 $x=-1$ 的抛物线，

所以函数 $f'(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 8分

结合(*)可知，只须 $f'(1)=a^2-2a-3\leqslant0$，解得 $-1\leqslant a\leqslant3$. ……………… 9分

即当 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减时，$-1\leqslant a\leqslant3$. ……………………… 10分

又 $f(-3)=-3a^2+6a=-3(a-1)^2+3$. …………………………………………………… 11分

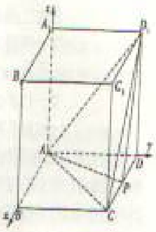
综上得 $-9\leqslant f(-3)\leqslant3$. ……………………………………………………………… 13分

19. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力，考查化归与转化思想、分类与整合思想. 满分 13 分.

解：(Ⅰ)依题意得，$AD\perp$平面 CPD_1，$AD=DD_1=2$，

所以 $V_{三棱锥A-CPD_1}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle CPD_1}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times CP\times2=\frac{2}{3}$. ………………… 2 分

所以 $CP=1$. ………………………………… 3 分



(Ⅱ)以 A 为原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，由已知可得 $A(0,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(1,2,0)$，$D_1(0,2,2)$，

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,2,2)$. ………………………………………… 4 分

设平面 APD_1 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{AD_1}\cdot n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0,\\ 2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，得平面 APD_1 的一个法向量为 $n=(2,-1,1)$. ……………………………………… 6 分

所以 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot n|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|n|}=\frac{2}{2\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 AD 与平面 APD_1 所成角 θ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………… 8 分

(Ⅲ) M 点的位置为 A_1B_1 中点和 B 点. ………………………………………… 9 分

(ⅰ)选取 A_1B_1 中点为 M，证明如下：

方法一：取 C_1D_1 中点 N，连接 PN，A_1N，C_1M，如图 1.

$\because A_1M\underline{\underline{\parallel}}C_1N$，$\therefore$ 四边形 A_1MC_1N 为平形四边形，$\therefore C_1M/\!/A_1N$.

又 $\because AA_1\underline{\underline{\parallel}}PN$，$\therefore$ 四边形 $APNA_1$ 为平形四边形，$\therefore A_1N/\!/AP$，

$\therefore C_1M/\!/AP$. ………………………………………………………… 11 分

又 $AP\subset$平面 APD_1，$C_1M\not\subset$平面 APD_1， …………………………… 12 分

$\therefore C_1M/\!/$平面 APD_1. ……………………………………………… 13 分

方法二：由(Ⅱ)可得 $C_1(2,2,2)$，$M(1,0,2)$，$\overrightarrow{C_1M}=(-1,-2,0)$. …… 10 分

又平面 APD_1 的一个法向量为 $n=(2,-1,1)$，

$\therefore\overrightarrow{C_1M}\cdot n=(-1,-2,0)\cdot(2,-1,1)=0$. ………………………… 11 分

又 $\because C_1M\not\subset$平面 APD_1， …………………………………………… 12 分

$\therefore C_1M/\!/$平面 APD_1. ……………………………………………… 13 分

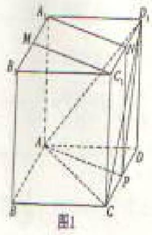


图1

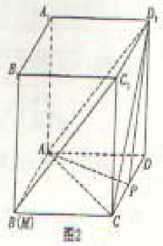


图2

(Ⅲ)选取 B 点为 M，证明如下：

方法一：连接 C_1B，如图 2.

$\because AB \underline{\parallel} D_1C_1$，$\therefore$ 四边形 ABC_1D_1 为平形四边形，$\therefore C_1B // D_1A$. ………… 11 分

又 $\because D_1A \subset$ 平面 APD_1，$C_1B \not\subset$ 平面 APD_1， ………… 12 分

$\therefore C_1B //$ 平面 APD_1，即 $C_1M //$ 平面 APD_1. ………… 13 分

方法二：由(Ⅱ)可得 $C_1(2,2,2)$，$B(2,0,0)$，$\therefore \overrightarrow{C_1B}=(0,-2,-2)$. ………… 10 分

又 $\because$ 平面 APD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$，

$\therefore \overrightarrow{C_1B}\cdot\boldsymbol{n}=(0,-2,-2)\cdot(2,-1,1)=0$. ………… 11 分

又 $\because C_1B \not\subset$ 平面 APD_1， ………… 12 分

$\therefore C_1B //$ 平面 APD_1，即 $C_1M //$ 平面 APD_1. ………… 13 分

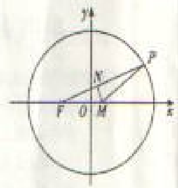
20. 本小题主要考查椭圆的标准方程与性质、直线的方程及其位置关系、点到直线的距离公式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、特殊与一般思想. 满分 14 分.

解：(Ⅰ)由 $\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0$，令 $y=0$ 得 $x=2$，即 $a=2$， ………… 2 分

令 $x=0$ 得 $y=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}$. ………… 4 分

所以椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………… 5 分

(Ⅱ)线段 PN 的长度为定值 $\dfrac{3}{2}$. 证明如下： ……… 6 分



方法一：当 $x_0=-1$ 时，点 $P\left(-1,\pm\dfrac{3}{2}\right)$，$PF\perp x$ 轴，

点 N 与点 F 重合，$|PN|=|PF|=\dfrac{3}{2}$. ……… 7 分

当 $x_0\neq-1$ 时，直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0+1}$， ………

………… 8 分

故直线 PF 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，即 $y_0x-(x_0+1)y+y_0=0$. ………… 9 分

又由 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$ 得 $y_0^2=3-\dfrac{3}{4}x_0^2$. ………… 10 分

所以点 M 到直线 PF 的距离 $|MN|=\dfrac{\left|\frac{1}{4}x_0y_0+y_0\right|}{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}=\dfrac{\left|\frac{1}{4}y_0(x_0+4)\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}x_0^2+2x_0+4}}=\dfrac{|y_0|}{2}$，

………… 12 分

所以 $|PN|=\sqrt{|PM|^2-|MN|^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3x_0}{4}\right)^2+y_0^2-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x_0^2+y_0^2\right)}=\frac{3}{2}.$$ ………… 14 分

综上，线段 PN 的长度为定值 $\dfrac{3}{2}$. ………… 14 分

方法二：当 $y_0=0$ 时，点 P、M 的坐标依次为 $(-2,0)$、$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 和 $(2,0)$、$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，

此时点 N 与点 M 重合，$|PN|=|PM|=\frac{3}{2}$. ………………………… 7分

当 $x_0=-1$ 时，点 $P(-1,\pm\frac{3}{2})$，$PF\perp x$ 轴，点 N 与点 F 重合，$|PN|=|PF|=\frac{3}{2}$.

………………………………………… 8分

当 $x_0\neq-1$ 且 $y_0\neq0$ 时，线段 PN 的长度就是点 P 到直线 MN 的距离，

由(Ⅰ)知 $F(-1,0)$，从而直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\frac{y_0}{x_0+1}$. ………………… 9分

故直线 MN 的方程为 $y=-\frac{x_0+1}{y_0}(x-\frac{1}{4}x_0)$，

即 $(x_0+1)x+y_0y-\frac{1}{4}(x_0^2+x_0)=0$. ………………………… 10分

所以 $|PN|=\frac{\left|(x_0+1)x_0+y_0^2-\frac{1}{4}(x_0^2+x_0)\right|}{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}=\frac{\left|\frac{3}{4}x_0^2+\frac{3}{4}x_0+y_0^2\right|}{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}$，(＊) …… 11分

又由 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，得 $y_0^2=3-\frac{3}{4}x_0^2$，………………………… 12分

代入(＊)式得 $|PN|=\frac{\left|\frac{3}{4}x_0+3\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}x_0^2+2x_0+4}}=\frac{\left|\frac{3}{4}x_0+3\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}(x_0+4)^2}}=\frac{\frac{3}{4}|x_0+4|}{\frac{1}{2}|x_0+4|}=\frac{3}{2}$. … 14分

综上，线段 PN 的长度为定值 $\frac{3}{2}$. ………………………… 14分

方法三：依题意，线段 PN 的长度就是 $\overrightarrow{PM}$ 在 $\overrightarrow{PF}$ 方向上的投影的绝对值，

即 $|\overrightarrow{PN}|=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PF}|}$. ………………………… .8分

由(Ⅰ)知 $F(-1,0)$，所以 $\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{3}{4}x_0,-y_0\right)$，$\overrightarrow{PF}=(-x_0-1,-y_0)$，…… 10分

所以 $|\overrightarrow{PN}|=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PF}|}=\frac{\left|\frac{3}{4}x_0^2+\frac{3}{4}x_0+y_0^2\right|}{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}}$，(＊) ………………… 11分

下同方法二

21. 本小题主要考查三角函数的图象与性质、函数零点、导数、不等式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力以及应用意识，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想、分类与整合思想. 满分14分.

解：(Ⅰ)因为泊位的最低水深12米，最大水深20米，所以 $\begin{cases}-A+B=12,\\A+B=20,\end{cases}$ ………… 1分

解得 $\begin{cases}A=4,\\B=16,\end{cases}$ 所以 $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x+\varphi)+16$. ………………………… 2分

又当 $x=3$ 时，$f(x)$ 取到最大值20，所以 $f(3)=4\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)+16=20$，

又 $0\leqslant\varphi<2\pi$，所以 $\varphi=0$，$f(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x)+16$，$x\in[0,24]$. ………… 4分

(Ⅱ)设货船的吃水深度以每小时 a 米的速度下降，

则在 x 时刻货船的吃水深度为 $(12.5-ax)$ 米.

令 $g(x)=f(x)-(12.5-ax)-1.5$，则 $g(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x)+ax+2$.

要使货船能在泊位正常卸货，须且只须 $g(x)\geqslant 0$. ………………………… 5分

（ⅰ）只安排一个装卸小队进行卸货时，$a=0.1$，$g(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x)+0.1x+2$.

……………………………………………………………………………… 6分

当 $x\in(0,7]$ 时，因为 $4\sin(\frac{\pi}{6}x)\geqslant 4\sin\frac{7\pi}{6}=-2$，

所以 $g(x)\geqslant -2+0.1x+2>0$.

又 $g(8)=4\sin(\frac{8\pi}{6})+0.8+2=-2\sqrt{3}+2.8<0$，………………………… 7分

所以该船必须在上午 7 点停止卸货，并将船驶向较深的水域. ………… 8分

（ⅱ）安排三个装卸小队进行卸货，能按要求完成卸货任务. ……………… 9分

此时 $a=0.3$，$g(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x)+0.3x+2$.

因为泊位的水深 $f(x)=4\sin(\frac{\pi}{6}x)+16$ 在当天上午 9:00 时第一次达到最低水深，所以要使卸货任务能连续不间断地完成，须且只须当 $x\in[0,9]$ 时能正常卸货. ………………………………………………………………… 10分

方法一：当 $x\in(0,7]$ 时，因为 $4\sin(\frac{\pi}{6}x)\geqslant 4\sin\frac{7\pi}{6}=-2$，

所以 $g(x)\geqslant -2+0.3x+2>0$. ……………………………………………… 11分

当 $x\in[7,9]$ 时，因为 $4\sin(\frac{\pi}{6}x)\geqslant -4$，$0.3x+2\geqslant 0.3\times 7+2=4.1$，两式相加得 $g(x)\geqslant 0.1$，所以当 $x\in[7,9]$ 时，$g(x)>0$ 成立. ……………………… 13分

综上，对任意的 $x>0$，$g(x)>0$ 恒成立. ………………………………… 14分

即安排三个这样的装卸小队同时执行该货船的卸货任务，能按要求完成卸货任务. ……………………………………………………………………………… 14分

方法二：当 $x\in[0,6]$ 时，$g(x)>0$ 显然成立. ……………………………… 11分

因此只须证明当 $x\in[6,9]$ 时，$g(x)>0$ 成立.

因为函数 $y=4\sin(\frac{\pi}{6}x)$ 在 $x=8$ 处的切线方程为 $h(x)=-\frac{\pi}{3}x+\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$，结合函数 $y=4\sin(\frac{\pi}{6}x)$ 的图象可知，当 $x\in[6,9]$ 时，$4\sin(\frac{\pi}{6}x)\geqslant h(x)$ 成立，

从而 $g(x)\geqslant -\frac{\pi}{3}x+\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}+0.3x+2$.

因为 $y=(-\frac{\pi}{3}+0.3)x+\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}+2$ 在区间 $[6,9]$ 上单调递减，

所以 $g(x)\geqslant(-\frac{\pi}{3}+0.3)\times 9+\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}+2\approx 0.19>0$. ……………… 13分

综上，对任意的 $x\geqslant 0$，$g(x)>0$ 恒成立. ……………………………… 14分

即安排三个这样的装卸小队同时执行该货船的卸货任务，能按要求完成卸货任务. ……………………………………………………………………………… 14分