

2012—2013 学年度高三校模拟考试

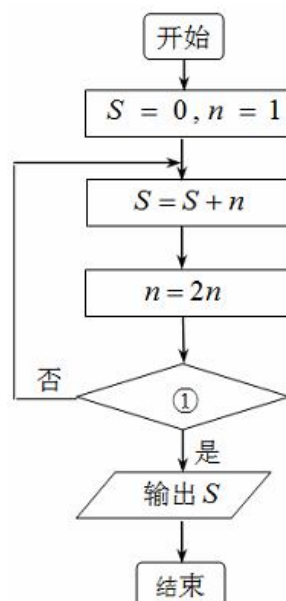
本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,其中第Ⅱ卷第21(1)、(2)、(3)题为选考题,请考生根据要求选答:其它题为必考题,考生作答时,将答案答在答题卡上,在本试卷上答题无效,

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意要求的.

1. 已知集合  $M=\{x|x>1\}$ , 集合  $N=\{x|x^2-2x<0\}$ , 则  $M\cap N$  等于
- A.  $\{x|1<x<2\}$  B.  $\{x|0<x<1\}$   
C.  $\{x|0<x<2\}$  D.  $\{x|x>2\}$
2. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若以  $a_2, a_4$  是方程  $x^2-4x+3=0$  的两个根, 则  $S_5$  等于
- A. -20 B. -10 C. 10 D. 20
3. 已知  $i$  是虚数单位,  $a\in\mathbb{R}$ , 则 “ $a=1$ ” 是 “ $\frac{a+i}{a-i}$  为纯虚数” 的
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知  $a>0, b>0$ , 直线  $ax-bv+1=0$  是圆  $(x+1)^2+(y-1)^2=4$  的一条对称轴, 则  $a\cdot b$  的最大值等于
- A. 2 B. 1 C.  $\frac{1}{2}$  D.  $\frac{1}{4}$

- A. 奇函数, 在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递减  
B. 奇函数, 在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增  
C. 偶函数, 在  $(-\infty, 0)$  上递减, 在  $(0, +\infty)$  上递增  
D. 偶函数, 在  $(-\infty, 0)$  上递增, 在  $(0, +\infty)$  上递减

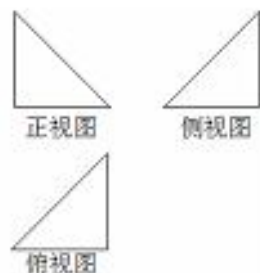
6. 已知程序框图如图所示，执行相应程序，若输出  $S=15$ ，则框图中①处可以填入
- A.  $n \geq 4$  ?                      B.  $n > 8$  ?  
C.  $n > 4$  ?                      D.  $n \geq 8$  ?
7. 某人发现表停了，他打开收音机，想听电台报时，则等待报时的时间不多于 10 分钟的概率等于



- A.  $\frac{1}{12}$                       B.  $\frac{1}{10}$                       C.  $\frac{1}{6}$                       D.  $\frac{1}{3}$

8. 已知几何体的三视图如右图所示，它们都是直角边长等于 1 的等腰直角三角形，则这个几何体的表面积等于

- A. 2                      B.  $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$   
C. 4                      D.  $\sqrt{2}+1$



9. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ,  $O$  为原点，在椭圆上存在一个点  $P$  使得  $\triangle OFP$  为等边三角形，则椭圆的离心率为

- A.  $\sqrt{3}-1$                       B.  $2-\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$                       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$

10. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，定义  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  两点之间的“直角距离”为  $\|MN\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . 对于以下结论，其中正确的序号是

①  $O$  为坐标原点，满足条件  $\|OP\| = 1$  的点  $P$  的轨迹围成的图形的面积为 2;

② 设  $A(1, 1)$ ,  $B$  为直线  $2x - y + 3 = 0$  上任意一点，则  $\|AB\|$  的最小值为 2;

③  $D$  为坐标原点， $M$  为曲线  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2$  上任意一点，则  $\|OM\|$  恒等于 2.

- A. ①                      B. ①②                      C. ①③                      D. ①②③

## 第 II 卷 (非选择题共 100 分)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。把答案填在答题卡相应位置。

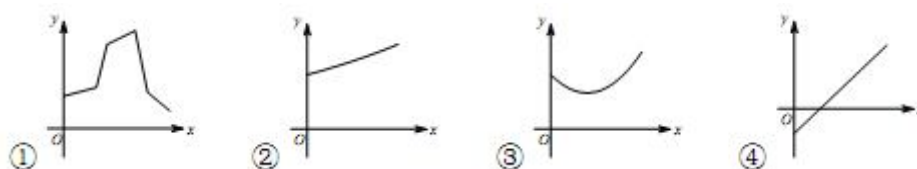
11. 已知向量  $a = (\sin \theta, 2)$ ,  $b = (\cos \theta, 1)$ , 且  $a \parallel b$ , 则  $\tan 2\theta =$  \_\_\_\_\_.

12. 若  $(1-x)^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$  则  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 =$  \_\_\_\_\_.

13. 若  $(x, y)$  满足  $\begin{cases} x+y \geq 6 \\ y \leq x, \\ y \geq 1, \end{cases}$  则函数  $z=2x-y$  的最小值等于 \_\_\_\_\_.

14. 曲线  $C: y=x^2$  在  $(1, 1)$  点处的切线  $l$ , 与曲线  $C$  及  $x$  轴围成的封闭图形的面积等于 \_\_\_\_\_.

15. 如图给出四个函数图象，它们分别与下列的一个现实情境相匹配：



情境 A: 根据乘客人数，每辆公交车一趟营运的利润；

情境 B: 被称为“经历春夏秋冬四季”的福州某一天每一时刻的气温；

情境 C: 按时间记录的某一个减肥失败者的体重；

情境 D: 按年度记录，平均增长率控制在某一范围的人口数。

其中情境 A、B、C、D 分别对应的图象是\_\_\_\_\_（按序填写正确图象的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. 每天的 P 值是空气质量的重要指标，空气质量级别与 P 值范围对应关系如下表所示。为了了解某市 2013 年的空气质量，随机抽取了该市 2013 年 10 天的 P 值数据，绘制成茎叶图如下图所示。

(I) 试估计该市 2013 年 P 值的日平均值；

(II) 把频率视作概率，求该市在后续 3 天时间里至少有 1 天空气质量超标的概率；

(III) 从这 10 天的 P 值数据中任取 3 天的数据，将其中空气质量达到一级的天数记为

$\xi$ ，求  $\xi$  的分布列和数学期望

| P 值范围   | 空气质量级别 |
|---------|--------|
| (1,35]  | 1 级    |
| (35,75] | 2 级    |
| 大于 75   | 超标     |

|   | P 值数据 |
|---|-------|
| 2 | 5     |
| 3 | 0 0 5 |
| 4 | 4 6 8 |
| 5 | 2     |
| 6 | 2     |
| 7 | 8     |

17. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ，函数  $f(x) = ax^2 - 2\ln x$ 。

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性；

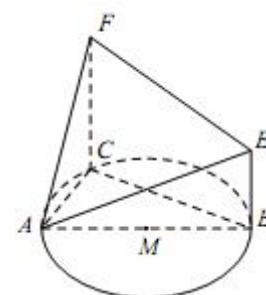
(II) 是否存在  $a$  的值，使得方程  $f(x) = 3$  有两个不等的

实数根？若存在，求出  $a$  的取值范围；若不存在，说明理由。

18. 如图，某简单几何体的一个面 ABC 内接于圆 M，AB 是圆 M 的直径，CF // BE，BE ⊥ 平面 ABC，且 AB=2，AC=1，BE+CF=7。

(I) 求证：AC ⊥ EF；

(II) 当 CF 为何值时，平面 AEF 与平面 ABC 所成的锐角取得最小值？



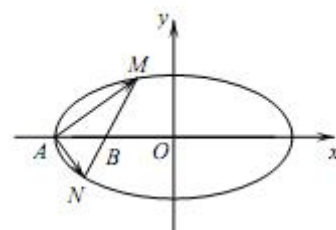
19. 已知双曲线  $C$  的中心在原点且经过点  $D(2, 0)$ ,  $m_1 = (2, 1)$ ,  $m_2 = (2, -1)$  分别是两条渐近线的方向向量.

(I) 求双曲线  $C$  的方程;

(II) 如图所示, 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左顶点为  $A$ , 经过点

$B(-\frac{6}{5}, 0)$  的直线  $l$  与椭圆交于  $M, N$  两点, 试判断

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$  是否为定值, 并证明你的结论.



(III) 双曲线  $C$  或抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  是否也有类似 (II)

的结论? 若是, 请选择一个曲线写出类似结论 (不要求书写求解或证明过程).

20. 如图, 准备在扇形空地  $AOB$  上修建一个山水景观  $OPQ$ , 已知  $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ ,  $OA = 1\text{km}$ ,

点  $P$  在扇形弧上,  $PQ \parallel OA$  交  $OB$  于点  $Q$ , 记  $\angle POA = x$ .

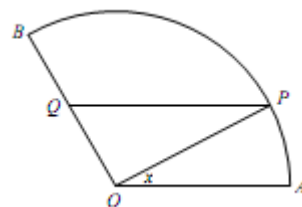
(I) 当  $Q$  是  $OB$  中点时, 求  $PQ$  的长;

(II) 求使山水景观  $OPQ$  的面积  $S$  最大时  $x$  的值;

(III) 为了方便路人休闲行走, 要在扇形空地上铺设一条从入口  $A$  到出口  $B$  的观光道路, 道路由弧

$\overline{AP}$ , 线段  $PQ$  以及线段  $QB$  组成, 怎样设计才能使

得观光道路最长?



21. 本题有 (1)、(2)、(3) 三个选答题, 每题 7 分, 请考生任选 2 题作答, 满分 14 分. 如果多做, 则按所做的前两题计分. 作答时, 先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑, 并将选题号填入括号中.

(1) (本题满分 7 分) 选修 4—2: 矩阵与变换

在平面直角坐标系  $xOy$  内, 变换  $D_1$  将每个点  $(x, y)$  沿着与  $x$  轴平行的方向平移  $2y$

个单位变成点  $P'$ . 变换  $D_2$  将点  $(x, y)$  变为  $(x', y')$ , 其坐标变换公式为 
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y. \end{cases}$$

(I) 写出  $D_1$  的坐标变换公式及  $D_1$ 、 $D_2$  所对应的二阶矩阵  $A$ 、 $B$ ;

(II) 求曲线  $C: x^2 - 4y^2 = 1$  依次经过  $D_1$  和  $D_2$  变换作用后的曲线  $C'$  的方程.

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  内, 直线  $l$  的参数方程是 
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{3}{5}t, \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以  $O$  为极

点、 $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sin\theta$ .

(I) 将曲线  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程;

(II) 设直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $M$ , 点  $N$  在曲线  $C$  上, 求  $M, N$  两点间距离  $|MN|$  的最小值.

(3) (本小题满分 7 分) 选修 4—5:不等式选讲

设函数  $f(x) = x^2 - 2x$ .

(I) 证明: 对任意  $x \in R, f(x) > 2x - 6$  恒成立;

(II) 解不等式  $f(x) \leq |x-1| + |x-2|$

福州三中 2012-2013 学年高三校模拟考试数学（理科）参考答案

一、选择题：每小题 5 分，共 50 分

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| A | C | A | D | B  |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| B | C | D | A | B  |

二、填空题：每小题 4 分，共 20 分

|    |                |
|----|----------------|
| 11 | $-\frac{4}{3}$ |
| 12 | -1             |
| 13 | 3              |
| 14 | $\frac{1}{12}$ |
| 15 | ④①③②           |

三、解答题：共 80 分

16. （本小题满分 13 分）

（I）估计该市 2013 年 P 值的日平均值

$$\bar{X} = \frac{25 + 30 + 30 + 35 + 44 + 46 + 48 + 52 + 62 + 78}{10} = 45. \quad \text{.....3 分}$$

（II）依题意，1 天空气质量超标的概率  $p = \frac{1}{10}$ ,

所以 1 天空气质量未超标的概率  $p' = 1 - p = \frac{9}{10}$ . .....5 分

依题意，空气质量是否超标相互独立，

该市在后续 3 天时间里至少有 1 天空气质量超标的概率

$$P = 1 - p^3 = 0.271. \quad \text{.....8 分}$$

（III） $\xi$  的可能取值为 3,2,1,0.

这 10 天的 P 值数据中空气质量达到一级的天数共有 4 天.

$$\text{所以 } P(\xi = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}; \quad P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10};$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}; \quad P(\xi = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}.$$

所以  $\xi$  的分布列如下表：

|       |                |                |               |               |
|-------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\xi$ | 3              | 2              | 1             | 0             |
| $P$   | $\frac{1}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

.....11 分

$$\xi \text{ 的数学期望 } E\xi = 3 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{5}. \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

17. (本小题满分 13 分)

$$(I) f'(x) = 2ax - \frac{2}{x} = \frac{2ax^2 - 2}{x}, \quad x > 0. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

①当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;  $\dots\dots 3 \text{ 分}$

②当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{\sqrt{a}}{a}$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$  与  $f(x)$  的变化情况如下表:

| $x$     | $(0, \frac{\sqrt{a}}{a})$ | $\frac{\sqrt{a}}{a}$ | $(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty)$ |
|---------|---------------------------|----------------------|---------------------------------|
| $f'(x)$ | —                         | 0                    | +                               |
| $f(x)$  | $\searrow$                | 极小值                  | $\nearrow$                      |

所以函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{a}}{a})$  内单调递减, 在  $(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty)$  内单调递增.  $\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 存在  $a \in (0, e^2)$ , 使得方程  $f(x) = 3$  有两个不等的实数根.

理由如下:

由 (I) 可知当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 方程  $f(x) = 3$  不可能有两个相等的实数根;

当  $a > 0$  时, 根据函数的单调性可知, 使得方程  $f(x) = 3$  有两个不等的实数根,

等价于函数的极小值  $f(\frac{\sqrt{a}}{a}) < 3$ ,  $\dots\dots 10 \text{ 分}$

即  $f(\frac{\sqrt{a}}{a}) = 1 + \ln a < 3$ , 解得  $0 < a < e^2$ ,

所以  $a$  的取值范围是  $(0, e^2)$ .  $\dots\dots 13 \text{ 分}$

18. (本小题满分 13 分)

(I) 因为  $CF \parallel BE$ , 所以  $CF$ ,  $BE$  确定一个平面  $FCBE$ .

又因为  $BE \perp$  平面  $ABC$ ,

所以  $CF \perp$  平面  $ABC$ , 而  $AC \subset$  平面  $ABC$ ,

所以  $CF \perp AC$ .

在圆  $M$  中,  $AB$  为直径, 所以  $AC \perp BC$ , 而  $BC \cap CF = C$ ,

所以  $AC \perp$  平面  $FCBE$ , 又  $EF \subset$  平面  $FCBE$ ,

所以  $AC \perp EF$ .  $\dots\dots 6 \text{ 分}$



(II) 分别以  $CA$ ,  $CB$ ,  $CF$  所在直线为  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴建立空间直角坐标系  $C-xyz$ , 如图所示.

设  $CF = a$ , 依题意可得  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,\sqrt{3},0)$ ,

$F(0,0,a)$ ,  $E(0,\sqrt{3},7-a)$ ,

则  $\overrightarrow{AE} = (-1,\sqrt{3},7-a)$ ,  $\overrightarrow{AF} = (-1,0,a)$ ,

设平面  $AEF$  的一个法向量为  $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{m} = -x + \sqrt{3}y + (7-a)z = 0, \\ \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{m} = -x + az = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = az, \\ y = \frac{2a-7}{\sqrt{3}}z. \end{cases}$$

取  $z = \sqrt{3}$ , 得  $\mathbf{m} = (\sqrt{3}a, 2a-7, \sqrt{3})$ .

又平面  $ABC$  的一个法向量  $\mathbf{n} = (0,0,1)$ ,

$$\text{所以} |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{m}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + (2a-7)^2 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7a^2 - 28a + 52}}.$$

因为  $7a^2 - 28a + 52 = 7(a-2)^2 + 24 \geq 24$ , 当且仅当  $a = 2$  时等号成立,

$$\text{所以} |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

即当且仅当  $CF = 2$  时, 平面  $AEF$  与平面  $ABC$  所成的锐角最小. ....13 分

19. (本小题满分 13 分)

(I) 两条渐近线的方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ .

依题意  $a = 2$ , 所以  $b = 1$ ,

$$\text{双曲线方程为} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

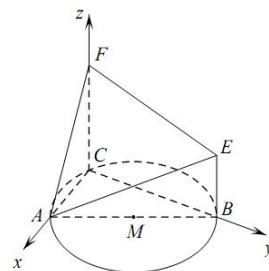
(II)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$  为定值 0, 理由如下:

当直线  $l$  的斜率不存在时,  $l$  的方程为  $x = -\frac{6}{5}$ ,

求得  $M(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$ ,  $N(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$ ,

$$\text{此时} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \cdot (\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}) = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

当直线  $l$  斜率存在时,  $l$  的方程可设为  $y = k(x + \frac{6}{5})$ .





$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = k(x + \frac{6}{5}), \end{cases}$$

$$\text{得 } (100k^2 + 25)x^2 + 240k^2x + 144k^2 - 100 = 0.$$

显然  $\Delta > 0$ .

记  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{240k^2}{100k^2 + 25}, \quad x_1x_2 = \frac{144k^2 - 100}{100k^2 + 25}, \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$y_1y_2 = k^2(x_1 + \frac{6}{5})(x_2 + \frac{6}{5}) = k^2(x_1x_2 + \frac{6}{5}(x_1 + x_2) + \frac{36}{25}) = -\frac{64k^2}{100k^2 + 25},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (x_1 + 2, y_1) \cdot (x_2 + 2, y_2) \\ &= (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1y_2 \\ &= \frac{144k^2 - 100}{100k^2 + 25} + 2(-\frac{240k^2}{100k^2 + 25}) + 4 + \frac{-64k^2}{100k^2 + 25} = 0. \end{aligned}$$

综上所述,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$  为定值 0. \dots\dots 10 分

(III) 双曲线  $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的左顶点为  $A$ , 经过点  $B(-\frac{10}{3}, 0)$  的直线  $l$  与双

曲线  $C$  交于  $M$ ,  $N$  两点, 则  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$  为定值 0. \dots\dots 13 分

说明: (1) 必须指出  $B$  点坐标, 但可以说具体定值.

(2) 对双曲线而言, 与右顶点相关的点为  $(\frac{10}{3}, 0)$ .

(3) 抛物线也有类似结论: 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的顶点为  $O$ , 经过点  $B(2p, 0)$  的直线  $l$  与抛物线交于  $M$ ,  $N$  两点, 则  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  为定值 0.

20. (本小题满分 14 分)

(I) 当  $Q$  是  $OB$  中点时,  $OQ = \frac{1}{2}$ ,  $\angle PQO = \frac{1}{3}\pi$ ,  $OP = 1$ .

在  $\triangle OPQ$  中, 由余弦定理得  $OP^2 = QO^2 + PQ^2 - 2QO \cdot PQ \cdot \cos \frac{\pi}{3}$ ,

$$\text{解得 } PQ = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 在  $\triangle OPQ$  中, 由正弦定理得  $\frac{PQ}{\sin(\frac{2\pi}{3} - x)} = \frac{OP}{\sin \frac{\pi}{3}}$ ,

$$\text{所以 } PQ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right), \quad x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PO \cdot \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{所以当 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{此时 } x = \frac{\pi}{3}.$$

……9 分

(III) 设观光道路长为  $f(x)$ ,

$$\text{在 } \triangle OPQ \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{OQ}{\sin x} = \frac{OP}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$\text{所以 } OQ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f(x) = x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin x\right),$$

$$\text{即 } f(x) = x + \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x + 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f'(x) = 1 - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \quad \text{得 } 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right),$$

$$\text{即 } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{解得 } x = \frac{1}{6}\pi,$$

当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

所以当  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)$  取得最大值, 且最大值  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ .

故设计  $\angle POA = \frac{\pi}{6}$  时, 才能使得观光道路最长. ....14 分

21. (1) (本小题满分 7 分) 选修 4-2: 矩阵与变换

(I)  $\Gamma_1$  的坐标变换公式为  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = y. \end{cases}$

所以  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(II) 依次经过  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  变换所对应的矩阵为

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

坐标变换公式为  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2y, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} x = x' - y', \\ y = \frac{1}{2} y', \end{cases}$

代入曲线  $C$  得  $x'^2 - 2x'y' = 1$ , 即  $x^2 - 2xy = 1$ . ....7 分

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

(I) 曲线  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ,

即  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ .

(II) 直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $M(2,0)$ ,

曲线  $C$  是圆心为  $C(0,1)$ , 半径  $r=1$  的圆,

$$|MC| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

所以  $|MN|$  的最小值为  $|MC| - r = \sqrt{5} - 1$ . ....7 分

(3) (本小题满分 7 分) 选修 4-5: 不等式选讲

(I)  $f(x) - (2x-6) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0$  成立,

所以对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) > 2x-6$  恒成立.

(II) 不等式等价于  $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 - 2x \leq -(x-1) - (x-2), \end{cases}$

或  $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x^2 - 2x \leq (x-1) - (x-2), \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 2x \leq (x-1) + (x-2), \end{cases}$

解得  $-\sqrt{3} \leq x \leq 1$ , 或  $1 < x < 2$ , 或  $2 \leq x \leq 3$ ,

综上不等式的解集为  $\{x | -\sqrt{3} \leq x \leq 3\}$ . ....7 分