

2013 漳州市高中毕业班质量检查

理科数学试卷

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必需将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试题卷上.

参考公式:

样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

其中 \bar{x} 为样本平均数

柱体体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 为底面面积, h 为高

锥体体积公式

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

其中 S 为底面面积, h 为高

球的表面积、体积公式

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 为球的半径

第 I 卷 （选择题 共 50 分）

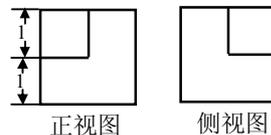
一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的. 将正确答案填写在答题卷相应位置.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{2} < 2^x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 等于

- A. $(-1, 3)$ B. $(-1, 4)$ C. $(\frac{1}{2}, 3)$ D. $(\frac{1}{2}, 4)$

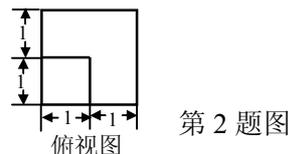
2. 一个几何体的三视图如图, 则该几何体的表面积是

- A. 28 B. 27 C. 24 D. 21



3. 下列有关命题说法正确的是

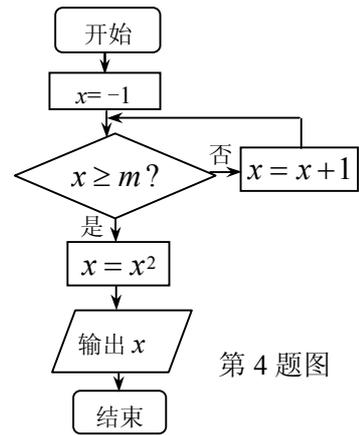
- A. 命题 p : “ $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ”, 则 $\neg p$ 是真命题
- B. “ $x = -1$ ” 是 “ $x^2 - 5x - 6 = 0$ ” 的必要不充分条件
- C. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R},$ 使得 $x^2 + x + 1 < 0$ ” 的否定是: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ”
- D. “ $a > 1$ ” 是 “ $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数” 的充要条件



第 2 题图

4. 执行如图所示的程序，若输出的结果是 4，则判断框内实数 m 的值可以是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



第 4 题图

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和为 $S_n = 3^n - 1$ ，则

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ 等于

- A. $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ B. $3^n - 1$
 C. $\frac{1}{2}(9^n - 1)$ D. $9^n - 1$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数，则 $g(-4)$ 的值等于

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

7. 过点 $M(-2, 0)$ 作斜率为 k_1 ($k_1 \neq 0$) 的直线与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A 、 B 两点，线段 AB 的中点为

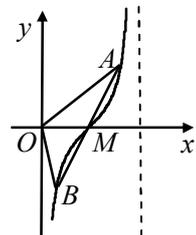
P ， O 为坐标原点， OP 的斜率为 k_2 ，则 $k_1 k_2$ 等于

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

8. 过点 $M(2, 0)$ 的直线与函数 $y = \tan(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2})$ ($0 < x < 4$) 的图像交于

A 、 B 两点，则 $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 等于

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8



第 8 题图

9. 在区间 $[0, 2]$ 上随机取两个数 x 、 y ，则 $xy \in [0, 2]$ 的概率是

- A. $\frac{1 - \ln 2}{2}$ B. $\frac{3 - 2 \ln 2}{4}$ C. $\frac{1 + \ln 2}{2}$ D. $\frac{1 + 2 \ln 2}{2}$

10. 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ ，若存在 x_0 ，使得 $f(x_0) = f'(x_0)$ ，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个

“巧值点”，下列函数中，有“巧值点”的是

- ① $f(x) = x^2$ ，② $f(x) = e^{-x}$ ，③ $f(x) = \ln x$ ，④ $f(x) = \tan x$ ，⑤ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

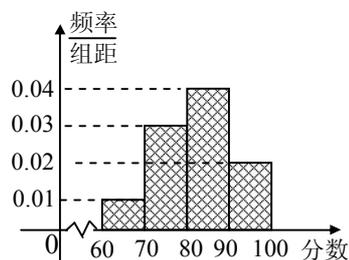
- A. ①③⑤ B. ③④ C. ②③④ D. ②⑤

第 II 卷（非选择题，共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。把答案填在答题卡的相应位置。

11. 若实数 x, y 满足
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ y \leq 5, \end{cases}$$
 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

12. 某校高三年级的学生共 1000 人，一次测验成绩的分布直方图如右图所示，现要按右图所示的 4 个分数段进行分层抽样，抽取 50 人了解情况，则 80~90 分数段应抽取_____人.



13. 已知 $(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式的第 4 项为常数项，则其展开式中各项系数的和为_____.

14. 将 7 个不同的小球全部放入编号为 2 和 3 的两个小盒子里，使得每个盒子里的球的个数不小于盒子的编号，则不同的放球方法共有_____种(用数字作答).

15. 在实数集 \mathbf{R} 中，我们定义的大小关系“ $>$ ”为全体实数排了一个“序”，类似地，我们在复数集 C 上也可以定义一个称为“序”的关系，记为“ \succ ”. 定义如下：对于任意两个复数 $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位), “ $z_1 \succ z_2$ ”当且仅当“ $a_1 > a_2$ ”或“ $a_1 = a_2$ 且 $b_1 > b_2$ ”. 现有以下命题：

- ①若 $z_1 \succ z_2$, 则 $|z_1| > |z_2|$;
- ②若 $z_1 \succ z_2$, 则 $z_1^2 \succ z_2^2$;
- ③若 $z_1 \succ z_2$, $z_2 \succ z_3$, 则 $z_1 \succ z_3$;
- ④对于复数 $z \succ 0$, 若 $z_1 \succ z_2$, 则 $z \cdot z_1 \succ z \cdot z_2$;

其中正确命题的序号的是_____ (写出所以正确命题的序号).

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写在答题卷相应位置，要写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16. (本题满分 13 分)

工商部门对甲、乙两家食品加工企业的产品进行深入检查后，决定对甲企业的 5 种产品和乙企业的 3 种产品做进一步的检验. 检验员从以上 8 种产品中每次抽取一种逐一不重复地进行化验检验.

(I) 求前 3 次检验的产品中至少 1 种是乙企业的产品的概率；

(II) 记检验到第一种甲企业的产品时所检验的产品种数共为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

17. (本题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin 2x - 2\cos^2 x + m$ 的图像经过点 $(\frac{\pi}{8}, 0)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式及最大值;

(II) 若 $f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \alpha$ 的值.

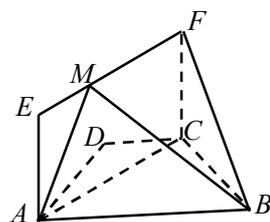
18. (本题满分 13 分)

如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD=DC=CB=1$, $\angle ABC=60^\circ$,

四边形 $ACFE$ 为矩形, 平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF=1$.

(I) 求证: $BC \perp$ 平面 $ACFE$;

(II) 若点 M 在线段 EF 上移动, 试问是否存在点 M , 使得平面 MAB 与平面 FCB 所成的二面角为 45° , 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.



第 18 题图

19. (本题满分 13 分)

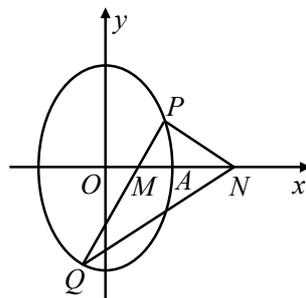
如图, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 短轴

右端点为 A , $M(1, 0)$ 为线段 OA 的中点.

(I) 求椭圆 Γ 的方程;

(II) 过点 M 任作一条直线与椭圆 Γ 相交于两点 P, Q , 试问在 x 轴上

是否存在定点 N , 使得 $\angle PNM = \angle QNM$, 若存在, 求出点 N 的坐标; 若不存在, 说明理由.



第 19 题图

20. (本题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) - ax - x^2$.

(I) 若 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的零点, 求 a 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的极值;

(III) 证明: 对任意正整数 n , $\ln(n+1) < 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{n+1}{n^2}$.

21. 本题 (1)、(2)、(3) 三个选答题, 每小题 7 分, 请考生任选 2 题作答, 满分 14 分, 如果多做, 则按所做的前两题计分。作答时, 先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑, 并将所选题号填入括号中。

(1) (本小题满分 7 分) 选修 4-2: 矩阵与变换

$$\text{设矩阵 } M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 若 $a=2$, $b=3$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} ;

(II) 若曲线 $C: x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ 在矩阵 M 的作用下变换成曲线 $C': x^2 - 2y^2 = 1$,

求 $a+b$ 的值.

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 曲线 } C_2 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -1 + \cos\varphi, \\ y = -1 + \sin\varphi, \end{cases} (\varphi \text{ 为参数, } 0 \leq \varphi \leq \pi),$$

(I) 求 C_1 的直角坐标方程;

(II) 当 C_1 与 C_2 有两个不同公共点时, 求实数 a 的取值范围.

(3) (本小题满分 7 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-3| - 2$, $g(x) = -|x+1| + 4$.

(I) 若函数 $f(x)$ 的值不大于 1, 求 x 的取值范围;

(II) 若不等式 $f(x) - g(x) \geq m+1$ 的解集为 \mathbf{R} , 求 m 的取值范围.

2013 漳州市高中毕业班质量检查

理科数学试卷参考答案

一、 选择题： 1-5 A, C, D, B, C, 6-10 B, B, D, C, A.

二、 填空题： 11. 9; 12. 20; 13. 32; 14. 91; 15. ③.

三、 解答题：

16. 解：(I) $P = 1 - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{23}{28}$,

∴ 前 3 次检验的产品中至少 1 种是乙企业的产品的概率为 $\frac{23}{28}$4 分

(II) X 可取值 1, 2, 3, 4

$$P(X=1) = \frac{5}{8}, \quad P(X=2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{56}, \quad P(X=4) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

X 的分布列如下表：

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

X 的数学期望为：

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{5}{56} + 4 \times \frac{1}{56} = \frac{3}{2}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

17. 解：(I) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x - 1 + m$,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 1 + m = m - 1 = 0, \quad m = 1, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

所以当 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $\sqrt{2}$6 分

$$(II) f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \quad \therefore \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \therefore \alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4}{5}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha &= \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分} \end{aligned}$$

18. 解(I) 证明: 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD=DC=CB=1$, $\angle ABC=60^\circ$,

$$\therefore AB = 2, \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 60^\circ = 3,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2, \quad \therefore AC \perp BC, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, AC 是交线, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore BC \perp \text{平面 } ACFE. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由(I)知, AC 、 BC 、 CF 两两垂直, 以 C 为原点, AC 、 BC 、 CF 所在的直线为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系 (如图),

$$\text{则 } A(\sqrt{3}, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad \text{设 } M(a, 0, 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \quad \overrightarrow{BM} = (a, -1, 1), \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 是平面 AMB 的法向量, 则

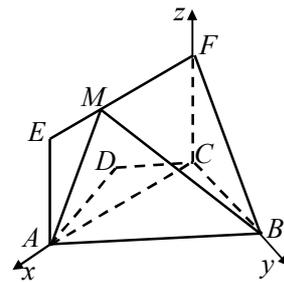
$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = -\sqrt{3}x + y = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BM} = ax - y + z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x=1, \quad \text{得 } \vec{m} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}-a),$$

显然 $\vec{n} = (1, 0, 0)$ 是平面 FCB 的一个法向量, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{于是 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4 + (\sqrt{3} - a)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

化简得 $2 + (\sqrt{3} - a)^2 = 0$, 此方程无实数解, $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

\therefore 线段 EF 上不存在点 M 使得平面 MAB 与平面 FCB 所成的二面角为 45° . $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

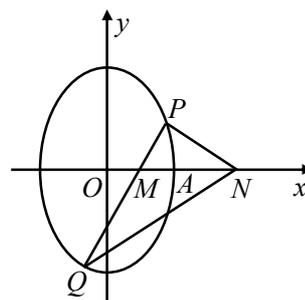


第 18 题图

19. 解: (I) 由已知, $b = 2$, 又 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{即 } \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{解得 } a = 2\sqrt{2},$$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



第 19 题图

(II) 假设存在点 $N(x_0, 0)$ 满足题设条件.

当 $PQ \perp x$ 轴时, 由椭圆的对称性可知恒有 $\angle PNM = \angle QNM$, 即 $x_0 \in \mathbf{R}$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 PQ 与 x 轴不垂直时, 设 PQ 的方程为 $y = k(x - 1)$, 代入椭圆方程化简得:

$$(k^2 + 2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 8 = 0.$$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{2+k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{k^2-8}{2+k^2}$,8分

$$k_{PN} + k_{QN} = \frac{y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_2}{x_2 - x_0} = \frac{k(x_1 - 1)}{x_1 - x_0} + \frac{k(x_2 - 1)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{k(x_1 - 1)(x_2 - x_0) + k(x_2 - 1)(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\because (x_1 - 1)(x_2 - x_0) + (x_2 - 1)(x_1 - x_0) = 2x_1 x_2 - (1 + x_0)(x_1 + x_2) + 2x_0$$

$$= \frac{2(k^2 - 8)}{2 + k^2} - \frac{2(1 + x_0)k^2}{2 + k^2} + 2x_0.$$

若 $\angle PNM = \angle QNM$, 则 $k_{PN} + k_{QN} = 0$,11分

$$\text{即 } k \left[\frac{2(k^2 - 8)}{2 + k^2} - \frac{2(1 + x_0)k^2}{2 + k^2} + 2x_0 \right] = 0, \quad \text{整理得 } k(x_0 - 4) = 0,$$

$\because k \in \mathbf{R}, \therefore x_0 = 4.$

综上在 x 轴上存在定点 $N(4, 0)$, 使得 $\angle PNM = \angle QNM$13分

20. (I) 解: 因为 $f(1) = 0$, 所以 $a \ln 2 - a - 1 = 0$,

$$\text{解得 } a = \frac{1}{\ln 2 - 1}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$(II) f'(x) = \frac{a}{x+1} - a - 2x = \frac{-2x(x + \frac{a+2}{2})}{x+1}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$, 或 $x = -\frac{a+2}{2}$, 又 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

① 当 $-\frac{a+2}{2} \leq -1$, 即 $a \geq 0$ 时, 若 $x \in (-1, 0)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 若 $x \in (0, +\infty)$, 则

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 所以 $f(x)_{\text{极大值}} = f(0) = 0$, 无极小值.

② 当 $-1 < -\frac{a+2}{2} < 0$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 若 $x \in (-1, -\frac{a+2}{2})$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 若

$x \in (-\frac{a+2}{2}, 0)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-\frac{a+2}{2}) = a \ln(-\frac{a}{2}) + \frac{a^2 - 4}{4}$, $f(x)_{\text{极大值}} = f(0) = 0$.

③ 当 $-\frac{a+2}{2} = 0$, 即 $a = -2$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内递减, $f(x)$ 无极值.

④ 当 $-\frac{a+2}{2} > 0$, 即 $a < -2$ 时, 若 $x \in (-1, 0)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 若 $x \in (0, -\frac{a+2}{2})$,

则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 若 $x \in (-\frac{a+2}{2}, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0$, $f(x)_{\text{极大值}} = f(-\frac{a+2}{2}) = a \ln(-\frac{a}{2}) + \frac{a^2-4}{4}$9分

(III)由(II)知当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减, $\therefore f(x) \leq f(0)$, 即 $\ln(x+1) \leq x+x^2$,

$$\because \frac{1}{i} > 0, \therefore \ln(1+\frac{1}{i}) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} = \frac{i+1}{i^2} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

$$\therefore \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} < 2 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n+1}{n^2},$$

$$\therefore \ln(n+1) < 2 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n+1}{n^2}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

21(1). 解: (I) 当 $a=2, b=3$ 时, M 的行列式 $\det(M) = -5$,

故所求的逆矩阵 $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$3分

(II) 设曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$, 它在矩阵 M 所对应的线性变换作用下得到点

$$P'(x', y'), \text{ 则 } \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x+ay=x', \\ bx+y=y', \end{cases}$$

又点 $P'(x', y')$ 在曲线 C' 上, 所以 $x'^2 - 2y'^2 = 1$, 则 $(x+ay)^2 - 2(bx+y)^2 = 1$,

即 $(1-2b^2)x^2 + (2a-4b)xy + (a^2-2)y^2 = 1$ 为曲线 C 的方程,5分

又已知曲线 C 的方程为 $x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$,

$$\text{比较系数可得 } \begin{cases} 1-2b^2=1 \\ 2a-4b=4 \\ a^2-2=2 \end{cases} \text{ 解得 } b=0, a=2, \therefore a+b=2. \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

21(2).解: (I) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} a$,

$$\text{即 } \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = a,$$

$$\therefore \text{曲线 } C_1 \text{ 的直角坐标方程为 } x+y-a=0. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

(II) 曲线的直角坐标方程为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 (-1 \leq y \leq 0)$, 为半圆弧,

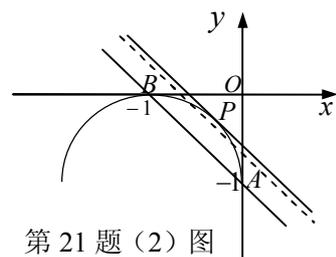
如下图所示, 曲线 C_1 为一组平行于直线 $x+y=0$ 的直线,4分

当直线 C_1 与 C_2 相切时, 由 $\frac{|-1-1-a|}{\sqrt{2}} = 1$ 得 $a = -2 \pm \sqrt{2}$,

舍去 $a = -2 - \sqrt{2}$, 则 $a = -2 + \sqrt{2}$,

当直线 C_1 过点 $A(0, -1)$ 、 $B(-1, 0)$ 两点时, $a = -1$,6分

\therefore 由图可知, 当 $-1 \leq a < -2 + \sqrt{2}$ 时, 曲线 C_1 与曲线 C_2 有两



第 21 题 (2) 图

个公共点,7分

21(3). 解: (I) 由题意得 $f(x) \leq 1$, 即 $|x-3|-2 \leq 1$ 得 $|x-3| \leq 3$,

因为 $|x-3| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-3 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$,

所以 x 的取值范围是 $[0, 6]$3分

(II) $f(x)-g(x)=|x-3|+|x+1|-6$,

因为对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)-g(x)=|x-3|+|x+1|-6=|3-x|+|x+1|-6$

$\geq |(3-x)+(x+1)|-6=4-6=-2$.

于是有 $m+1 \leq -2$, 得 $m \leq -3$, 即 m 的取值范围是 $(-\infty, -3]$ 7分