福州三中2013届高三高考模拟考
数学（文科）试卷

本试卷共150分，考试时间120分钟

注意事项：

(1)　答卷前，考生务必用0.5mm黑色签字笔将自己的班级、姓名、座号填写在试卷和答卷的密封线外。

(2)　请考生认真审题，将试题的答案正确书写在答卷上的指定位置，并认真检查以防止漏答、错答。

(3) 考试中不得使用计算器。

参考公式：

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$　　　棱柱的体积公式 $V=Sh$

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$　　　棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$

棱台的体积公式 $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1,S_2 分别表示棱台的上、下底面积，h 表示棱台的高

其中 R 表示球的半径，其中 S 表示棱柱（锥）的底面积，h 表示棱柱（锥）的高

如果事件 A,B 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=(-1,2)$, 集合 $B=\{x\,|-x^2-2x+3>0\}$，则 $A\bigcup B=$（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-3,2)$　　C．$(-1,3)$　　D．$(-1,2)$

2．设i是虚数单位，则复数 $z=(\frac{1+i}{1-i})^{2013}=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-i$　　D．i

3.　命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\ln(x^2+1)>0$”的否定为（　　）

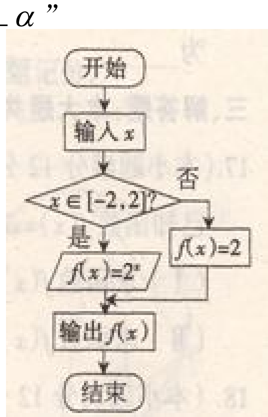
(A) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\ln(x^2+1)\leqslant0$　　(B) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\ln(x_0^2+1)>0$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\ln(x^2+1)<0$　　(D) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\ln(x_0^2+1)\leqslant0$

4．已知 l,m 是直线，α 是平面，且 $m\subset a$，则“$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的（　　）

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件



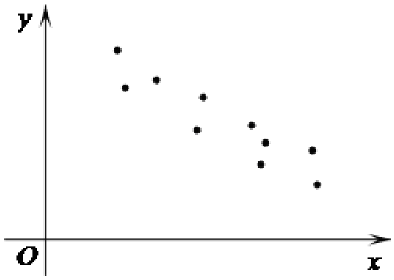
5．阅读程序框图(如右图)，如果输出的函数值在区间[$\frac{1}{4}$，1]上，则输入的实数x的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B.［－2,0］　　C.［0,2］　　D. $[2,+\infty)$

6．在等差数列$\{a_n\}$中，$2a_4+a_7=2$，则数列$\{a_n\}$的前 9 项和等于（　　）

A．3　　　　B． 9　　　　C．6　　　　D．12

7．设$(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$，是变量$x$和$y$的$n$个样本点，直线$l$是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性回归方程(如图)，以下结论中正确的是（　）



A．x和y正相关

B．x和y的相关系数为直线l的斜率

C．x和y的相关系数在－1 到 0 之间

D．当n为偶数时，分布在l两侧的样本点的个数一定相

8. 已知函数 y=2$\sin^2$（$x+\dfrac{\pi}{4})-\cos 2x$, 则函数的最小正周期 T 和它的图象的一条对称轴方程是（　）

A. T=2π，一条对称轴方程为$x=\dfrac{\pi}{8}$　　　　B. T=2π，一条对称轴方程为$x=\dfrac{3\pi}{8}$

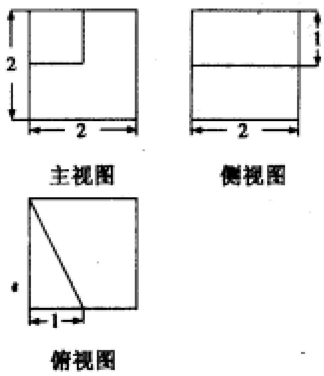
C．T=π，一条对称轴方程为$x=\dfrac{\pi}{8}$　　　　D．T=π，一条对称轴方程为$x=\dfrac{3\pi}{8}$

9．函数$y=\log_m x+1(m>0,m\neq 1)$的图像恒过定点$M$，若点$M$在直线$ax+by=1\,(a>0,b>0)$上，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$的最小值为（　　）

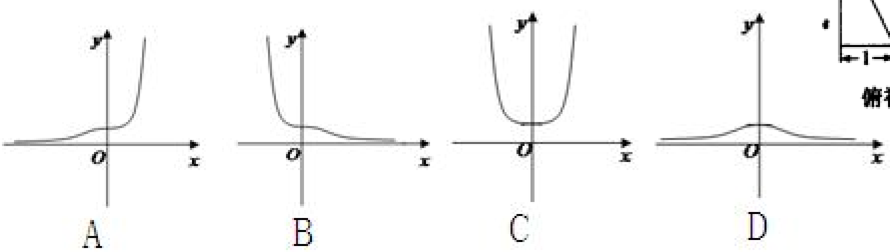
A．8　　　　B．9　　　　C．10　　　　D．12

10．若某几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积是(　　)

A．5　　　　B．6　　　　C．7　　　　D．8



11．函数$y=e^{\sin x-x}$的图象大致为（　　）



12. 已知i是虚数单位，记$e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$，其中$e=2.718...,\theta\in\mathbf{R}$，给出以下结论：　①$e^{\pi i}+1=0$　②$e^{-\theta i}=\dfrac{1}{e^{\theta i}}$　③$e^{\theta_1 i}\cdot e^{\theta_2 i}=e^{(\theta_1+\theta_2)i}$，则其中正确结论的个数是（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在相应横线上.

13. 已知向量$\vec{a}=(e^x,-1)$, 向量$\vec{b}=(1,x+1)$，设函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$, 则函数$f(x)$的零点个数为________.

14. 若圆$x^2+y^2+2x-4y+m=0(m<3)$的一条弦 AB 的中点为 P（O，1），则垂直于 AB 的直径所在直线的方程为____________.

15. 若 x,y 满足$\begin{cases}x+y\geq 1,\\ x-y\geq -1,\\ 2x-y\leq 2,\end{cases}$且$z=ax+2y$仅在点（1，0）处取得最小值，则实数$a$的取值范围是____________.

16. 已知命题：在平面直角坐标系xoy中，ΔABC的顶点$A(-p,0)$和$C(p,0)$，顶点B在椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>n>0,p=\sqrt{m^2-n^2})$上，则$\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{1}{e}$（其中$e$为椭圆的离心率）. 试将该命题类比到双曲线中，给出一个真命题是________________.

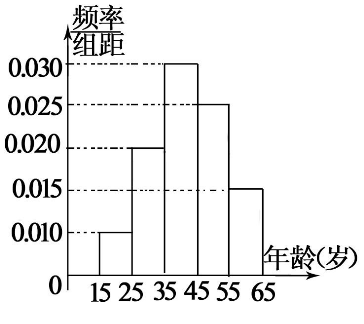
三、解答题：（本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本题 12 分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，点$(n,S_n)(n\in N^*)$均在函数$y=f(x)$的图象上.

(I) 求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(II) 若$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

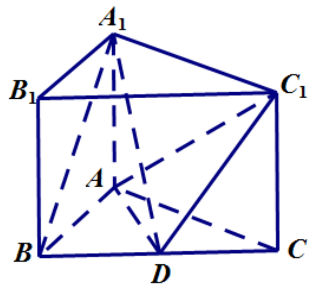
18.（本题 12 分）某市为了配合宣传新《道路交通法》举办有奖征答活动, 随机对该市15~65岁的人群抽样了n人, 回答问题统计结果如图表所示.（左图是样本频率分布直方图，右表是对样本中回答正确人数的分析统计表）.



组号	分组	回答正确的人数	回答正确的人数占本组的概率
第 1 组	[15,25)	5	0.5
第 2 组	[25,35)	a	0.9
第 3 组	[35,45)	27	x
第 4 组	[45,55)	b	0.36
第 5 组	[55,65)	3	y

(Ⅰ) 分别求出n,a,b,x,y的值；

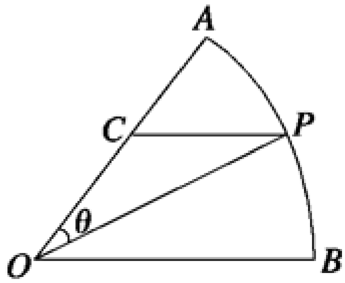
(Ⅱ) 从第 2, 3, 4 组回答正确的人中用分层抽样的方法抽取 6 人, 有奖征答活动组委会决定在所抽取的 6 人中随机抽取 2 人颁发幸运奖, 求获得幸运奖的 2 人来自不同年龄组的概率.



19.（本题 12 分）如图三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱与底面垂直，ΔABC 是等边三角形，点 D 是 BC 的中点.

(Ⅰ)证明：$A_1B//$ 平面 C_1AD；

(Ⅱ)若在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内部（含表面）随机投放一个点 P，求点 P 落在三棱锥 C_1-A_1AD 内部（含表面）的概率.



20.（本题 12 分）如图所示扇形 AOB，半径为 2，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，过半径 OA 上一点 C 作 OB 的平行线，交圆弧 AB 于点 P.

(Ⅰ)若 C 是 OA 的中点，求 PC 的长；

(Ⅱ)设 $\angle COP=\theta$，求△ POC 面积的最大值及此时 θ 的值.

21.（本题 12 分）已知椭圆 E 的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 且经过点 $M(2,1)$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ) 设平行于 OM 的直线 l 交椭圆 E 于两个不同点 A、B，直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1、k_2；

① 若直线 l 过椭圆的左顶点，求 k_1、k_2 的值；

② 试猜测 k_1、k_2 的关系；并给出你的证明.

22.（本题 14 分）已知函数 $f(x)=\ln x-2x^2+3x$.

（I）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）证明：存在 $m\in(1,+\infty)$，使得 $f(m)=f(\dfrac{1}{2})$；

（Ⅲ）记函数 y= $f(x)$ 的图象为曲线 Γ. 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是曲线 Γ 上的不同两点. 如果在曲线 Γ 上存在点 $M(x_0,y_0)$，使得：① $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$；②曲线 Γ 在点 M 处的切线平行于直线 AB，则称函数 $f(x)$ 存在“中值伴随切线”，试问：函数 $f(x)$ 是否存在“中值伴随切线”，请说明理由.

福州三中 2013 届高三高考模拟考
数学（文史类）参考答案

一．选择题：

$BDDAB, CCDBC, BD$

二．填空题：

13．1　　14．$x+y-1=0$　　15．$a\in(-4,2)$

16. 在平面直角坐标系 xoy 中，ΔABC 的顶点 $A(-p,0)$ 和 $C(p,0)$，顶点 B 在双曲线 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>n>0, p=\sqrt{m^2+n^2})$ 上，则 $\frac{|\sin A-\sin C|}{\sin B}=\frac{1}{e}$（其中 e 为双曲线的离心率）.

三．解答题：

17．（I）$\because$ 点 $(n,S_n)(n\in N^*)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，

$\therefore S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$ 即 $2S_n=n^2+n$，$n=1$ 时 $a_1=1;$

$n\geq 2$ 时 $2S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$，故 $2(S_n-S_{n-1})=2n,$ 即 $a_n=n$.

（II）　$\because b_n=n(\frac{1}{2})^n$，

$$\therefore T_n=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+...+(n-1)(\frac{1}{2})^{n-1}+n(\frac{1}{2})^n$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n=\quad+(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+......+(n-1)(\frac{1}{2})^n+n(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+...+(\frac{1}{2})^n-n(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(\frac{1}{2})^n-n(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\therefore T_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$$

18．（Ⅰ）由第 1 组数据知该组人数为 $\frac{5}{0.5}=10$，因为第 1 组的频率是 $0.01\times 10=0.1$，

故 $n=\frac{10}{0.1}=100$；因为第 2 组人数为 $0.02\times 10\times 100=20$，故 $a=20\times 0.9=18$；

因为第 3 组人数为 $0.03\times 10\times 100=30$，故 $x=\frac{27}{30}=0.9$；因为第 4 组人数为 $0.025\times 10\times 100=25$，故 $b=25\times 0.36=9$；因为第 5 组人数为 $0.015\times 10\times 100=15$，故 $y=\frac{3}{15}=0.2$.

（Ⅱ）第 2, 3, 4 组回答正确的人的比为$18:27:9=2:3:1$，故这 3 组分别抽取 2 人，3 人，1 人. 设第 2 组为A_1, A_2，第 3 组为B_1, B_2, B_3，第 4 组为C_1；则随机抽取 2 人可能是$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),$ $(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_3,C_1)$，共 15 种. 其中来自不同年龄组的有$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),$ $(B_1,C_1),(B_2,C_1),(B_3,C_1)$共 11 种，

故获得幸运奖的 2 人来自不同年龄组的概率是$\frac{11}{15}$.

19.（Ⅰ）连接A_1C，交AC_1于点E，连接DE，在$\triangle A_1BC$中DE是中位线，故$DE//A_1B$，$\because DE\subseteq$面$C_1AD, A_1B\not\subset$面$C_1AD\therefore A_1B//$平面C_1AD.

（Ⅱ）设底面边长为a，侧棱长为h，则$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$，因为点$D$是$BC$的中点，过$D$作$AC$的垂线交$AC$于$F$，有$DF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，故$V_{C_1-A_1AD}=V_{D-A_1AC_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a\cdot\frac{1}{2}ah$，所以点$P$落在三棱锥$C_1-A_1AD$内部（含表面）的概率$\frac{1}{6}$.

20.（Ⅰ）$\because CP//OB,\ \angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\angle OCP=\frac{2\pi}{3}$，若$C$是$OA$的中点，则在$\Delta OPC$中，$OP^2=OC^2+CP^2-2OC\cdot CP\cdot\cos\angle OCP,$即$4=1+CP^2+CP$，解得$CP=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

（Ⅱ）由正弦定理$\frac{OC}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{OP}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，$OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta),$所以

$$S_{\Delta OCP}=\frac{1}{2}OP\cdot OC\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\cdot\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$$=2\cos\theta\sin\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta=\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\cos 2\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\theta\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，$\because 2\theta+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})\therefore S_{\Delta OPC}\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时,$\max S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

21. (Ⅰ)设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，依题意有：$\begin{cases} e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 \\ \dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases}$，

解得$a^2=8,b^2=2$，所以椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ) ①若直线l过椭圆的左顶点且直线l平行于OM，则直线的方程是$l:y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}$，

联立方程组$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=\sqrt{2} \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=-2\sqrt{2} \\ y_2=0 \end{cases}$，

故$k_1=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},k_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

②因为直线l平行于OM，设在y轴上的截距为b，又$k_{OM}=\dfrac{1}{2}$，所以直线l的方程为

$y=\dfrac{1}{2}x+b$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+b \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$得$x^2+2bx+2b^2-4=0$．设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-2b,x_1x_2=2b^2-4$．又$k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2},\ k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$,

故$k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

又$y_1=\dfrac{1}{2}x_1+b,y_2=\dfrac{1}{2}x_2+b$,

所以上式分子$=(\dfrac{1}{2}x_1+b-1)(x_2-2)+(\dfrac{1}{2}x_2+b-1)(x_1-2)$

$=x_1x_2+(b-2)(x_1+x_2)-4(b-1)=2b^2-4+(b-2)(-2b)-4(b-1)=0$，

故$k_1+k_2=0$．所以直线MA与直线MB的倾斜角互补.

22.（I）

$f'(x)=\frac{1}{x}-4x+3=\frac{-4x^2+3x+1}{x}=\frac{-(x-1)(4x+1)}{x}(x>0)$， $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

$x\in(0,1)$时$f'(x)>0,\ x\in(1,+\infty)$时$f'(x)<0,$故$x=1$时$f(x)$有极大值 1，无极小值.

(Ⅱ)构造函数：

$F(x)=f(x)-f(\frac{1}{2})=\ln x-2x^2+3x-(-\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=\ln x-2x^2+3x+\ln 2-1$，

由（I）知$f(1)>f(\frac{1}{2})$，故$F(1)>0$，又$F(e)=-2e^2+3e+\ln 2=e(3-2e)+\ln 2<0$，

所以函数$F(x)$在区间$(1,e)$上存在零点．即存在$m\in(1,+\infty)$，使得$f(m)=f(\frac{1}{2})$.

（III）

$$k_{AB}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2-2(x_1^2-x_2^2)+3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2(x_1+x_2)+3$$

$\because f'(x_0)=\frac{1}{x_0}-4x_0+3=\frac{2}{x_1+x_2}-4\frac{x_1+x_2}{2}+3$，

假设存在“中值伴随切线”，则有$k_{AB}=f'(x_0)$，可得

$$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{2}{x_1+x_2}\Rightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}=2\cdot\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\Rightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}=2\cdot\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1},$$

令$\frac{x_1}{x_2}=t$，则$\ln t=2\cdot\frac{t-1}{t+1}$，构造$g(t)=\ln t-2\cdot\frac{t-1}{t+1}$,

有$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$恒成立，故函数$g(t)$单调递增，无零点，

所以函数$f(x)$不存在“中值伴随切线”　.