福建省三明市普通高中2012届高三上学期期末联考
数学（理）试题

（考试时间：2012年1月11日下午3：00—5：00　满分：150分）

第Ⅰ卷（选择题，共５０分）

一、选择题（本大题共10小题。每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一个选项是符合题目要求，请把正确选项的代号填在答题卷的相应位置上）

1．已知集合 $A=\{0,1,a\}$，$B=\{x\,|\,0<x<2\}$，若 $A\cap B=\{1,a\}$，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(0,2)$　　D．$(0,1)\cup(1,2)$

2．若 $a\in R$，则“$a=-2$”是“$|a|=2$”的(　　) 条件

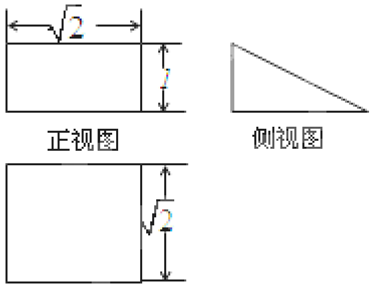
A．充分而不必要　　B．必要而不充分　　C．充要　　D．既不充分又不必要

3．如果 $(a+b)^n$ 的展开式中二项式系数和等于 1024，则展开式的中间项的系数是(　　)

A．C_{10}^6　B．C_{10}^5　C．C_9^5　D．C_{11}^6

4．若某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）

A．2　B．1　C．$\dfrac{2}{3}$　D．$\dfrac{1}{3}$



（第4题图）

5．若平面向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 180^0，且 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\boldsymbol{b}$ 的坐标是(　　)

A．(3,-6)　B．(-6,3)　C．(6,　-3)　D．(-3,　6)

6．设 m,n 是两条不同直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题不正确的是（　　）

A．若$m//n,m\perp\alpha$,则$n\perp\alpha$　　B．若$m\perp\alpha,m\perp\beta$,则$\alpha//\beta$

C．若$m//\alpha,\alpha\cap\beta=n$,则$m//n$　　D．若$m\perp\alpha,m\subset\beta$,则$\alpha\perp\beta$

7．方程 $\log_2 x=\dfrac{1}{x}$ 的根所在区间为(　　)

A．$(0,\dfrac{1}{2})$　　B．$(\dfrac{1}{2},1)$　　C．$(1,2)$　　D．$(2,3)$

8．函数 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，再将图象上各点的横坐标压缩为原来的 $\dfrac{1}{2}$，那么所得图象的一条对称轴方程为(　　)

A．$x=-\dfrac{\pi}{2}$　　B．$x=-\dfrac{\pi}{4}$　　C．$x=\dfrac{\pi}{8}$　　D．$x=\dfrac{\pi}{4}$

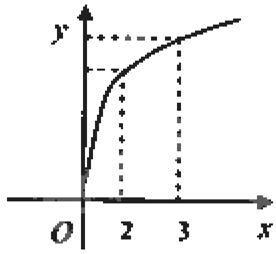
9．已知函数 $f(x)$ 的图像如图所示，$f'(x)$是$f(x)$ 的导函数，则下列数值排序正确的是（　　）

A．$0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B．$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

C．$0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

D．$0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$



10．某班班会准备从含甲、乙的7名学生中选取4人发言，要求甲、乙两人至少有一人参加，且若甲、乙同时参加,则他们发言时顺序不能相邻，那么不同的发言顺序种类为（　　）

A. 720　　B. 520　　C. 600　　D. 360

第Ⅱ卷（非选择题，共１００分）

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分，把答案填在答题卷的相应位置上）

11．若直线l与圆$(x+1)^2+(y-2)^2=100$相交于A,B两点，弦AB的中点为$(-2,3)$，则直线l的方程为___________.

12．在区间$[0,\pi]$上随机取一个数x，使$\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$的概率为__________.

13．已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左右焦点分别是$F_1,F_2$，$P$点是双曲线右支上一点，且$|PF_2|=|F_1F_2|$，则三角形$PF_1F_2$的面积等于___________.

14．设实数x,y满足约束条件$\begin{cases}3x-y-6\le 0\\ x-y+2\ge 0\\ x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$,若目标函数$z=ax+by(a>0,b>0)$的最大值为$12$,则$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$的最小值为____________.

15．给出定义：若$m-\frac{1}{2}<x\le m+\frac{1}{2}$（其中$m$为整数），则$m$叫做离实数$x$最近的整数，记作$\{x\}=m$，在此基础上给出下列关于函数$f(x)=|x-\{x\}|$的四个命题：

①函数$y=f(x)$的定义域为R，值域为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$；

②函数$y=f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上是增函数；

③函数$y=f(x)$是周期函数，最小正周期为1；

④函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{k}{2}$（$k\in Z$）对称.

其中正确命题的序号是_________.

三、解答题(本大题共6小题，共80分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。请在答题卷相应题目的答题区域内作答)

16.(本小题满分13分)

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,a_2=2$，$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\ge 2,n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$a_nb_{n+1}=2a_{n+1}b_n$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项a_n；(Ⅱ)求证：数列$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$为等比数列；并求数列$\{b_n\}$的通项公式.

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2 x-1(x\in R)$. （I）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（II）在 ΔABC 中，三内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $f(A)=\frac{1}{2}$，b,a,c 成等差数列，且 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$，求 a 的值.

18. （本小题满分 13 分）

某食品厂为了检查甲乙两条自动包装流水线的生产情况，随即在这两条流水线上各抽取 40 件产品作为样本称出它们的重量（单位：克），重量值落在 $(495,510]$ 的产品为合格品，否则为不合格品．图1是甲流水线样本的频率分布直方图，表1是乙流水线样本频数分布表．

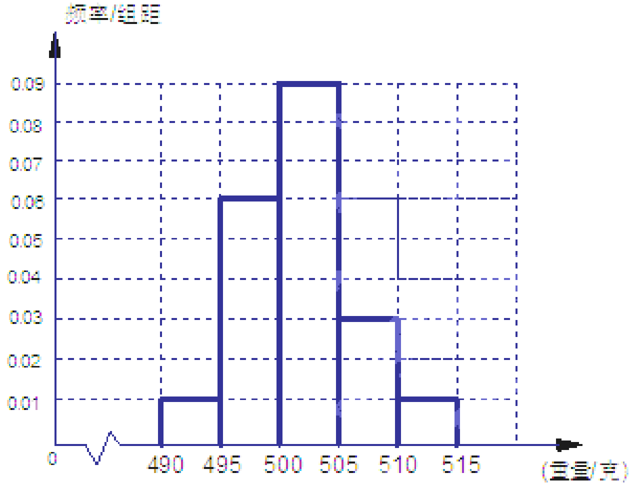


图 1:（甲流水线样本频率分布直方图）

产品重量（克）	频数
(490,495]	6
(495,500]	8
(500,505]	14
(505,510]	8
(510,515]	4

表 1：（乙流水线样本频数分布表）

（Ⅰ）若以频率作为概率，试估计从甲流水线上任取 5 件产品，求其中合格品的件数 X 的数学期望；

（Ⅱ）从乙流水线样本的不合格品中任意取 2 件，求其中超过合格品重量的件数 Y 的分布列；

（Ⅲ）由以上统计数据完成下面 2×2 列联表，并回答有多大的把握认为“产品的包装质量与两条自动包装流水线的选择有关” ．

	甲流水线	乙流水线	合计
合格品	$a=$	$b=$	
不合格品	$c=$	$d=$	
合　计			$n=$

附：下面的临界值表供参考：

$p(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$）

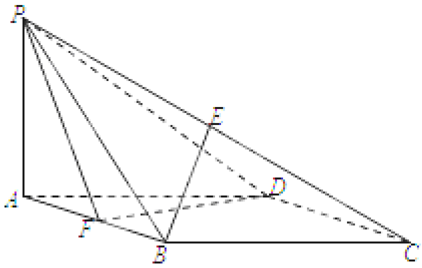
19.（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是菱形，$\angle BAD=60^0$，AB＝2，PA＝1，PA ⊥ 平面 ABCD，E 是 PC 的中点，F 是 AB 的中点.

（Ⅰ）求证：BE // 平面 PDF；

（Ⅱ）求证：平面 PDF ⊥ 平面 PAB；

（Ⅲ）求平面 PAB 与平面 PCD 所成的锐二面角的大小.



20.（本小题满分 14 分）

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，右焦点到直线 $x+y+\sqrt{6}=0$ 的距离为 $2\sqrt{3}$，过 $M(0,-1)$ 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ） 若直线 l 交 x 轴于 N，$\overrightarrow{NA}=-\dfrac{7}{5}\overrightarrow{NB}$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$，其中 $b\neq 0$.（Ⅰ）若 $b=-12$，求 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值；

（Ⅱ）如果 $f(x)$ 在定义域内既有极大值又有极小值，求实数 b 的取值范围；

（Ⅲ）是否存在最小的正整数 N，使得当 $n\geq N$ 时，不等式 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{n-1}{n^3}$ 恒成立.

三明市普通高中2011－2012学年第一学期联合命题考试

高三（理科）数学试题——参考答案

一、选择题（本大题共10小题，每小题5分，共50分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	B	A	C	C	A	B	C

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

11. $x-y+5=0$；　12. $\frac{2}{3}$；　13. 48；　14. $\frac{25}{6}$；　15. ①③④ .

三、解答题(本大题共6小题，共80分)

16.解：（Ⅰ）证明∵$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\ge 2,n\in N^*)$，∴$\{a_n\}$是等差数列. ……………3分

又∵$a_1=1,a_2=2$，∴$a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$. ……………………………………………6分

（Ⅱ）∵$a_n=n$，∴$nb_{n+1}=2(n+1)b_n$．∴$\frac{b_{n+1}}{n+1}=2\cdot\frac{b_n}{n}$.

∴$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$是以$\frac{b_1}{1}=2$为首项，$q=2$为公比的等比数列. ……………………………10分

∴ $\frac{b_n}{n}=2\times 2^{n-1}$.　　∴　$b_n=n\cdot 2^n$.　　……………………………………13分

17．解：（Ⅰ）$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2 x-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos 2x$ …………2分

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$ ………………………………3分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in z)$得，$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in z)$ ………………5分

故　$f(x)$的单调递增区间是$[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi](k\in z)$………………………………………6分

（Ⅱ）$f(A)=\sin(2A+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，$0<A<\pi$，$\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$于是$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，故$A=\frac{\pi}{3}$ …8分

由b,a,c成等差数列得：$2a=b+c$，

由$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$得$bc\cos A=9$，$\frac{1}{2}bc=9,bc=18$ ……………………………………10分

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc$，

于是$a^2=4a^2-54$，$a^2=18$，$a=3\sqrt{2}$ ……………………………………………………13分

18.解：（Ⅰ）由图1知，甲样本中合格品数为$(0.06+0.09+0.03)\times 5\times 40=36$，

故合格品的频率为$\frac{36}{40}=0.9$，据此可估计从甲流水线上任取一件产品该产品为合格品的概率

$P=0.9$，则$X\sim B(5,0.9)$　　故$EX=4.5$　　……………………………………4分

（Ⅱ）由表1知乙流水线样本中不合格品共10个，超过合格品重量的有4件；

则Y的取值为$0,1,2$；且$P(Y=k)=\dfrac{C_4^k \cdot C_6^{2-k}}{C_{10}^2}\quad(k=0,1,2)$，于是有：

$P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$， $P(Y=1)=\dfrac{8}{15}$，$P(Y=2)=\dfrac{2}{15}$

$\therefore Y$的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

……………………………10 分

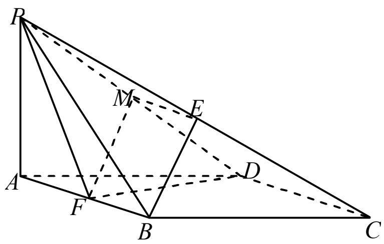
（III）2×2列联表如下：

	甲流水线	乙流水线	合计
合格品	$a=36$	$b=30$	66
不合格品	$c=4$	$d=10$	14
合　计	40	40	$n=80$

$\because K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{80\times(360-120)^2}{66\times14\times40\times40}\approx3.117>2.706$

$\therefore$　有 90%的把握认为产品的包装质量与两条自动包装流水线的选择有关．……………13 分

19．证明：(Ⅰ) 取PD中点为M，连ME,MF　$\because$　E是PC的中点　$\therefore$ ME是ΔPCD的中位线，$\therefore$ $ME \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}}} \dfrac{1}{2}CD$　$\because$　F是AB中点且$ABCD$是菱形，



$AB \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}}} CD$，$\therefore$　$ME \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}}} \dfrac{1}{2}AB$．$\therefore$　$ME \mathrel{\underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}}} FB$

$\therefore$ 四边形$MEBF$是平行四边形．　从而　$BE \mathbin{/\mkern-5mu/} MF$，

$\because$　$BE \not\subset$平面PDF　，

$MF\subset$平面PDF，　　　$\therefore$　$BE \mathbin{/\mkern-5mu/}$平面$PDF$　　……………………………4 分

(Ⅱ) $\because$　$PA\perp$平面$ABCD$，$DF\subset$平面$ABCD$　$\therefore$　$DF\perp PA$

$\because$　底面$ABCD$是菱形，$\angle BAD=60^0$　$\therefore$　ΔDAB为正三角形，　$\because$ F是AB中点

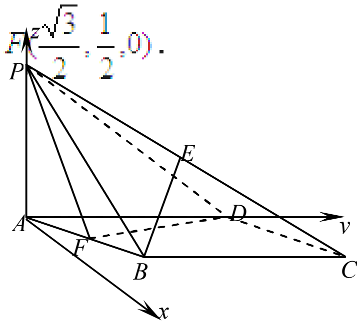
$\therefore$　$DF\perp AB$　　$\because$ PA,AB是平面PAB内的两条相交直线　$\therefore$　$DF\perp$平面PAB．

$\because DF\subset$平面PDF　$\therefore$　平面$PDF\perp$平面PAB　．　………………………………8 分

说明：(Ⅰ)、(Ⅱ)前两小题用向量法，解答只要言之有理均应按步给分．

(III) 以A为原点，垂直于AD,AP的方向为x轴，AD,AP的方向分别为y轴、z轴建立

空间直角坐标系，易知$P(0,0,1)$、$C(\sqrt{3},3,0)$、$D(0,2,0)$、$F(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$．



由(Ⅱ)知$DF\perp$平面PAB，$\therefore\overrightarrow{DF}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0)$是平面$PAB$的一个法向量，

设平面PCD的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=\sqrt{3}x+y=0$ ，且由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=2y-z=0$

在以上二式中令$y=\sqrt{3}$，则得$x=-1$，$z=2\sqrt{3}$，

$\therefore \vec{n}=(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，设平面$PAB$与平面$PCD$所成锐角为$\theta$

$$\therefore\ \cos\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DF}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\frac{1}{2}.$$

故平面PAB与平面PCD所成的锐角为60^0 ……………………………………13 分

说明：（III）小题用几何法，解答只要言之有理均应按步给分.

20. 解：（I）设右焦点为$(c,0)$，则$\frac{|c+\sqrt{6}|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3},c+\sqrt{6}=\pm2\sqrt{6},c=\sqrt{6}或c=-3\sqrt{6}(舍去)$……2 分

又离心率$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},a=2\sqrt{2},b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$。……………………………………5 分

（II）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(x_0,0)$，因为$\overrightarrow{NA}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{NB}$，所以

$(x_1-x_0,y_1)=-\frac{7}{5}(x_2-x_0,y_2)$，$y_1=-\frac{7}{5}y_2$…① ……………………………………………7 分

易知当直线l的斜率不存在或斜率为 0 时①不成立，于是设l的方程为$y=kx-1(k\neq0)$，联

联立$\begin{cases}y=kx-1\\x^2+4y^2=8\end{cases}$消$x$得$(4k^2+1)y^2+2y+1-8k^2=0$…② ……………………………9 分

于是$y_1+y_2=-\frac{2}{4k^2+1}$ …③ $y_1y_2=\frac{1-8k^2}{4k^2+1}$…④ ………………………………11 分

由①③得，$y_2=\frac{5}{4k^2+1},y_1=-\frac{7}{4k^2+1}$ 代入④整理得$8k^4+k^2-9=0$，于是$k^2=1$，此时

②的断别式$\Delta>0$，于是直线l的方程是$y=\pm x-1$.……………………………………14 分

21.解：（I）由题意知，$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，

$b=-12$时，由$f'(x)=2x-\frac{12}{x+1}=\frac{2x^2+2x-12}{x+1}=0$，得$x=2$（$x=-3$舍去），

当$x\in[1,2)$时，$f'(x)<0$， 当$x\in(2,3]$时，$f'(x)>0$，

所以当$x\in[1,2)$时，$f(x)$单调递减；当$x\in(2,3]$时，$f(x)$单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(2)=4-12\ln3$； ……………………………………………5 分

（Ⅱ）由题意 $f'(x)=2x+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+b}{x+1}=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 有两个不等实根，即 $2x^2+2x+b=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 有两个不等实根，设 $g(x)=2x^2+2x+b$，则 $\begin{cases}\Delta=4-8b>0\\ g(-1)>0\end{cases}$，

解之得 $0<b<\dfrac{1}{2}$；　　…………………………………………………………10 分

（III）令函数 $h(x)=x^3-x^2+\ln(x+1)$，则 $h'(x)=3x^2-2x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3x^3+(x-1)^2}{x+1}$，

$\therefore$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(0)=0, \therefore x\in(0,+\infty)$ 时，恒有 $h(x)>h(0)=0$，

即 $x^2<x^3+\ln(x+1)$ 恒成立．故 $\ln(x+1)>x^2-x^3$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立．

取 $x=\dfrac{1}{n}\in(0,+\infty)$，则有 $\ln(\dfrac{1}{n}+1)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ 恒成立．即 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{n-1}{n^3}$ 恒成立．

显然，存在最小的正整数 $N=1$，使得当 $n\geq N$ 时，不等式 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{n-1}{n^3}$ 恒成立.

……………………………………………………………………………14 分

1