

福建省福建师大附中 2013 届 5 月高考三轮模拟试卷

数学理科试题

注意事项:

1. 本科考试分试题卷和答题卷, 考生须在答题卷上作答, 答题前, 请在答题卷的密封线内填写学校、班级、准考证号、姓名;

2. 本试卷分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

参考公式:

样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本平均数

柱体体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 为底面面积, h 为高

锥体体积公式:

$$V = \frac{1}{3}Sh, \text{ 其中 } S \text{ 为底面面积, } h \text{ 为高}$$

球的表面积、体积公式

$$S = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 为球的半径

第 I 卷 (选择题 共 50 分)

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题给出的四个选项中有且只有一项是符合题目要求的, 把答案填在答题卡的相应位置.)

1. 复数 $z = \frac{1+i}{i}$ (是虚数单位) 在复平面内对应的点是位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 设 $a \in R$, 则“ $a = 4$ ”是“直线 $l_1: ax + 2y - 3 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + y - a = 0$ 平行”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知集合 $M = \{x | \log_2(x-1) < 2\}$, $N = \{x | a < x < 6\}$, 且 $M \cap N = (2, b)$, 则 $a+b =$ ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 设 $z=x+y$, 其中 x, y 满足 $\begin{cases} x+2y \geq 0, \\ x-y \geq 0, \\ 0 \leq x \leq k, \end{cases}$ 当 z 的最大值为 6 时, k 的值为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5. 阅读如下图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 $m=72, n=30$, 则输出 n 的值为 ()

A. 12 B. 6 C. 3 D. 0

6. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 对应的边分别 a, b, c ,

且 $a \cos C, b \cos B, c \cos A$ 成等差数列, 则角 B 等于

()

A. 30° B. 60°
C. 90° D. 120°

7. 设 $a = \int_0^\pi (\cos x - \sin x) dx$, 则二项式 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^6$

展开式中的 x^3 项的系数为 ()

A. -20 B. 20
C. -160 D. 160

8. 如下图所示, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内 (含

正方体表面) 任取一点 M , 则 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AM} \geq 1$ 的概率 $p =$ ()

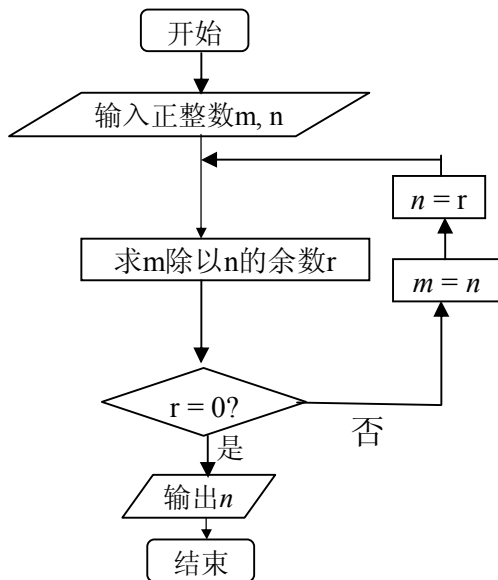
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

9. 已知平面上的线段及点 P , 在上任取一点 Q , 线段 PQ 长度的

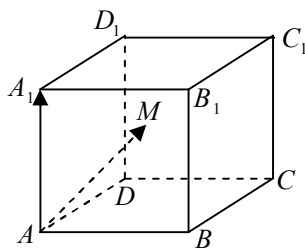
最小值称为点 P 到线段的距离, 记作 $d(P, l)$. 设是长为 2 的线段,

点集 $D = \{P \mid d(P, l) \leq 1\}$ 所表示图形的面积为 ()

A. π B. 2π C. $2+\pi$ D. $4+\pi$



第 5 题图



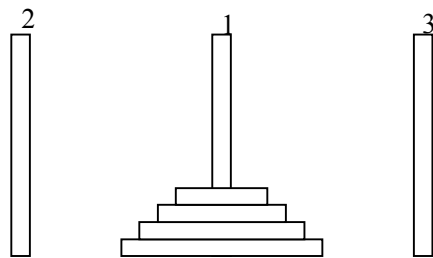
第 8 题图

10. 如下图所示, 有三根针和套在一根针上的 n 个金属片, 按下列规则, 把金属片从一根针上全部移到另一根针上.

- (1) 每次只能移动一个金属片;
- (2) 在每次移动过程中, 每根针上较大的金属片不能放在较小的金属片上面.

若将 n 个金属片从 1 号针移到 3 号针最少需要移动的次數记为 $f(n)$, 则 $f(5) = (\quad)$

- A. 33 B. 31 C. 17 D. 15



第 10 题图

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

11. 在样本频率分布直方图中, 共有 11 个小长方形, 若中间一个小长方形的面积等于其它 10 个长方形的面积和的 $\frac{1}{4}$, 且样本容量为 160, 则中间一组的频数为 _____

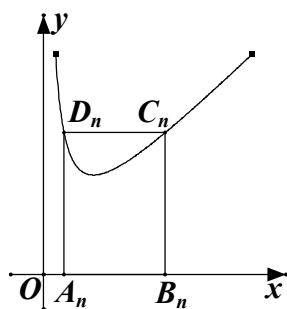
12. 在平面直角坐标系 Oxy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m^2 + 4} = 1$ 的焦距为 8, 则 $m =$ _____

13. 如图, 矩形 $A_n B_n C_n D_n$ 的一边 $A_n B_n$ 在 x 轴上, 另外两个顶点 C_n, D_n 在函数

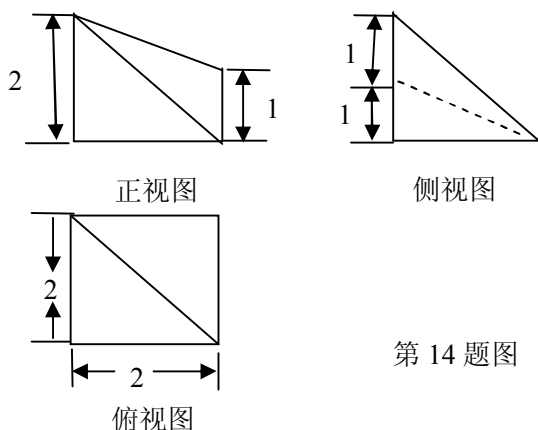
$f(x) = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象上. 若点 B_n 的坐标为 $(n, 0) (n \geq 2, \text{ 且 } n \in N^*)$, 记矩形

$A_n B_n C_n D_n$ 的周长为 a_n , 则 $a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} =$ _____

14. 已知某几何体的三视图如右图所示, 则该几何体的体积为 _____



第 13 题图



第 14 题图

15. 我国齐梁时代的数学家祖暅 (公元 5-6 世纪) 提出了一条原理: “幂势既同, 则积不容异.” 这句话的意思是: 夹在两个平行平面间的两个几何体, 被平行于这两个平行平面的任何平面所截, 如果截得的两个截面的面积总是相等, 那么这两个几何体的体积相等.

设：由曲线 $x^2 = 4y$ 和直线 $x = 4$ ， $y = 0$ 所围成的平面图形，绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体为 Γ_1 ；由同时满足 $x \geq 0$ ， $x^2 + y^2 \leq 16$ ， $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$ ， $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$ 的点 (x, y) 构成的平面图形，绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体为 Γ_2 。根据祖暅原理等知识，通过考察 Γ_2 可以得到 Γ_1 的体积为_____

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答写在答题卡相应位置，应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 13 分)

已知 O 为坐标原点，对于函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ，称向量 $\overrightarrow{OM} = (a, b)$ 为函数 $f(x)$ 的伴随向量，同时称函数 $f(x)$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的伴随函数。

(I) 设函数 $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ，试求 $g(x)$ 的伴随向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模；

(II) 记 $\overrightarrow{ON} = (1, \sqrt{3})$ 的伴随函数为 $h(x)$ ，求使得关于 x 的方程 $h(x) - t = 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内恒有两个不相等实数解的实数 t 的取值范围。

17. (本小题满分 13 分)

某超市在节日期间进行有奖促销，凡在该超市购物满 300 元的顾客，将获得一次摸奖机会，规则如下：

奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球，1 个黄球，1 个白球和 1 个黑球。顾客不放回的每次摸出 1 个球，若摸到黑球则停止摸奖，否则就要将奖盒中的球全部摸出才停止。规定摸到红球奖励 10 元，摸到白球或黄球奖励 5 元，摸到黑球不奖励。

(I) 求 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率；

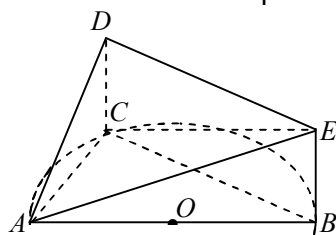
(II) 记 X 为 1 名顾客摸奖获得的奖金数额，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

18. (本小题满分 13 分)

如图, AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆 O 上除 A 、 B 外的一个动点, DC 垂直于半圆 O 所在的平面, $DC \parallel EB$, $DC = EB$, $AB = 4$, $\tan \angle EAB = \frac{1}{4}$.

(1) 证明: 平面 $ADE \perp$ 平面 ACD ;

(2) 当三棱锥 $C-ADE$ 体积最大时, 求二面角 $D-AE-B$ 的余弦值.



19. (本小题满分 13 分)

已知圆 $O: x^2 + y^2 = 34$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(I) 若点 P 在圆 O 上, 线段 OP 的垂直平分线经过椭圆的右焦点, 求点 P 的横坐标;

(II) 现有如下真命题:

“过圆 $x^2 + y^2 = 5^2 + 3^2$ 上任意一点 $Q(m, n)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 的两条切线, 则

这两条切线互相垂直”;

“过圆 $x^2 + y^2 = 4^2 + 7^2$ 上任意一点 $Q(m, n)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$ 的两条切线, 则

这两条切线互相垂直”.

据此, 写出一一般结论, 并加以证明.

20. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = -x^3 + x^2 + bx$, $g(x) = a \ln x + x$ ($a \neq 0$)

(1) 若函数 $f(x)$ 存在极值点, 求实数 b 的取值范围;

(2) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $b = 0$ 且 $a > 0$ 时, 令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x < 1 \\ g(x) - x, & x \geq 1 \end{cases}$, $P(x_1, F(x_1))$, $Q(x_2, F(x_2))$

为曲线 $y = F(x)$ 上的两动点, O 为坐标原点, 能否使得 $\triangle POQ$ 是以 O 为直角顶点的直角三角形, 且斜边中点在 y 轴上? 请说明理由.

21. 本题有(1)、(2)、(3)三个选答题,每题7分,请考生任选2题做答,满分14分.如果多做,则按所做的前两题记分.

(1) (本小题满分7分)选修4-2: 矩阵与变换

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 有一个属于特征值1的特征向量 $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 若矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求直线 $x + y + 1 = 0$ 先在矩阵 A , 再在矩阵 B 的对应变换作用下的像的方程.

(2) (本小题满分7分) 选修4-4: 坐标系与参数方程.

已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 2\sin\theta$, 直线的参数方程是 $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}t + 2, \\ y = \frac{4}{5}t \end{cases}$ (为参数).

(I) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(II) 设直线与 x 轴的交点是 M , N 是曲线 C 上一动点, 求 $|MN|$ 的最大值.

(3) (本小题满分7分) 选修4-5: 不等式选讲

(I) 试证明柯西不等式: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ ($m, n, a, b \in R$)

(II) 已知 $x^2 + y^2 = 2$, 且 $|x| \neq |y|$, 求 $\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$ 的最小值.

福建省福建师大附中 2013 届 5 月高考三轮模拟试卷 数学理科试题参考答案

1-5 DCDAB 6-10 BCADB 11、32 12、3 13、216 14. $\frac{10}{3}$ 15. 32π

16. 解: (I) $\because g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin x + \cos x$, 2分

$\therefore \overline{OM} = (2, 1)$ 4分

故 $|\overline{OM}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 5分

(II) 由已知可得 $h(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,7分

$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$,

故 $h(x) \in [1, 2]$ 9分

∴当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $h(x)$ 单调递增, 且 $h(x) \in [\sqrt{3}, 2]$;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 函数 $h(x)$ 单调递减, 且 $h(x) \in [1, 2)$.

∴使得关于 x 的方程 $h(x) - t = 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内恒有两个不相等实数解的实数的取值范围为 $t \in [\sqrt{3}, 2)$. ∴ 13 分

17. (I) 解: 设“1 名顾客摸球 3 次停止摸奖”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{A_3^2}{A_4^3} = \frac{1}{4},$$

故 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率为 $\frac{1}{4}$4 分

(II) 解: 随机变量 X 的所有取值为 0, 5, 10, 15, 20.5 分

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{1}{4}, & P(X=5) &= \frac{A_2^2}{A_4^2} = \frac{1}{6}, \\ P(X=10) &= \frac{1}{A_4^2} + \frac{A_2^2}{A_4^3} = \frac{1}{6}, & P(X=15) &= \frac{C_2^1 \cdot A_2^2}{A_4^3} = \frac{1}{6}, \\ P(X=20) &= \frac{A_3^3}{A_4^4} = \frac{1}{4}. & & \text{.....10 分} \end{aligned}$$

所以, 随机变量 X 的分布列为:

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

.....11 分

$$EX = 0 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 15 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{4} = 10. \quad \text{.....13 分}$$

18. (I) 证明: 因为 AB 是直径, 所以 $BC \perp AC$ 1 分,

因为 $CD \perp$ 平面 ABC , 所以 $CD \perp BC$ 2 分,

因为 $CD \cap AC = C$, 所以 $BC \perp$ 平面 ACD 3 分

因为 $CD \parallel BE$, $CD = BE$, 所以 $BCDE$ 是平行四边形, $BC \parallel DE$, 所以 $DE \perp$ 平面 ACD 4 分,

因为 $DE \subset$ 平面 ADE , 所以平面 $ADE \perp$ 平面 ACD 5 分

(II) 依题意, $EB = AB \times \tan \angle EAB = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ 6 分,

$$\begin{aligned} \text{由 (I) 知 } V_{C-ADE} &= V_{E-ACD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ACD} \times DE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AC \times CD \times DE \\ &= \frac{1}{6} \times AC \times BC \leq \frac{1}{12} \times (AC^2 + BC^2) = \frac{1}{12} \times AB^2 = \frac{4}{3}, \text{ 当且仅当} \end{aligned}$$

$AC = BC = 2\sqrt{2}$ 时等号成立8 分

如图所示, 建立空间直角坐标系, 则 $D(0,0,1)$, $E(0,2\sqrt{2},1)$,
 $A(2\sqrt{2},0,0)$ $B(0,2\sqrt{2},0)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (0,0,1)$,
 $\overrightarrow{DE} = (0,2\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{DA} = (2\sqrt{2},0,-1)$ 9 分

$$\text{设面 } DAE \text{ 的法向量为 } \vec{n}_1 = (x, y, z), \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}y = 0 \\ 2\sqrt{2}x - z = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \vec{n}_1 = (1, 0, 2\sqrt{2}) \quad ,$$

.....10 分

设面 ABE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \quad ,$$

即

$$\begin{cases} z = 0 \\ -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \quad \therefore$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 0) \quad ,$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{.....12 分}$$

可以判断 $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$ 与二面角 $D-AE-B$ 的平面角互补 $\therefore$ 二面角 $D-AE-B$ 的余弦值

$$\text{为 } -\frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{.....13 分}$$

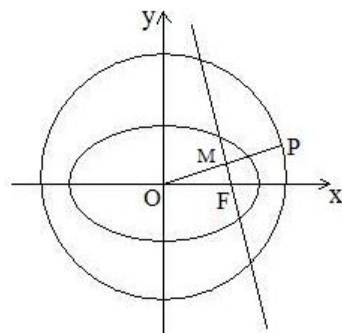
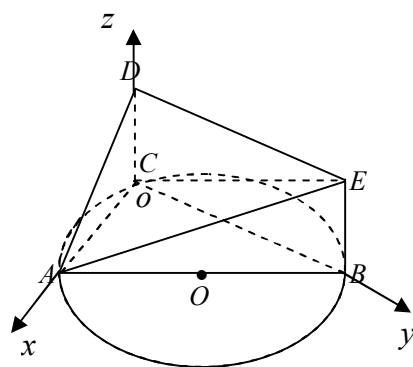
19. 解法一:

(I) 设点 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + y_0^2 = 34$, (1)1 分

设线段 OP 的垂直平分线与 OP 相交于点 M , 则

$$M\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \text{2 分}$$

椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点 $F(4, 0)$,3 分



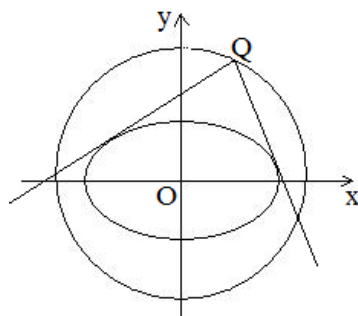
$$\because MF \perp OP, \therefore k_{OP} \cdot k_{MF} = -1, \therefore \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{\frac{y_0}{2} - 0}{\frac{x_0}{2} - 4} = -1,$$

$$\therefore y_0^2 + x_0^2 - 8x_0 = 0, \quad (2) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1), (2), 解得 } x_0 = \frac{17}{4}, \therefore \text{点 } P \text{ 的横坐标为 } \frac{17}{4}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 一般结论为:

“过圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上任意一点 $Q(m, n)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条切线, 则这两条切线互相垂直.” $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$
证明如下:



(i) 当过点 Q 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的一条切线的斜率不存在时, 此时切线方程为 $x = \pm a$,

$\therefore$ 点 Q 在圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上, $\therefore Q(\pm a, \pm b)$,

$\therefore$ 直线 $y = \pm b$ 恰好为过点 Q 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的另一条切线

$\therefore$ 两切线互相垂直. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(ii) 当过点 $Q(m, n)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的切线的斜率存在时,

可设切线方程为 $y - n = k(x - m)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y - n = k(x - m), \end{cases} \text{ 得 } b^2 x^2 + a^2 [k(x - m) + n]^2 - a^2 b^2 = 0,$$

$$\text{整理得 } (b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 k(n - km)x + a^2(n - km)^2 - a^2 b^2 = 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore$ 直线与椭圆相切,

$$\therefore \Delta = 4a^4 k^2 (n - km)^2 - 4(b^2 + a^2 k^2)[a^2(n - km)^2 - a^2 b^2] = 0,$$

$$\text{整理得 } (m^2 - a^2)k^2 - 2mnk + (n^2 - b^2) = 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore k_1 k_2 = \frac{n^2 - b^2}{m^2 - a^2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore$ 点 $Q(m, n)$ 在圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上, $\therefore m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, $\therefore m^2 - a^2 = b^2 - n^2$,
 $\therefore k_1 k_2 = -1$, $\therefore$ 两切线互相垂直,

综上所述, 命题成立. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

解法二:

$$(I) \text{ 设点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0^2 + y_0^2 = 34, \quad (1) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点 $F(4, 0)$,2 分

$\therefore$ 点 F 在线段 OP 的垂直平分线上, $\therefore |PF| = |OF|$,

$\therefore (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 0)^2 = 4^2$, $\therefore x_0^2 - 8x_0 + y_0^2 = 0$, (2)4 分

由 (1), (2), 解得 $x_0 = \frac{17}{4}$, $\therefore$ 点 P 的横坐标为 $\frac{17}{4}$5 分

(II) 同解法一.

20. 解: (I) $f'(x) = -3x^2 + 2x + b$, 若 $f(x)$ 存在极值点, 则 $f'(x) = -3x^2 + 2x + b = 0$ 有两个不相等实数根. 所以 $\Delta = 4 + 12b > 0$,2 分

解得 $b > -\frac{1}{3}$ 3 分

(II) $g'(x) = \frac{a}{x} + 1 = \frac{a+x}{x}$ 4 分

当 $a > 0$ 时, $-a < 0$, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;5 分

当 $a < 0$ 时, $-a > 0$, 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, -a)$, 单调递增区间为 $(-a, +\infty)$7 分

(III) 当 $b = 0$ 且 $a > 0$ 时, $F(x) = \begin{cases} -x^3 + x, & x < 1 \\ a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 假设使得 $\triangle POQ$ 是以 O 为直角顶点的

的直角三角形, 且斜边中点在 y 轴上. 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ 且 $x_1 + x_2 = 0$8 分

不妨设 $x_1 = t > 0$. 故 $P(t, F(t))$, 则 $Q(-t, t^3 + t^2)$. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -t^2 + F(t)(t^3 + t^2) = 0$,
(*) 该方程有解

.....9 分

当 $0 < t < 1$ 时, 则 $F(t) = -t^3 + t^2$, 代入方程 (*) 得 $-t^2 + (-t^3 + t^2)(t^3 + t^2) = 0$ 即 $t^4 - t^2 + 1 = 0$, 而此方程无实数解;10 分

当 $t = 1$ 时, $\overrightarrow{OP} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OQ} = (-1, 2)$ 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \neq 0$;11 分

当 $t > 1$ 时, 则 $F(t) = a \ln t$, 代入方程 (*) 得 $-t^2 + a \ln t(t^3 + t^2) = 0$ 即 $\frac{1}{a} = (t+1) \ln t$,12 分

设 $h(x) = (x+1) \ln x (x \geq 1)$, 则 $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 > 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. $\therefore h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $h(x) \geq h(1) = 0$, 则值域为 $[0, +\infty)$.

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, 方程 $\frac{1}{a} = (t+1) \ln t$ 有解, 即方程 (*) 有解.13 分

综上所述, 对任意给定的正实数 a , 曲线上总存在 P, Q 两点, 使得 $\triangle POQ$ 是以 O 为直角顶点的直角三角形, 且斜边中点在 y 轴上.14 分

21. (1) 【解析】(I) 由已知得 $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{cases} 2a - 2 = 2, \\ 2 - b = -1, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \end{cases}$ 故 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$3 分

(II) $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 因为矩阵 BA 所对应的线性变换将直线变成

直线 (或点), 所以可取直线 $x + y + 1 = 0$ 上的两点 $(0, 1)$, $(-1,$

$2)$,4 分

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 由得: $(0, 1)$, $(-1, 2)$ 在矩阵 A 所对

应的线性变换下的像是点 $(1, -3)$, $(-1, -1)$ 6 分

从而直线 $x + y + 1 = 0$ 在矩阵 BA 所对应的线性变换下的像的方程为

$x + y + 2 = 0$7 分

(2) 解: (I) 曲线 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2 = 2\rho \sin \theta$,

又 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 3 分

(II) 将直线 l 的参数方程化为直角坐标方程, 得 $y = -\frac{4}{3}(x - 2)$,4 分

令 $y = 0$, 得 $x = 2$, 即 M 点的坐标为 $(2, 0)$. 又曲线 C 为圆, 圆 C 的圆心坐标为 $(0, 1)$,

半径 $r = 1$, 则 $|MC| = \sqrt{5}$,6 分

所以 $|MN| \leq |MC| + r = \sqrt{5} + 1$. 即 $|MN|$ 的最大值为 $\sqrt{5} + 1$ 7 分

(3) (I) 证明: 左边 $= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$,

右边 $= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$,

左边 - 右边 $= a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2 \geq 0$,2 分

$\therefore$ 左边 $\geq$ 右边, 命题得证.3 分

(II) 令 $u = x + y$, $v = x - y$, 则 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$,

$\therefore x^2 + y^2 = 2$, $\therefore (u+v)^2 + (u-v)^2 = 8$,

$\therefore u^2 + v^2 = 4$,4 分

由柯西不等式得: $(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2})(u^2 + v^2) \geq 4$,5 分

当且仅当 $u = v = \sqrt{2}$, 即 $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$, 或 $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$ 时6 分

$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$ 的最小值是 17 分

解法 2: $\because x^2 + y^2 = 2, \therefore (x+y)^2 + (x-y)^2 = 4$,

$\therefore \left((x+y)^2 + (x-y)^2 \right) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \right) \geq 4$,4 分

$\therefore \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \geq 1$,5 分

当且仅当 $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$, 或 $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$ 时6 分

$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$ 的最小值是 1.7 分