福建省福建师大附中2013届5月高考三轮模拟试卷
数学文科试题

参考公式：

锥体体积公式$V=\dfrac{1}{3}Sh$，其中S为底面面积，h为高

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知函数$f(x)=\sqrt{1-x}$定义域为M，$g(x)=\ln x$定义域为N，则$M\bigcap N=$（****）

A. $\{x\mid x\le 1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\le 1\}$　　C. $\{x\mid 0<x<1\}$　　D. $\{x\mid 0\le x\le 1\}$

2. 若$a>b>0$，则下列不等式成立的是（****）

A. $a+b<2\sqrt{ab}$　B. $\sqrt{a}<\sqrt{b}$　　C. $\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}b$　　D. $0.2^a>0.2^b$

3. 若函数$y=f(x)$是函数$y=2^x$的反函数，则$f(2)$的值是（****）

A. 4　　B. 2　　C.　　D. 0

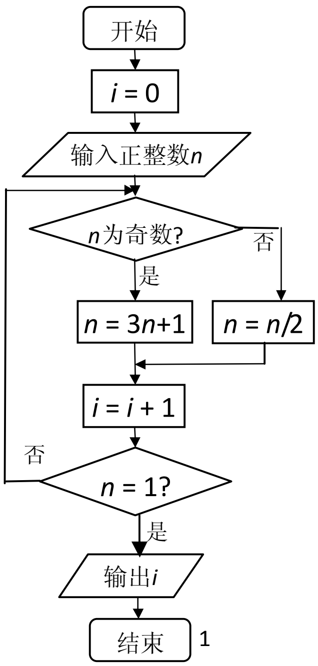
4. 设a,β分别为两个不同的平面，直线l$\subset$a，则“l⊥β”是“a⊥β成立的（****）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5. 要得到函数$y=\cos(2x+1)$的图象,只要将函数$y=\cos 2x$的图象（****）

A．向左平移1个单位　　B．向右平移1个单位

C．向左平移$\dfrac{1}{2}$个单位　　D．向右平移$\dfrac{1}{2}$个单位



6. 已知变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\ge 0,\\ x-y\ge 0,\\ 0\le x\le 3,\end{cases}$则z=x+y的最大值为（****）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

7. 已知函数$f(x)=\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则$f(x)$是（****）

A．非奇非偶函数，且在(0，＋∞)上单调递增

B．奇函数，且在$\mathbf{R}$上单调递增

C．非奇非偶函数，且在(0，＋∞)上单调递减

D．偶函数，且在$\mathbf{R}$上单调递减

8. 在右侧程序框图中，输入$n=5$，按程序运行后输出的结果是（****）

A．3　　B．4　　C．5　　D.6

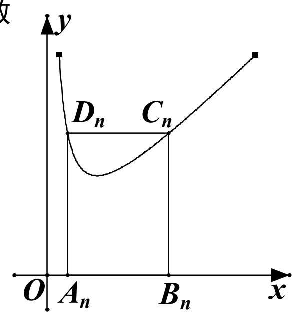
9. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 无交点，则离心率 e 的取值范围（****）

A. $(1,2)$　　B. $(1,2]$　　C. $(1,\sqrt{5})$　　D. $(1,\sqrt{5}]$

10. 若 P 为 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$，在 ΔABC 内随机撒一颗豆子，则此豆子落在 ΔPBC 内的概率为（****）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

11. 如图，矩形 $A_nB_nC_nD_n$ 的一边 A_nB_n 在 x 轴上，另外两个顶点 C_n,D_n 在函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象上. 若点 B_n 的坐标为 $(n,0)(n\ge 2,n\in\mathbf{N}_+)$，记矩形 $A_nB_nC_nD_n$ 的周长为 a_n，则 $a_2+a_3+\cdots+a_{10}=$ （****）



A. 208　　B. 216　　C. 212　　D. 220

12. 已知 $[x)$ 表示大于 x 的最小整数，例如 $[3)=4,[-1.2)=-1$．下列命题

①函数 $f(x)=[x)-x$ 的值域是 $(0,1]$；②若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{[a_n)\}$ 也是等差数列；

③若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{[a_n)\}$ 也是等比数列；④若 $x\in(1,4)$，则方程 $[x)-x=\frac{1}{2}$ 有 3 个根.

正确的是（****）A. ②④　　B. ③④　　C. ①③　　D. ①④

第Ⅱ卷（非选择题　　共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填写在答题卡的相应位置.

13. 已知复数 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=4-3\mathrm{i}$ 在复平面内的对应点分别为点 A、B，则线段 AB 的中点所对应的复数是 ****

14. 某班共有 52 人，现根据学生的学号，用系统抽样的方法，抽取一个容量为 4 的样本，已知 3 号、29 号、42 号同学在样本中，那么样本中还有一个同学的学号是****

15. 已知平面上的线段及点 P，在上任取一点 Q，线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段的距离，记作 $d(P,l)$．设是长为 2 的线段，点集 $D=\{P\mid d(P,l)\le 1\}$ 所表示图形的面积为****

16. 设 a,b,m 为正整数，若 a 和 b 除以 m 的余数相同，则称 a 和 b 对 m 同余. 记 $a\equiv b(mod\ m)$，已知 $a=2+2\times 3+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^{2013}$，$b\equiv a(mod\ 3)$，则 b 的值可以是****　（写出以下所有满足条件的序号）①1007；②2013；③3003；④6002

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．把解答过程填写在答题卡的相应位置．

17.（**本小题满分 12 分**）

已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（2）已知 ΔABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=2,b=\sqrt{2}$，且 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)=1,$ 求 ΔABC 的面积.

18. （**本小题满分 12 分**）

已知点（1,2）是函数 $f(x)=a^x(a>0且a\neq 1)$ 的图象上一点，数列 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和 $S_n=f(n)-1$.

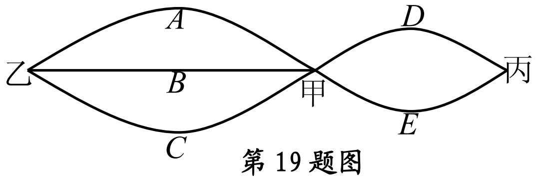
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）将数列 $\{a_n\}$ 前 30 项中的第 3 项，第 6 项，…，第 3*k* 项删去，求数列 $\{a_n\}$ 前 30 项中剩余项的和.

19.（**本小题满分 12 分**）

市民李生居住在甲地,工作在乙地,他的小孩就读的小学在丙地,三地之间的道路情况如图所示.假设工作日不走其它道路,只在图示的道路中往返,每次在路口选择道路是随机的.同一条道路去程与回程是否堵车互不影响.假设李生早上需要先开车送小孩去丙地小学，再返回经甲地赶去乙地上班，

（1）写出李生可能走的所有路线;（比如 *DDA* 表示走 *D* 路从甲到丙，再走 *D* 路回到甲，然后走 *A* 路到达乙）;



第 19 题图

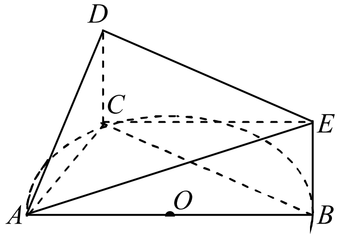
（2）假设从丙地到甲地时若选择走道路 *D* 会遇到拥堵，并且从甲地到乙地时若选择走道路 B 也会遇到拥堵，其它方向均通畅，但李生不知道相关信息，那么从出发到回到上班地没有遇到过拥堵的概率是多少？

20．（本小题满分 14 分）

如图，AB 是半圆 O 的直径，C 是半圆 O 上除 A、B 外的一个动点，$DC\perp$ 平面 ABC，$DC//BE$，$CD=BE$，$AB=4$，$\tan\angle EAB=\frac{1}{4}$．

⑴证明：平面 $ADE\perp$ 平面 ACD；

⑵试探究当 C 在什么位置时三棱锥 $C-ADE$ 的体积取得最大值，请说明理由并求出这个最大值.

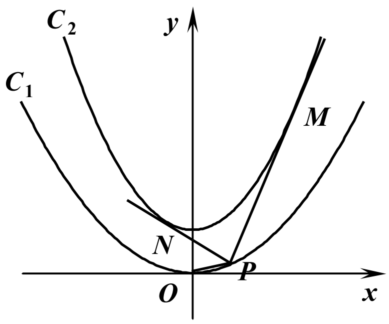


21．（本小题满分 12 分）

如图，已知抛物线 $C_1: x^2=2py$ 的焦点在抛物线 $C_2: y=\frac{1}{2}x^2+1$ 上.

（1）求抛物线 C_1 的方程及其准线方程；

（2）过抛物线 C_1 上的动点 P 作抛物线 C_2 的两条切线 PM、PN，切点为 M、N．若 PM、PN 的斜率乘积为 m，且 $m\in[2,4]$，求 $|OP|$ 的取值范围.



（第 21 题）

22．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\ln x, g(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx-1$，

（1）当 $a=0$ 且 $b=1$ 时，证明：对 $\forall x>0$，$f(x)\le g(x)$；

（2）若 $b=2$，且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间，求 a 的取值范围；

（3）数列 $\{a_n\}$，若存在常数 $M>0$，$\forall n\in N^*$，都有 $a_n<M$，则称数列 $\{a_n\}$ 有上界。已知 $b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，试判断数列 $\{b_n\}$ 是否有上界.

福建省福建师大附中2013届5月高考三轮模拟试卷
数学文科试题参考答案

1-5 BCCAC 6-10 DACBA 11-12 BD　13．$3-i$　14．16　15．$4+\pi$　16．①④

17．解：（1）$f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x=1+\cos 2x-\sin 2x\ =\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})+1$

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，值域为$\left[-\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1\right]$

（备注：当$x\in\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$时，求函数$f(x)$的单调区间和值域？$\because -\frac{3\pi}{8}\le x\le\frac{\pi}{4}$，

$\therefore -\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，令$-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 0$，则$-\frac{3\pi}{8}\le x\le -\frac{\pi}{8}$

$\therefore$函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right]$，单调减区间为$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$

$\because -\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，$\therefore 0\le f\left(x\right)\le\sqrt{2}+1$

$\therefore$函数$f(x)$的值域为$\left[0,\sqrt{2}+1\right]$）

$(2)\because f\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{2}\cos(A+\frac{\pi}{4})+1=1$　，　$\therefore\cos(A+\frac{\pi}{4})=0$　，　$\because 0<A<\pi$　，

$\therefore\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}\ \therefore A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\therefore A=\frac{\pi}{4}$,

$\because a=2,b=\sqrt{2}$,由正弦定理得$\therefore\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B},\therefore\sin B=\frac{1}{2}\because a>b,\therefore A>B$

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$

$\therefore C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

18．解：（Ⅰ）把点（1,2）代入函数$f(x)=a^x$，得$a=2$.$\therefore S_n=f(n)-1=2^n-1,$ 当$n=1$时，$a_1=S_1=2^1-1=1;$当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}\ =(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$ 经验证可知$n=1$时，

也适合上式， $\therefore a_n=2^{n-1}$.

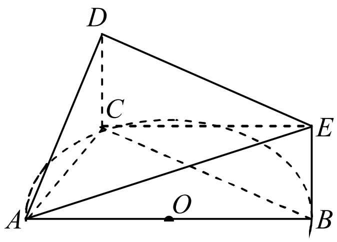
（Ⅱ）由（Ⅰ）知数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 2，故其第 3 项，第 6 项，…，第 30 项也为等比数列，首项 $a_3=2^{3-1}=4$, 公比 $2^3=8$, a_{30} 为其第 10 项

∴此数列的和为 $\dfrac{4(1-8^{10})}{1-8}=\dfrac{4(2^{30}-1)}{7}$ 又数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项和为

$S_{30}=\dfrac{1\times(1-2^{30})}{1-2}=2^{30}-1$, ∴所求剩余项的和为$(2^{30}-1)-\dfrac{4(2^{30}-1)}{7}=\dfrac{3(2^{30}-1)}{7}$

19. ⑴李生可能走的所有路线分别是：DDA，DDB，DDC，DEA，DEB，DEC，EEA，EEB， EEC，EDA，EDB，EDC 共 12 种情况。⑵从出发到回到上班地没有遇到过拥堵的走法有：DEA，DEC，EEA，EEC 共 4 种情况,所以从出发到回到上班地没有遇到过拥堵的概率 $P=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.

20. 证明与求解：⑴因为 AB 是直径，所以 $BC\perp AC$，因为 $CD\perp$平面 ABC， $CD\perp BC$，因为 $CD\bigcap AC=C$，所以 $BC\perp$平面 ACD



因为 $CD\,//\,BE$，又因为 $CD=BE$，所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形，所以 $BC\,//\,DE$，所以 $DE\perp$平面，因为 $DE\subset$平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$平面 ACD

⑵依题意， $EB=AB\times\tan\angle EAB=4\times\dfrac{1}{4}=1$，

由⑴知 $V_{C-ADE}=V_{E-ACD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\Delta ACD}\times DE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AC\times CD\times DE$，

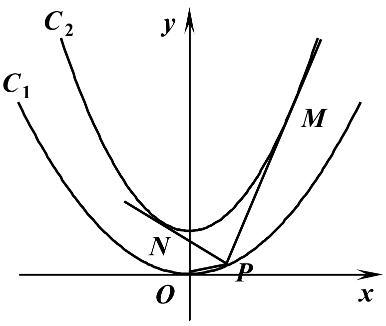
$=\dfrac{1}{6}\times AC\times BC$ ， $\le\dfrac{1}{12}\times(AC^2+BC^2)=\dfrac{1}{12}\times AB^2=\dfrac{4}{3}$ ，等号当且仅当 $AC=BC=2\sqrt{2}$ 时成立，所以当 C 为半圆弧中点时**三棱锥 $C-ADE$ 的体积取得最大值，最大值为 $\dfrac{4}{3}$**

（备注：此时，$AD=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$，$S_{\Delta ADE}=\dfrac{1}{2}\times AD\times DE=3\sqrt{2}$，设三棱锥 $C-ADE$ 的高为 h，则 $V_{C-ADE}=\dfrac{1}{3}\times S_{\Delta ADE}\times h=\dfrac{4}{3}$， $h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ）.

21．解：（1）C_1的焦点为$F(0,\frac{p}{2})$，

所以$\frac{p}{2}=0+1$，$p=2$．

故C_1的方程为$x^2=4y$，其准线方程为$y=-1$．



（第 22 题）

（2）任取点$P(2t,t^2)$，设过点 P 的C_2的切线方程为$y-t^2=k(x-2t)$．

由$\begin{cases} y-t^2=k(x-2t) \\ y=\frac{1}{2}x^2+1 \end{cases}$，得$x^2-2kx+4tk-2t^2+2=0$．

由$\Delta=(2k)^2-4(4tk-2t^2+2)=0$，化简得$k^2-4tk+2t^2-2=0$，

记PM,PN斜率分别为k_1,k_2，则$m=k_1k_2=2t^2-2$，

因为$m\in[2,4]$，所以$t^2\in[2,3]$

所以$|OP|^2=4t^2+t^4=(t^2+2)^2-4\in[12,21]$，

所以$|OP|\in[2\sqrt{3},\sqrt{21}]$．

22．解：⑴当$a=0$且$b=1$时，设$g(x)=f(x)-g(x)=\ln x-(x-1)=\ln x-x+1$，$\forall x>0$，$g^{/}(x)=\frac{1}{x}-1$……1 分，解$g^{/}(x)=0$得$x=1$。

当$0<x<1$时，$g^{/}(x)=\frac{1}{x}-1>0$，$g(x)$单调递增；当$x>1$时，$g^{/}(x)=\frac{1}{x}-1<0$，$g(x)$单调递减，所以$g(x)$在$x=1$处取最大值，即$\forall x>0$，$g(x)\le g(1)=\ln 1-1+1=0$，$\ln x\le x-1$即$f(x)\le g(x)$

（2）若$b=2$，$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x+1$

所以$h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2=-\frac{ax^2+2x-1}{x}$

因为函数$h(x)$存在单调递减区间，所以$h'(x)<0$在$(0,+\infty)$上有解

所以$ax^2+2x-1>0$在$(0,+\infty)$上有解

所以$a>\frac{1-2x}{x^2}$在$(0,+\infty)$上有解，即$\exists x\in(0,+\infty)$使得$a>\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x}$

令$t=\frac{1}{x},x>0$，则$t>0$，研究$y=t^2-2t,t>0$，当$t=1$时，$y_{\min}=-1$

所以$a>-1$

（3）数列$\{b_n\}$无上界

$\forall n\in N^*$，设$x-1=\frac{1}{n}$，$x=1+\frac{1}{n}$，由(1)得$\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n}\ge\ln\frac{n+1}{n}$，所以$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ge\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$，$\forall M>0$，取$n$为任意一个不小于$e^M$的自然数，则$b_n=\ln(n+1)>\ln e^M=M$，数列$\{b_n\}$无上界。