第十节 回归独立正态

一、回归方程

1、为了解某社区住户的年收入和年饮食支出的关系，抽取了其中5户家庭的调查数据如下表

年收入 x(万元)	3	**4**	5	6	7
年饮食支出 y(万元)	1	**1.3**	1.5	2	2.2

(Ⅰ)根据表中数据用最小二乘法求得回归直线方程,

(Ⅱ)请预测年收入为9万元家庭的年饮食支出

(III)从5户家庭中任选2户，求恰有一户家庭饮食支出小于1.6万元的概率

解：(Ⅰ) $\overline{x}=5,\overline{y}=1.6$，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=3.1,\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=10,b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=0.31$

代入 $\hat{y}=bx+a$,得 $a=0.05$　故 $\hat{y}=0.31x+0.05$，

(Ⅱ)当 $x=9$ 时,解得 $\hat{y}=2.84$ 万元

所以年收入为9万元家庭的年饮食支出约为2.84万元

(Ⅱ) 年饮食支出小于1.6万元的家庭为a,b,c; 年饮食支出不小于1.6万元的家庭为M,N;

从5户家庭中任选2户，求恰有一户家庭饮食支出小于1.6万元为事件A

所有基本事件为 $\{a,b\},\{a,c\},\{a,M\},\{a,N\},\{b,c\},\{b,M\},\{b,N\},\{c,M\},\{c,N\},\{M,N\}$ 共10个

事件A包含的基本事件有 $\{a,M\},\{a,N\},\{b,M\},\{b,N\},\{c,M\},\{c,N\}$ 共6个

所以 $P(A)=\frac{6}{10}=0.6$

答: 从5户家庭中任选2户，求恰有一户家庭饮食支出小于1.6万元的概率为0.6

2、某同学在研究性学习中，收集到某制药厂今年前5个月甲胶囊生产产量(万盒)的数据如下表所示

月份 x	1	**2**	3	4	5
y(万盒)	4	**4**	5	6	6

(1) 该同学为了求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，根据表中数据已经正确计算出 $\hat{b}$=0.6，试求出 $\hat{a}$ 的值，并估计该厂6月份的甲胶囊产量数

(2)若某药店现有制药厂今年二月份生产的胶囊4盒和三月份生产的甲胶囊5盒，小红同学从中随机购买了3盒甲胶囊，后经了解发现该制药厂今年二月份生产的所有甲胶囊均存在质量问题。记小红同学所购买的3盒甲胶囊中存在质量问题的盒数为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望。

解：(1) $\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3,\overline{y}=\frac{1}{5}(4+4+5+6+6)=5$

因回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 过点 $(\overline{x},\overline{y})$，于是 $a=\overline{y}-b\overline{x}=5-0.6\times3=3.2$

于是 $\hat{y}=0.6x+3.2$，所以 $\hat{y}=0.6\times6+3.2=6.8$

(2) $\xi=0,1,2,3$，$P(\xi=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$，$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$E\xi=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$

二、独立检验

1、某学校为调查高三年级学生的身高情况，按随机抽样的方法抽取 80 名学生，得到男生身高情况的频率分布直方图 1 和女生身高情况的频率分布直方图 2,已知图 1 中身高在 170 到 175cm 的男生人数 16 人

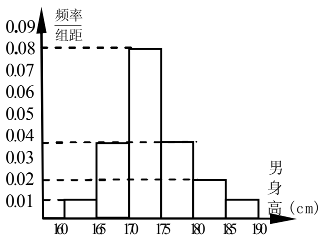


图1

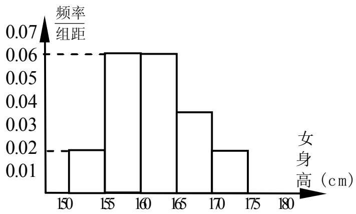


图2

（Ⅰ)试问在抽取学生中，男、女生各有多少人

(11)根据频率分布直方图，完成下列 2×2 列联表，并判断能有多大的把握认为身高与性别有关？

(III)在上述 80 名学生中，从身高在 170 到 175 之间的学生中按男女性别分层抽样的方法抽出 5 人，从这 5 人中选派 3 人当旗手，求 3 人中恰好有一名女生的概率。

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\geq k_0)$	0. 025	**0.010**	0. 005	0.001
k_0	5.024	**6.635**	7.879	10.828

解：(Ⅰ) 设男生总数 n，在 170 到 175cm，男生人数 16 人

频率$=0.08\times5=0.4$, $0.4n=16, n=40$ ，于是男、女生 40 人

	≥170cm	＜170cm	总计
男生身高	30	10	40
女生身高	4	36	40
总计	34	46	80

K^2 的观测值 $k_0=\dfrac{80\times(30\times36-4\times10)^2}{40\times40\times34\times46}=34.578>10.828$

有 99.9%的把握认为身高与性别有关系。

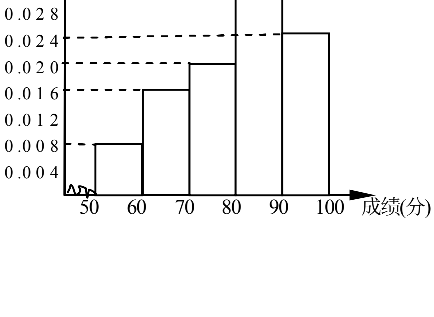
(III) 身高在 170 到 175 之间的学生中按男 16 人，女 4 人

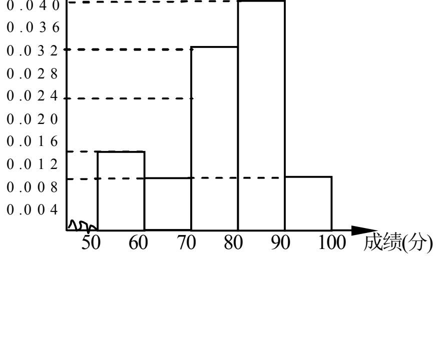
分层抽样的方法抽出 5 人，抽得男 4 人，女 1 人

从这 5 人中选派 3 人当旗手，则共有 10 种选法，其中选到女生的方法有 6 种

于是所求的概率＝0.6

2． 某中学将 100 名高一新生分成水平相同的甲乙两个平行班，每班 50 人，陈老师采用 A、B 两种不同的教学方式分别在甲乙两个班级进行教改实验。为了解教学效果，期末考试后，陈老师对甲乙两个班级的学生成绩进行统计分析，画出频率分布直方图如图。记成绩不低于 90 分者为成绩优秀





(Ⅰ)从乙班随机抽取 2 名学生的成绩，记成绩优秀的个数为ξ，求ξ的分布列和数学期望

(Ⅱ)根据频率分布直方图填写下面 2×2 列联表，并判断是否有 95%的把握认为：成绩优秀与教学方式有关

$$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

	甲班	乙班	总计
成绩优秀	12	4	16
成绩不优秀	38	46	84
总计	50	50	100

解:（Ⅰ)从乙班优秀生有 4 人，ξ 的可能值有 0,1,2

$$P(\xi=0)=\frac{C_{46}^2}{C_{50}^2}=\frac{46\times45}{50\times49}=\frac{207}{245},P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_{46}^1}{C_{50}^2}=\frac{8\times46}{50\times49}=\frac{184}{1225},P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_{50}^2}=\frac{4\times3}{50\times49}=\frac{6}{1225}$$

ξ 的分布列

ξ	0	1	2
P	$\frac{207}{245}$	$\frac{184}{1225}$	$\frac{6}{1225}$

$$E\xi=0\times\frac{207}{245}+1\times\frac{184}{1225}+2\times\frac{6}{1225}=\frac{4}{25}$$

(Ⅱ) 从甲班优秀生 12 人，2×2 列联表如图

$$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(12\times46-4\times38)^2}{50^2\times16\times84}=4.762$$

由于 4.762>3.841，所以有 95%的把握认为成绩优秀与教学方式有关

三、正态分布

1．在对我市高中学生某项身体素质的测试中，测试结果ξ服从正态分布 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$，若ξ在（0，2）内取值的概率为 0.8，则ξ在（0，1）内取值的概率为

A．0.2　　B．0.4　　C．0.6　　D．0.3

2、某次地区 20000 万名学生的考试的成绩ξ～N(90，49)，单位为分，成绩在(90，111］之间的人数约为____________________ $P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9974$

3. 在某次模拟考试中，某校 1000 名考生的数学成绩近似服从正态分布 $N(120,100)$，则该校数学成绩在 140 分以上的考生人数约为__23__.

$\boldsymbol{P}(\mu-\sigma<\boldsymbol{X}\le\mu+\sigma)=0.6826,\boldsymbol{P}(\mu-2\sigma<\boldsymbol{X}\le\mu+2\sigma)=0.9544,$