厦门市 2013 届高三质量检查

数学（理科）试卷

第 I 卷 （选择题　共 50 分）

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题所给的四个答案中有且只有一个答案是正确的.

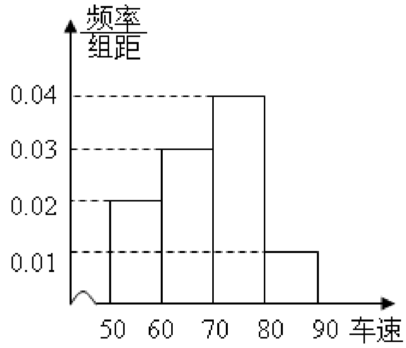
1．已知全集 $U=R$，集合 $A=\left\{x\,\middle|\,|x|<3\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x-2\ge 0\right\}$，则 $A\bigcup C_U B$ 等于（　　）

A．$(-\infty,3]$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$[2,3)$　　D．$(-3,2]$

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm 2x$　　B. $y=\pm 4x$　　C. $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　D. $y=\pm\dfrac{1}{4}x$

3. 某雷达测速区规定：凡车速大于或等于 80 km/h 的汽车视为“超速”，并将受到处罚. 如图是某路段的一个检测点对 200 辆汽车的车速进行检测所得结果的频率分布直方图，则从图中可以看出被处罚的汽车大约有（　　）

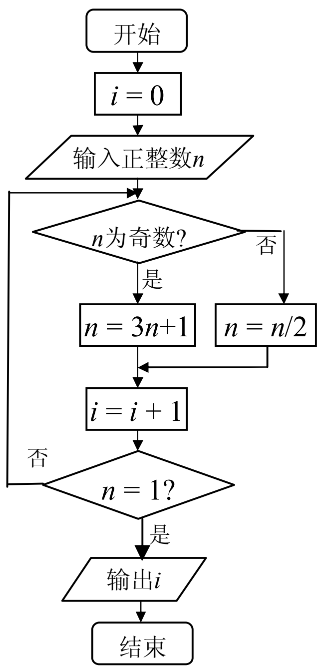


A．20 辆　　B．40 辆　　C．60 辆　　D．80 辆

4. “$e^a>e^b$”是 $\log_2 a>\log_2 b$”的(　　)

A．充分不必要条件　　**B．必要不充分条件**

C．充要条件　　**D．既不充分也不必要条件**



5.函数 $f(x)=x+\sin x\ (x\in\mathbf{R})$（　　）

A.是偶函数且为减函数　　B. 是偶函数且为增函数

C.是奇函数且为减函数　　D. 是奇函数且为增函数

6. 若不等式组 $\begin{cases} y\le x, \\ y\ge 0, \\ x\le 1 \end{cases}$ 表示的平面区域为 M，不等式 $y\ge x^2$ 表示的平面

区域为N，现随机向区域M内投掷一粒豆子，则豆子落在区域N内的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7．甲、乙两人进行乒乓球比赛，比赛采取五局三胜制，无论哪一方先胜三局则比赛结束，假定甲每局比赛获胜的概率均为$\frac{2}{3}$，则甲以 3∶1 的比分获胜的概率为（　　）

A. $\frac{8}{27}$　　B. $\frac{64}{81}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

8. 在右侧程序框图中，输入$n=5$，按程序运行后输出的结果是（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D.6

9．若函数$f(x)=x^3-3x$在$(a,6-a^2)$上有最小值，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(-\sqrt{5},1)$　　B．$[-\sqrt{5},1)$　　C．$\left[-2,1\right)$　　D．$(-2,1)$

10. ΔABC中，$BC=2,A=45^\circ$，B为锐角，点 O 是ΔABC外接圆的圆心，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围是（　　）

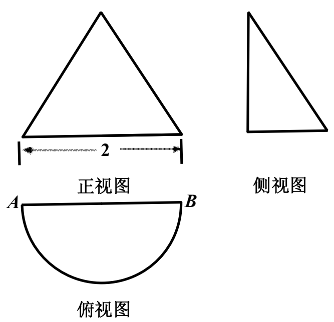
A. $(-2,2\sqrt{2}]$　　B. $(-2\sqrt{2},2]$　　C. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　D. $(-2,2)$

第Ⅱ卷　（非选择题 共 100 分）

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分。

11．若$(a-i)^2$为纯虚数（i为虚数单位），则实数a=______.

12．已知$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{3}{5}$,则$\cos 2x=$_______.



13． 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是等边三角形，俯视图是半圆。现有一只蚂蚁从点 A 出发沿该几何体的侧面环绕一周回到 A 点，则蚂蚁所经过路程的最小值为_______.

14． 在含有 3 件次品的 10 件产品中，取出$n(n\le 10,n\in N^*)$件产品，记ξ_n表示取出的次品数，算得如下一组期望值$E\xi_n$：

当 n=1 时，　$E\xi_1=0\times\frac{C_3^0C_7^1}{C_{10}^1}+1\times\frac{C_3^1C_7^0}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}$；

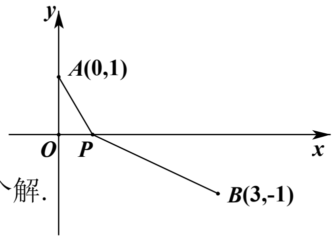
当 n=2 时，　$E\xi_2=0\times\frac{C_3^0C_7^2}{C_{10}^2}+1\times\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+2\times\frac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{6}{10}$；

当 n=3 时，　$E\xi_3=0\times\frac{C_3^0C_7^3}{C_{10}^3}+1\times\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}+2\times\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}+3\times\frac{C_3^3C_7^0}{C_{10}^3}=\frac{9}{10}$；

……

观察以上结果，可以推测：若在含有 M 件次品的 N 件产品中，取出 $n(n\le N,n\in N^*)$ 件产品，记 ξ_n 表示取出的次品数，则 $E\xi_n=$_______.

15. 某同学在研究函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的性质时，受到两点间距离公式的启发，将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0+1)^2}$，则 $f(x)$ 表示 $|PA|+|PB|$（如图），下列关于函数 $f(x)$ 的描述正确的是__________.（填上所有正确结论的序号）

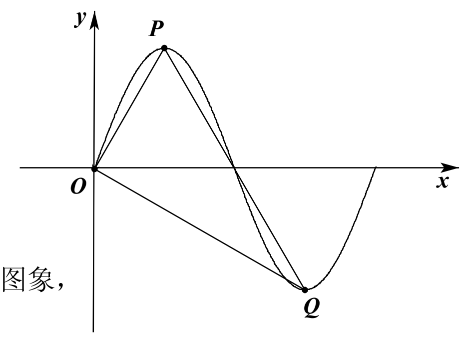


① $f(x)$ 的图象是中心对称图形；　　② $f(x)$ 的图象是轴对称图形；

③函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{13},+\infty)$；　　④方程 $f[f(x)]=1+\sqrt{10}$ 有两个解.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（本小题满分 13 分）

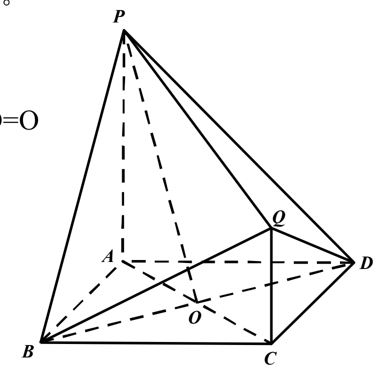


已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\dfrac{3}{2}\cos\omega x$（$\omega>0$）的周期为 4。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\dfrac{2}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，P、Q 分别为函数 $g(x)$ 图象的最高点和最低点（如图），求 $\angle OQP$ 的大小。

17.（本小题满分 13 分）



如图，PA,QC 都与正方形 ABCD 所在平面垂直，AB=PA=2QC=2，AC∩BD=O

（Ⅰ）求证：OP⊥平面 QBD;

（Ⅱ）求二面角 P-BQ-D 平面角的余弦值；

（Ⅲ）过点 C 与平面 PBQ 平行的平面交 PD 于点 E，求 $\dfrac{PE}{ED}$ 的值.

18.（本小题满分 13 分）

某城市 2002 年有人口 200 万，该年医疗费用投入 10 亿元。此后该城市每年新增人口 10 万，医疗费用投入每年新增 x 亿元。已知 2012 年该城市医疗费用人均投入 1000 元。

（Ⅰ）求 x 的值；

（Ⅱ）预计该城市从 2013 年起，每年人口增长率为 10%。为加大医疗改革力度，要求

将来10年医疗费用总投入达到690亿元，若医疗费用人均投入每年新增y元，求y的值。

（参考数据：$1.1^{11}\approx 2.85$）

19.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=x+a\ln x$在$x=1$处的切线l与直线$x+2y=0$垂直，函数$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-bx$.

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）若函数$g(x)$存在单调递减区间，求实数b的取值范围；

（Ⅲ）设$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1<\boldsymbol{x}_2)$是函数$g(x)$的两个极值点，若$b\geq\frac{7}{2}$，求$g(x_1)-g(x_2)$的最大值.

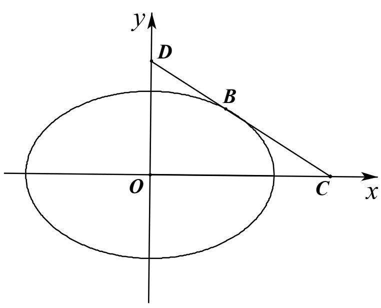
20.（本小题满分14分）

已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

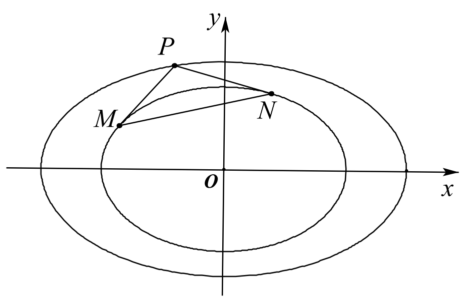
（Ⅰ）我们知道圆具有性质：若E为圆O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$的弦AB的中点，则直线AB的斜率k_{AB}与直线OE的斜率k_{OE}的乘积$k_{AB}\cdot k_{OE}$为定值。类比圆的这个性质，写出椭圆C_1的类似性质，并加以证明；

（Ⅱ）如图（1），点B为C_1在第一象限中的任意一点，过B作C_1的切线l，l分别与x轴和y轴的正半轴交于C，D两点，求三角形OCD面积的最小值；

（Ⅲ）如图（2），过椭圆$C_2:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$上任意一点$P$作$C_1$的两条切线PM和PN，切点分别为M，N.当点P在椭圆C_2上运动时，是否存在定圆恒与直线MN相切？若存在，求出圆的方程；若不存在，请说明理由.



图（1）



图（2）

21.本题设有（1）（2）（3）三个选考题，每题 7 分，请考生任选 2 题作答，满分 14 分.如果多做，则按所做的前两题计分.

（1）（本小题满分 7 分）选修 4-2：矩阵与变换

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}；

（Ⅱ）求直线 $x+y-1=0$ 在矩阵 $A^{-1}B$ 对应的线性变换作用下所得曲线的方程.

（2）（本小题满分 7 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

（Ⅰ）将 C_1 的方程化为普通方程；

（Ⅱ）以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．设曲线 C_2 的极坐标方程是 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in R)$，

求曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标.

（3）（本小题满分 7 分）选修 4-5：不等式选讲

已知正数 x，y，z 满足 $x^2+y^2+z^2=6$.

（Ⅰ）求 $x+2y+z$ 的最大值；

（Ⅱ）若不等式 $|a+1|-2a\ge x+2y+z$ 对满足条件的 x，y，z 恒成立，求实数 a 的取值范围.

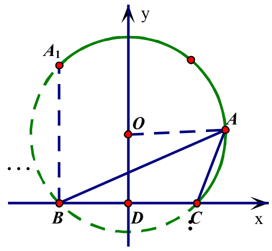
厦门市 2013 届高三质量检查

数学（理科）评分标准

一．选择题； $BCABD$　　$BACCA$

10.分析 1：BC=2，$\angle A=45^0$，所以 $2R=\dfrac{a}{\sin A}\Rightarrow R=\sqrt{2}$，如图建系，

$B(-1,0),C(1,0)$ $O(0,1)$，求得圆 O：$(x-1)^2+y^2=2$，设 $A(x,y)$，则



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\cdots$

分析 2：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}>=4\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}>\ldots$

分析 3

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(c^2-b^2)$$

又 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin 45^0}$，

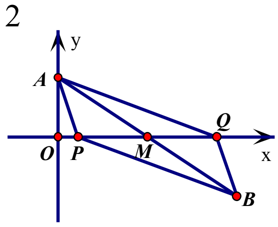
所以

$$\frac{1}{2}(c^2-b^2)=\frac{1}{2}[(2\sqrt{2}\sin C)^2-(2\sqrt{2}\sin B)^2]=\frac{1}{2}(c^2-b^2)=4(\sin^2 C-\sin^2 B)=\ldots$$

二．填空题： **11.** ±1 **12.** $-\dfrac{7}{25}$ **13.** $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ （或 $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ） **14.** $\dfrac{mn}{N}$

15. ②③

15.分析：如图设 $P(x_1,0),Q(x_2,0)$，当 P，Q 关于 $(\dfrac{3}{2},0)$ 对称时，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3}{2}$



$f(x_1)=f(x_2)$,所以 f(x)关于 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称.

④设 $f(x)=t$，则 $f(t)=1+\sqrt{10}$，观察出 $t_1=0$，则 $t_2=3$，由③知无解.

三．解答题：

16.本题考查了三角函数和角公式的变换和三角函数图像周期、对称、平移等基本性质，考查运用有关勾股定理、余弦定理求解三角形的能力，考查了运用数形结合的数学思想解决问题的能力．满分 13 分．

解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\dfrac{3}{2}\cos\omega x$

$=\sqrt{3}(\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)$ --1 分

$=\sqrt{3}(\sin\omega x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\omega x\sin\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$ ------------------3 分

因为T=4，$\omega>o$,所以$\omega=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ -----------------------------------5 分

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{3})$ ------------------6 分

（2）将 $f(x)$ 的图像沿 x 轴向右平移 $\frac{2}{3}$ 个单位得到函数

$g(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x$ ---------------------------7 分

因为 P 、 Q 分别为该图像的最高点和最低点，

所以 $P(1,\sqrt{3}),Q(3,-\sqrt{3})$ --9 分

所以 $OP=2,PQ=4,$ --10 分

$OQ=\sqrt{12},\therefore\cos\theta=\frac{OQ^2+PQ^2-OP^2}{2OQ\cdot QP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ---12 分

所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ ---13 分

法 2：可以得 $\angle POx=60^o,\angle P=60^o,\angle QOx=30^o$ 所以 θ=30^o

法 3：利用数量积公式 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QO}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\overrightarrow{QO}|}=\frac{(-2,2\sqrt{3})\cdot(-3,\sqrt{3})}{\sqrt{4+12}\cdot\sqrt{9+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 θ=30^o

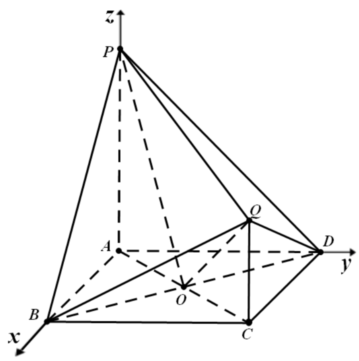
17. 本题主要考查空间直线与平面垂直的判断、线面平行及二面角的判断及计算、空间向量应用的基本方法，

考查空间想象、计算、推理论证等能力．满分 13 分．

解：(Ⅰ) 连接 OQ，由题知 PA∥QC,∴P、A、Q、C 共面

BD⊥AC,BD⊥PA,PA∩AC=A，

∴BD⊥平面 PACQ, ∴BD⊥OP. -------------------------------------1 分



由题中数据得 PA=2，AO=OC=$\sqrt{2}$,OP=$\sqrt{6}$,QC=1，OQ=$\sqrt{3}$

∴△PAO∽△OCQ,∴∠POA=∠OQC,

又∵∠POA+∠OPA=90°∴∠POA+∠COQ=90°∴OP⊥OQ

（或计算 PQ=3，由勾股定理得出∠POQ=90°，OP⊥OQ）------------------3 分

∵OP⊥BD, OP⊥OQ,BD∩OQ=O，∴OP⊥平面 QBD-------------------------4 分

（Ⅱ）如图，以 A 为原点，分别以 AB,AD,AP 所在直线为 X,Y,Z 轴建立直角坐标系，

∴各点坐标分别为 A(0,0,0) ，B(2,0,0) ，C（2,2,0)，D（0,2,0)，P（0,0,2)，Q(2,2,1),O(1,1,0)-------------------5 分

∴ $\overrightarrow{BP}$=(-2,0,2), $\overrightarrow{BQ}$=（0,2,1）,设平面 PBQ 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

∴ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-2x+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=2y+z=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=z\\ 2y=-z\end{cases}$，

不妨设 $y=-1$，

$\therefore \vec{n}=(2,-1,2)$ --6 分

由（Ⅰ）知平面 BDQ 的法向量$\overrightarrow{OP}=(-1,-1,2)$，

---7 分

$\cos<\overrightarrow{OP}，\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-2+1+4}{\sqrt{6}\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

∴二面角 P-BQ-D 平面角的余弦值为

$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.--9 分

（Ⅲ）设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{ED}$,∴ $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{ED}=(1+\lambda)\overrightarrow{ED}=(0,2,-2)$, $\overrightarrow{ED}=\dfrac{1}{1+\lambda}(0,2,-2)$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\left(-2,\dfrac{-2}{1+\lambda},\dfrac{2}{1+\lambda}\right)$，

---11 分

∵CE∥平面 PBQ,∴ $\overrightarrow{CE}$ 与平面 PBQ 的法向量$\vec{n}=(2,-1,2)$垂直。

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-4+\dfrac{2}{1+\lambda}+\dfrac{4}{1+\lambda}=\dfrac{2-4\lambda}{1+\lambda}=0$,---12 分

$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{PE}{ED}=\dfrac{1}{2}$ --13 分

（方法二）在平面 PAD 中，分别过 D 点、P 点作直线 PA、AD 的平行线相交于点 M，连结 MC 交直线 DQ 与点 N，在平面 PQD 中过点 N 作直线 NE∥PQ 交 PQ 于点 E，

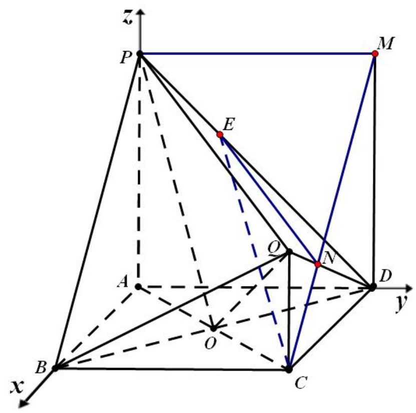
----------------------------11 分

由题可知 CN∥PB,NE∥PQ,CN∩NE=N

∴平面 CNE∥平面 PBQ,∴CE∥平面 PBQ----------------------------------12 分

∵CQ=1，MD=PA=2，∴ $\dfrac{QN}{ND}=\dfrac{1}{2}$

∵NE∥PQ, $\dfrac{PE}{ED}=\dfrac{1}{2}$ --13 分



18．本题主要考查学生审题阅读、理解分析的能力，考查等差等比数列的基本知识，考查数学建模及其应用与计算的能力，考查运用数学知识分析问题和

解决实际问题问题的能力．满分 13 分.

解：（Ⅰ）依题意，从 2002 年起，该城市的人口数组成一个等差数列，

到 2012 年，$n=11$，该城市的人口数为 $200+(11-1)\times 10=300$ 万人，--------------------------------2 分

故 2012 年医疗费用投入为 $300\times 10^4\times 1000=3\times 10^9$ 元，即为 30 亿元，

由于从 2002 年到 2012 年医疗费用投入也组成一个等差数列，--4 分

所以 $10+(11-1)x=30$，解得 $x=2$，--5 分

（Ⅱ）依题意，从 2013 年起（记 2013 年为第一年），

该城市的人口数组成一个等比数列 $\{a_n\}$，

其中 $a_1=300\times(1+10\%)=300\times 1.1$，公比 $q=1.1$，

$a_n=300\times 1.1^n$ --6 分

医疗费用人均投入组成一个等差数列 $\{b_n\}$，

其中 $b_1=1000+y$，公差为 y，$b_n=1000+ny$；----------------------------7 分

于是，从 2013 年起，将来 10 医疗费用总投入为：

$S_{10}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10}$，--8 分

$S_{10}=300(1000+y)\times 1.1+300(1000+2y)\times 1.1^2+\cdots+300(1000+10y)\times 1.1^{10}$，

$1.1S_{10}=300(1000+y)\times 1.1^2+300(1000+2y)\times 1.1^3+\cdots+300(1000+10y)\times 1.1^{11}$，

相减得：$-0.1S_{10}=300[1100+1.1y+1.1^2y+\cdots+1.1^{10}y-(1000+10y)\times 1.1^{11}]$，

$-0.1S_{10}=300[1100+\dfrac{1.1-1.1^{11}}{1-1.1}y-(1000+10y)\times 1.1^{11}]=-300(11y+1750)$，

所以 $S_n=3000(11y+1750)$（万元），--12 分

由题设，$3000(11y+1750)=6900000$，解得 $y=50$。--------------------13 分

19. 本题主要考查函数的导数的几何意义，导数知识的应用等基础知识，函数的单调性、考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、数学建模应用解决问题、分类与整合思想。满分 13 分.

解：（Ⅰ）$\because f(x)=x+a\ln x$，$f'(x)=1+\dfrac{a}{x}$.-------------------------------1 分

$\because l$ 与直线 $x+2y=0$ 垂直，$\therefore k=y'|_{x=1}=1+a=2$，

$\therefore a=1$.---------------------------------3 分

（Ⅱ）$\because g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-(b-1)x$，$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}+x-(b-1)=\frac{x^2-(b-1)x+1}{x}$.----4 分

由题知 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，$\because x>0$,--------------5 分

设 $u(x)=x^2-(b-1)x+1$，则 $u(0)=1>0$ $\therefore$ 只须 $\begin{cases}\frac{b-1}{2}>0\\ \Delta=(b-1)^2-4>0\end{cases}$ -------7 分

$\Rightarrow\begin{cases}b>1\\ b>3\text{或}b<-1\end{cases}\Rightarrow b>3$，故 b 的取值范围为 $(3,+\infty)$.--------8 分

（Ⅲ）$\because g'(x)=\frac{1}{x}+x-(b-1)=\frac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，

$\therefore$ 令 $g'(x)=0$，得：$x^2-(b-1)x+1=0$, $\therefore x_1+x_2=b-1, x_1x_2=1$，

法 1：$\because g(x_1)-g(x_2)=[\ln x_1+\frac{1}{2}{x_1}^2-(b-1)x_1]-[\ln x_2+\frac{1}{2}{x_2}^2-(b-1)x_2]$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)-(b-1)(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

$=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{x_1x_2})=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})$ ------10 分

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore$ 设 $t=\frac{x_1}{x_2}$ $(0<t<1)$，令 $h(t)=\ln t-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}),(0<t<1)$ --------11 分

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})=-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，$\therefore h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. ----------2 分

又 $\because b\geq\frac{7}{2}$，$\therefore (b-1)^2\geq\frac{25}{4}$，即 $(x_1+x_2)^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=t+\frac{1}{t}+2\geq\frac{25}{4}$

$\because 0<t<1$，$\therefore 4t^2-17t+4\geq 0$，$\therefore 0<t\leq\frac{1}{4}$，$h(t)\geq h(\frac{1}{4})=\frac{15}{8}-2\ln 2$，故所求最小值为 $\frac{15}{8}-2\ln 2$ --13 分

法 2：同上得 $g(x_1)-g(x_2)=\frac{1-b}{2}(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}$

$$=\frac{b-1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4}+\ln x_2^2=\frac{b-1}{2}\sqrt{(b-1)^2-4}+2\ln x_2$$

$$=\frac{b-1}{2}\sqrt{(b-1)^2-4}+2\ln\frac{(b-1)+\sqrt{(b-1)^2-4}}{2}$$

$$=\frac{b-1}{2}\sqrt{(b-1)^2-4}+2\ln[(b-1)+\sqrt{(b-1)^2-4}]-2\ln 2$$ -----10 分

令 $t=b-1(t\geq\frac{5}{2})$，则

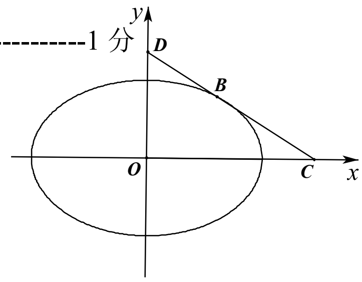
$$h(t)=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-4}+2\ln(t+\sqrt{t^2-4})-2\ln 2$$ --11 分

$$h'(t)=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-4}+\frac{t^2}{2\sqrt{t^2-4}}+\frac{2}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{t^2}{\sqrt{t^2-4}}\geqslant 0$$ --------------------12 分

$h(t)$ 在 $(\frac{5}{2},+\infty)$ 上为增函数.当 $t=\frac{5}{2}$ 时, $h(t)=\frac{15}{8}-2\ln 2$. 故所求最小值为 $\frac{15}{8}-2\ln 2$ ----13 分

20.本题主要考查直线、圆、椭圆等基础知识，考查类比推理论证能力、运算求解能力，考查一般到特殊的思想方法、函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想。考查数学综合分析问题的能力以及创新能力。满分 14 分.

解：（Ⅰ）若 A，B 为椭圆 $C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上相异的两点，$E(x_0,y_0)$ 为 A，B 中点，当直线 AB 的斜率 k_{AB} 与直线 OP 的斜率 k_{OP} 的乘积 $k_{OP}\cdot k_{AB}$ 必为定值;------------1 分



证 1：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1--(1)\\ \frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1--(2)\end{cases}$

（2）-（1）得：$\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{2}+(y_2+y_1)(y_2-y_1)=0$，-----------2 分

∵仅考虑斜率存在的情况∴：

$$x_0+2y_0\cdot k_{AB}=0\Leftrightarrow k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$$ --------------------------------------4 分

证 2：设 AB：$y=kx+b$ 与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 联立得：

$$(1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-2=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{4kb}{1+2k^2}$$，---2 分

所以

$$x_0=-\frac{2kb}{1+2k^2}\Rightarrow y_0=\frac{b}{1+2k^2}\Rightarrow k_{OE}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{2k}\Rightarrow k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$$ ----------4 分

（Ⅱ）（ⅰ）当点 A 无限趋近于点 B 时，割线 AB 的斜率就等于椭圆上的 B 的切线的斜

率k， 即$k\cdot k_{OB}=-\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{x_2}{2y_2}$

所以点 B 处的切线 QB：$y-y_2=-\dfrac{x_2}{2y_2}(x-x_2)\Leftrightarrow\dfrac{x_2}{2}x+y_2y=1$ ----------------6 分

令$x=0$，$y_D=\dfrac{1}{y_2}$，令$y=0,x_C=\dfrac{2}{x_2}$，所以$S_{\Delta OCD}=\dfrac{2}{x_2y_2}$ -----------------8 分

又点 B 在椭圆的第一象限上，所以$x_2>0,y_2>0,\dfrac{{x_2}^2}{2}+{y_2}^2=1$

$\therefore 1=\dfrac{{x_2}^2}{2}+{y_2}^2\geq 2\sqrt{\dfrac{{x_2}^2}{2}{y_2}^2}=\sqrt{2}x_2y_2$

$\therefore S_{\Delta OCD}=\dfrac{2}{x_2y_2}\geq\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当$\dfrac{{x_2}^2}{2}={y_2}^2\Leftrightarrow x_2=\sqrt{2}y_2=1$

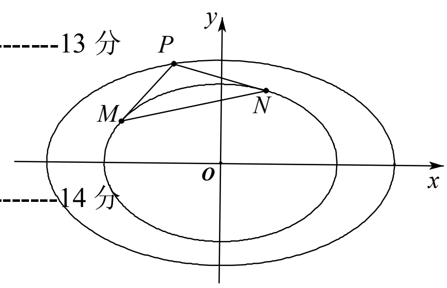
所以当$B(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$时，三角形 OCD 的面积的最小值为$\sqrt{2}$ -------10 分（没写等号成立扣 1 分）

（ii）设$P(m,n)$，由（i）知点$M(x_3,y_3)$处的切线为：$\dfrac{x_3}{2}x+y_3y=1$

又PM过点$P(m,n)$，所以$\dfrac{x_3}{2}m+y_3n=1$，又可理解为点$M(x_3,y_3)$在直线$\dfrac{x}{2}m+yn=1$上

同理点$N(x_4,y_4)$在直线$\dfrac{x}{2}m+yn=1$上，所以直线 MN 的方程为：$\dfrac{m}{2}x+ny=1$ --------------------------12 分

所以原点 O 到直线 MN 的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{m^2}{4}+n^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，----------13 分



所以直线 MN 始终与圆$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$相切. -----------------------14 分

21. （1）选修 4-2：矩阵与变换

本小题主要考查逆矩阵、矩阵的乘法等基础知识，考查书写表达能力、运算求解能力。满分 7 分

解：（Ⅰ）$\because \det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$，$\therefore$ 矩阵 A 可逆． ----------------------1 分

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ --------------------------------------3 分

（Ⅱ）$A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ------------------4 分

设直线 $x+y-1=0$ 上任意一点 $P(x,y)$ 在矩阵 $A^{-1}B$ 对应的线性变换作用下得到 $P^{'}(x^{'},y^{'})$，

则 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ ------------------------------5 分

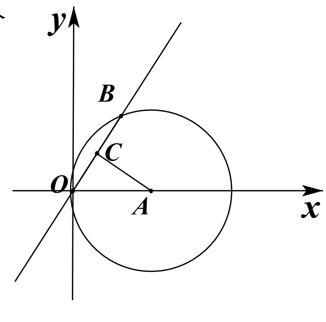
即：$\begin{cases}x'=x+3y\\ y'=y\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x=x'-3y'\\ y=y'\end{cases}$ -----------------6 分

代入 $x+y-1=0$ 得 $x'-2y'-1=0$ 即 $x-2y-1=0$ 为所求的曲线方程。-----7 分

（2）选修 4-4：坐标系与参数方程

本小题主要考查圆的参数方程、直线的极坐标方程、直线与圆的位置关系、极直互化等基础知识，考查运算求解能力，数形结合思想。满分 7 分

解：（Ⅰ）C_1 的普通方程为：$(x-2)^2+y^2=4$ --------3 分



（Ⅱ）法一：如图,设圆心为 A，$\because$ 原点 O 在圆上，

设 C_1 与 C_2 相交于 O、B，取线段 OB 中点 C，

$\because$ 直线 OB 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，OA=2，-----------------4 分

$\therefore$ OC=1 从而 OB=2，----------------------------------5 分

$\therefore$ O、B 的极坐标分别为 $O(0,0),B(2,\frac{\pi}{3})$.-----------------------------------7 分

法二：C_2 的直角坐标方程为：$y=\sqrt{3}x$ --------------------------------------4 分

代入圆的普通方程后，得 $(x-2)^2+(\sqrt{3}x)^2=4$，即：$x(x-1)=0$，得：$x_1=0,x_2=1$

$\therefore$ O、B 的直角坐标分别为 $O(0,0),B(1,\sqrt{3})$.---------------5 分

从而 O、B 的极坐标分别为 $O(0,0),B(2,\frac{\pi}{3})$.------------------7 分

（3）选修4-5：不等式选讲

本小题主要考查柯西不等式、绝对值的意义、绝对值不等式、恒成立问题等基础知识，考查运算求解能力，分类讨论思想。满分7分

解：（Ⅰ）由柯西不等式，$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+1^2)\geq(x+2y+z)^2$ -----------1分

即有$(x+2y+z)^2\leq 36$，

又x、y、z是正数，$\therefore x+2y+z\leq 6$即$x+2y+z$的最大值为6， --------2分

当且仅当$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$，即当$x=z=1, y=2$时取得最大值。-------------3分

（Ⅱ）由题意及（Ⅰ）得，$|a+1|-2a\geq(x+2y+z)_{\max}=6$ ---------------------4分

即： -----------------------------6分

解得：a无解 或 $a\leq-\dfrac{7}{3}$ 综上，实数a的取值范围为$a\leq-\dfrac{7}{3}$ ---------7分