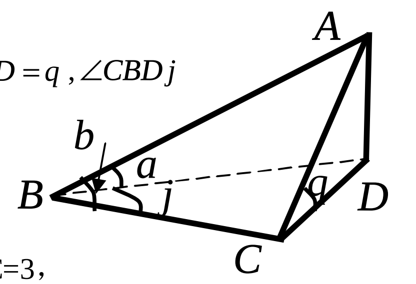
廖老师网上千题解答分类十、超纲立几

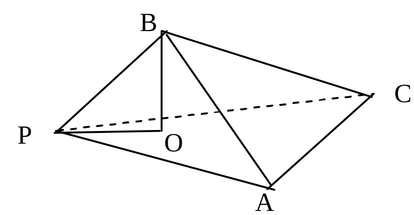
56、在立体几何中有一个 cosα cosβ =csoɣ 的公式（求夹角的公式）
另外还有一个 sinα sinβ =sinɣ 两个式子中字母代表的量不同，请问在 sin 的公式中各字母代表什么量？

答：如图，三棱锥 A—BCD 中，$AB\perp$面BCD，
$\angle BCD = 90^\circ$， 设$\angle ABD = a$，$\angle ABC = b$，$\angle ACD = q$，$\angle CBD\, j$



则 $\sin q = \dfrac{\sin a}{\sin b}$， $\cos j = \dfrac{\cos b}{\cos a}$

57、 四面体 P—ABC 中，$\text{Ð}CPA = 60^\circ$，
$\text{Ð}BPC = 45^\circ$，$\text{Ð}APB = 30^\circ$，PA=1，PB=2，PC=3，
求此四面体体积



解：作 $BO\perp$面PAC于O，设$\angle BPO = a$

则$\cos\angle APO = \dfrac{\cos\angle APB}{\cos a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cos a}$ ①

$\cos(60^\circ - \angle \mathrm{APO}) = \dfrac{\cos\angle BPC}{\cos a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos a}$ ②

即：$\dfrac{1}{2}\cos\angle \mathrm{APO} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle \mathrm{APO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos a}$ ③

把①代入③得

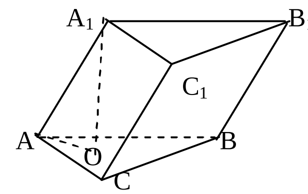
$$\frac{\sqrt{3}}{2\cos a} + \sqrt{3}\sqrt{1-\frac{3}{4\cos^2 a}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos a}$$

解得$\cos^2 a = \dfrac{5-\sqrt{6}}{3}$，$\sin^2 a = 1-\dfrac{5-\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}-2}{3}$

$$BO = BP\sin a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{3}}$$

$$V_{B\text{-}PAC} = \frac{1}{3}PA\bullet PC\sin\angle APB\bullet BO = \frac{1}{3}\bullet 1\bullet 3\sin 60^\circ\bullet 2\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{3}} == \frac{\sqrt{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}}}{3}$$

242、斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 5 的正三角形，侧棱长为 4，侧棱 AA_1 与底面两边 AB,AC 都成 60°，求这个三棱柱的侧面积。



解：作 $A_1O\perp$ 面ABC，则$\angle BAO=\angle CAO=30°$

$$\cos\angle A_1AO=\cos\angle CAO\bullet\cos\angle A_1AC=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

高 $A_1O=AA_1\bullet\sin\angle A_1AC=4\bullet\frac{\sqrt{13}}{4}=\sqrt{13}$

体积=$\frac{1}{3}\bullet(\frac{\sqrt{3}}{4}\bullet 5^2)\sqrt{13}=\frac{25\sqrt{39}}{12}$

321、正四棱锥 S—ABCD 中，P 是棱 SC 上的点，SP：PC=1：2，M，N 分别是棱 SB，上的 SD 点，BM=DN，当 SA//平面 PMN 时，求 MN：BD 的值。

四棱锥怎么画啊？

解：分别取 BO 和 SC 的中点 O、E

连 OE，则 SA∥OE，故 SA∥面 EBD

分别取 SB 和 SD 的中点 M、N

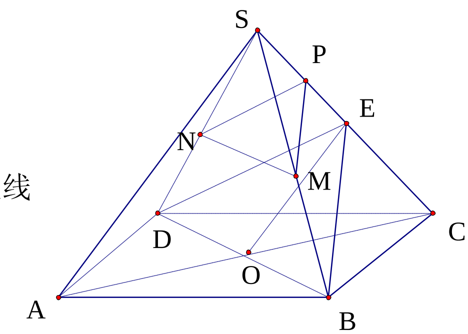
由于 SP：PC=1：2

则 MP，PN 分别为△SBE 和△SDE 的中位线

故面 PMN∥面 EBD

SA∥面 PMN，符合条件

这时 MN：BD=1：2



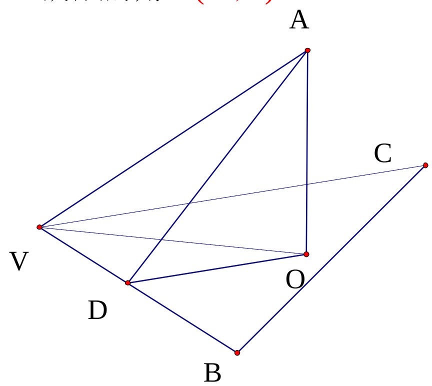
381、正四面体 ABCD 体积为 1，其中心为点 O，正四面体 A‘B’C‘D’与正四面体 ABCD 关于点 O 对称，则这两个正四面体公共部分体积为多少(竞赛)

去 2 去八个角，每角角体积$\frac{1}{27}$

故要去$\frac{8}{27}$，余下$(2-\frac{8}{27})\div 2=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}$

499、VA 是直角三角形 BVC 所在平面外的射线，∠BVC= 90°，∠AVB=∠AVC= 60°。求：VA 与平面 BVC 所成的角。(立几)

解：作 $AO\perp$ 面VBC 于点 O,则



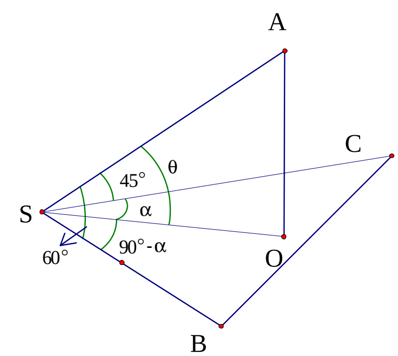
∠AVO 为 VA 与平面 BVC 所成的角
因为∠AVB=∠AVC= 60°,∠BVC= 90°
所以∠OVB=∠OVC= 45°
作 $OD\perp VB$ 于点 D,连 AD,则 $AD\perp VB$
设 $AV=2$，
由 $Rt\Delta AVD$ 得 $VD=1$

由 $Rt\Delta OVD$ 得 $VO=\sqrt{2}$

由 $Rt\Delta AVO$ 得∠AVO= 45°

501、有一点 S 出发作三条射线 SA、SB、SC，若∠ASB= 60°，∠ASC= 60°，∠BSC= 60°。求 SA 与平面 SBC 所成的角。(立几)

解：作 $AO\perp$ 面SBC于O,设 $\angle ASO=q$



$\angle CSO=a$,则 $\angle BSO=90°-a$

$\cos 60°=\cos q\cos(90°-a)=\cos q\sin a$

$\cos 45°=\cos q\cos a$

则 $\sin a=\dfrac{\cos 60°}{\cos q}=\dfrac{1}{2\cos q}$ ①

$\cos a=\dfrac{\cos 45°}{\cos q}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos q}$ ②

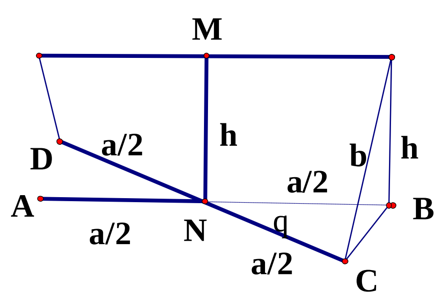
由①^2+②^2 得

即： $\dfrac{1}{4\cos^2 q}+\dfrac{2}{4\cos^2 q}=1$

$\dfrac{3}{4\cos^2 q}=1$， $\cos^2 q=\dfrac{3}{4}$， $\cos q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $q=30°$

653、一长为 a 的木梁，其两端悬于两条相平行，长度都为 b 的绳索下，木梁处于水平位置，若把木梁绕其中轴转动一个角度q ，问木梁升高多少(立几)

$CB^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2-2(\frac{a}{2})^2\cos q$



$h^2=b^2-CB^2$

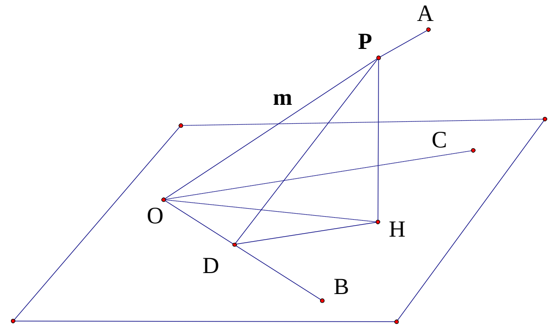
$=b^2-2(\frac{a}{2})^2(1-\cos q)$

$=b^2-a^2\sin^2\frac{q}{2}$

木梁升高了 $b-h=b-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\frac{q}{2}}$

659、已知射线 OA,OB,OC 两两相交成的角都是$60°$,在 OA 上有一点 P,并且 OP=m，P 在平面 BOC 内的身影为 H,求 PH. (立几)

解：作 $HD \perp OB$ 于点 D,连 PD,



因 $PH \perp$ 面OBC,则 $PD \perp OB$

因为∠AOB=∠AOC=∠BOC=$60°$

所以∠HOD=30 度

因 $PO = m$，

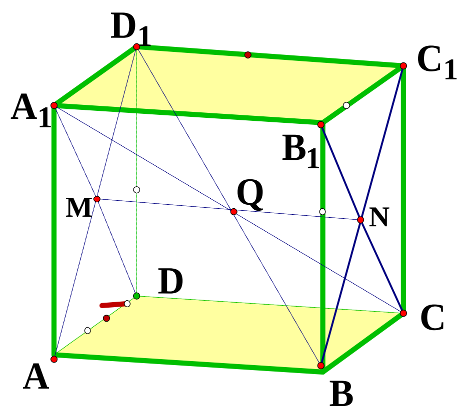
由 $Rt\Delta POD$ 得 $OD = \dfrac{m}{2}$

由 $Rt\Delta ODH$ 得 $OH = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$

由 $Rt\Delta POH$ 得 $PH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}m$

712、在正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，设线段 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于 Q，求证：: B、Q、D_1 共线? (立几)

证明：设 A_1D I AD_1=M，B_1C I BC_1=N



MN，则面 ABC_1D_1 I A_1B_1CD= MN

在矩形 A_1B_1CD 中，设 A_1C I MN= Q_1

由于 $\Delta A_1MQ \cong \Delta ACNQ$，于是 Q 是 MN 的中点

在矩形 ABC_1D_1 中，设 D_1B I MN= Q_2

同理可证 Q_2 是 MN 的中点，于是 Q_1 与 Q_2 重合

因为 MN⊂平面 ABC_1D_1，因此 Q_1 与 Q 重合

因为 B、Q_2、D_1 是矩形 ABC_1D_1 的对角线 BD_1 上的三点

所以 B、Q_2、D_1 三点共线

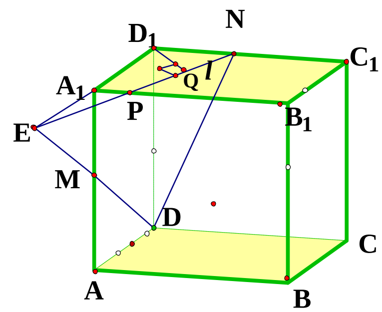
于是所以 B、Q、D_1 三点共线

714、正方体在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, M、N 分别是线段 AA_1、D_1C_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体上底面相交于直线 l

（1） 画出直线 l 的位置

（2）设 $l \cap A_1B_1=P$，求 PB_1 的长

（3）求 D_1 到 l 的距离(立几)



解：（1）延长 DM、D_1A_1 交于 E 点，连 EN

则直线 EN 就是所求的直线 l

（2）设 $l \cap A_1B_1=P$，

由于 M 是线段 AA_1 的中点

故 $A_1E=AD=a=D_1A_1$

于是 $A_1P=\frac{1}{2}D_1N=\frac{1}{4}a$，所以 $PB_1\frac{3}{4}a$

（3）作 $D_1Q\perp l$ 于点 Q,则 D_1Q 为所求的距离

$$DQ=\frac{ED_1\bullet D_1Q}{\sqrt{ED_1{}^2+D_1Q^2}}=\frac{2a\bullet\frac{1}{2}a}{\sqrt{(2a)^2+(\frac{1}{2}a)^2}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}a$$

724、如图，P 是 ΔABC 所在平面外一点，PA、PB、PC 两两垂直，PH⊥平面 ABC，

求证：$\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{PH^2}$ (推理与证明)

思考过程：此题有点难

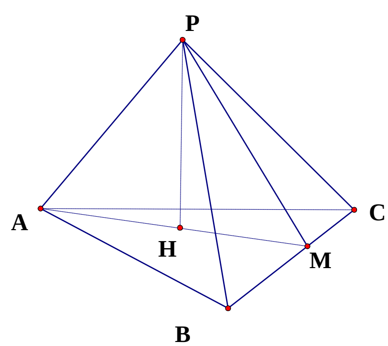
（1）先退化为平面的问题；P 线段 BC 外一点，PB⊥PC， PH⊥BC，求证：

$$\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{PH^2}$$

证明：$\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{BH\bullet BC}+\frac{1}{CH\bullet CB}=\frac{CH+BH}{BH\bullet CH\bullet BC}=\frac{BC}{BH\bullet CH\bullet BC}$

$$=\frac{1}{BH\bullet CH}=\frac{1}{PH^2}$$

（2）回到原题，如图



设直线 $AH \cap BC=M$，因 PA⊥PB， PA⊥PC

故 PA⊥面 PBC，于是，PA⊥BC

由 PH⊥平面 ABC，得 PH⊥BC

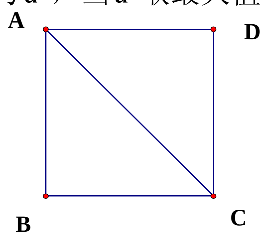
因此 BC⊥平面 PAM，于是 $PM\perp BC$

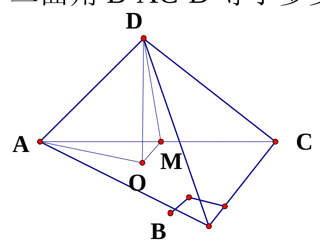
由（1）得

$$\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{PM^2}$$

$\frac{1}{PM^2}+\frac{1}{PA^2}=\frac{1}{PH^2}$，因此 $\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PM^2}=\frac{1}{PH^2}$

725、已知正方形 ABCD，沿对角线 AC 将△ADC 折起，设 AD 与平面 ABC 所成的角为a，当a取最大值时，二面角 B-AC-D 等于多少？为什么啊？(立几)



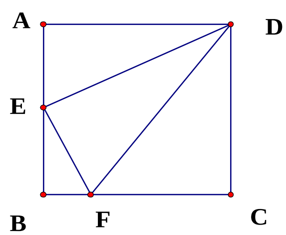


解：设正方形 ABCD 的边长为 1，拆起后D到面 ABC 的距离DO
取AC的中点M，连DM

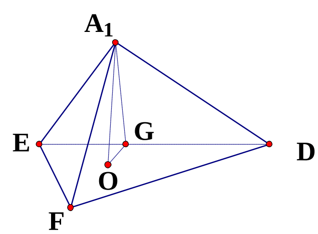
则$\sin a=\dfrac{DO}{DA}=DO\le DM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当，$O$与$M$重合时，$\sin a$最大$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

此时a最大=45°，$DM\perp$平面 ABC，二面角 B-AC-D=90°

732、正方形边长为 4，E 是 AB 的中点，F 为 BC 上的动点，将ΔAED和ΔCDF沿 DE，DF 折起，使 A、C 重合于A_1，求A_1到面 EFD 的距离的最大值。(立几)



（图 1）



（图 2）

解：先看图（2）设拆起后A_1到面 EFD 的距离A_1O，作$A_1G\perp ED$于G

则$A_1O\le A_1G=\dfrac{A_1E\bullet A_1D}{\mathrm{DE}}=\dfrac{2\times 4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

当且仅当，O与G重合时，A_1O最大$=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

此时，直线A_1D在面 EFD 上的射影为 ED

因$A_1D\perp A_1E, A_1D\perp A_1F$，故$A_1D\perp$面$A_1EF$，$A_1D\perp EF$

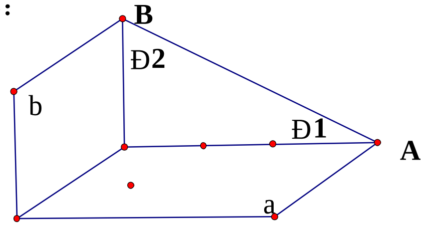
由三垂线定理得，$DE\perp EF$

再看图（1）得$\Delta AED\backsim\Delta BFE$，于是$\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{AE}{AD}$，$\dfrac{BF}{2}=\dfrac{2}{4}$，$BF=1$

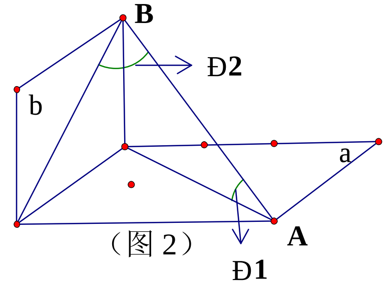
综上所述，当$BF=1$时，起后A_1到面 EFD 的距离A_1O最大$=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

734、二面角$a-l-b=90^\circ$，$A\in a$，$B\in b$，设直线 AB 与a，b所成的角分别为$\angle 1$和$\angle 2$，则$\angle 1+\angle 2=90^\circ$吗？为什么？(立几)

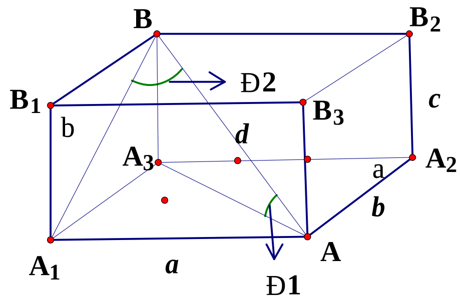
解：



（图 1）



（图 2）



（图 3）

讲解：（1）$\angle 1+\angle 2$有可能等于90°如图 1

（2）一般的情形如图 2，放到长方体中考虑如图 3

$\cos\angle 1=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{d}$，$\sin\angle 2=\dfrac{a}{d}$，$\sqrt{a^2+b^2}\geq a$

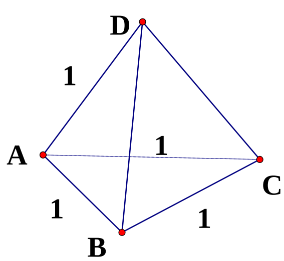
所以$\cos\angle 1\geq\sin\angle 2$，即$\sin(90^\circ-\angle 1)\geq\sin\angle 2$，

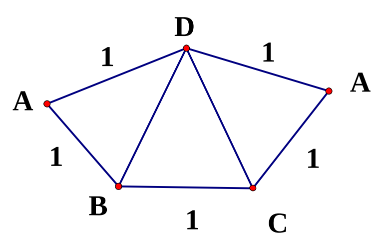
又因为$90^\circ-\angle 1,\angle 2\in[0^\circ,90^\circ]$

所以$90^\circ-\angle 1\geq\angle 2$，$\angle 1+\angle 2\leq 90^\circ$

736、已知三棱锥 ABCD 中，AB=AD=BC=AC=1，求全面积的最大值。(立几)

解：



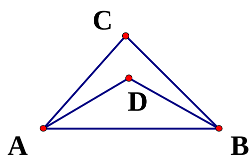


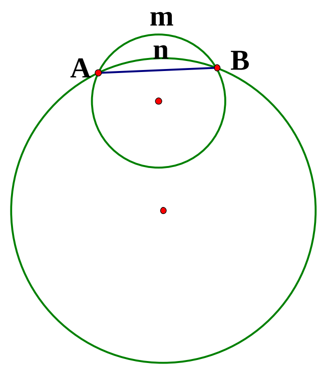
要使$D-ABC$全面积最大就要，使侧面积最大

把作出侧展开图，是五边长都为 1 的五边形，因此为正五边形时侧面积最大

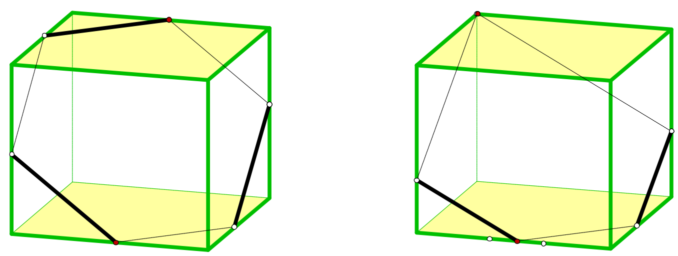
、

737、求证：球面上两点 A、B，在球面上从 A 到 B 的路径中，过 A、B、O 三点的大圆在球面上截得的弧长最短。(立几) (高考不要求)
提示:外凸线大于内凸线

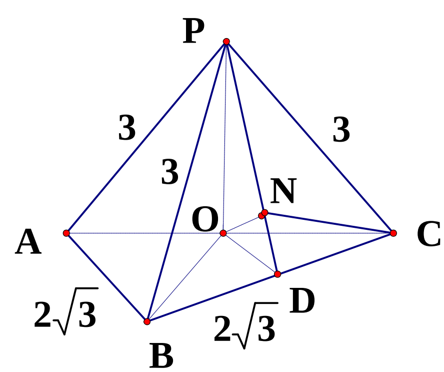




751、请问一个截面截正方形,怎么能截出六边形,为什么不能截出 5 边形呢?
解答：请看图(立几)



758、在三棱锥 P-ABC 中，PA=PB=PC=3，AB=BC=$2\sqrt{3}$，面 PAC 垂直于面 ABC，求直线 AC 交面 PCB 的角度(立几)



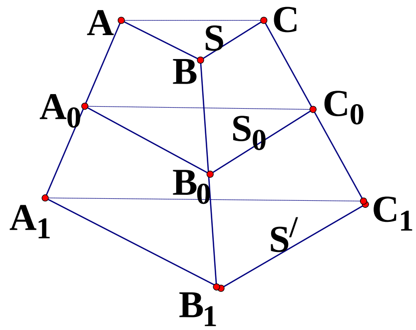
解：取 AC 中点 O，连 PO，因 PA= PC
故 PO⊥AC
因面 PAC⊥面 ABC
故 PO⊥面 ABC
因 PA=PB=PC
故 OA=OB=OC
于是∠ABC=90°
故 AC=$2\sqrt{6}$，取取 PD 中点 D，连 PD，
PD⊥BC，作 ON⊥PD，则 ON⊥面 PCB
于是∠OCN 为所求的角

在 Rt△ONC 中，OC=$\sqrt{6}$，ON=$\dfrac{OP \bullet OD}{\sqrt{OP^2+OD^2}}=\dfrac{\sqrt{3}\bullet\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

sin ∠OCN=$\dfrac{ON}{OC}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，∠ONC=30°

807、若棱台的上下底面积分别是 S、S'，则棱台的中截面面积是? (立几)

解：设中截面面积是 S_0 则



由于 $\sqrt{S}:\sqrt{S_0}:\sqrt{S'}=AB:A_0B_0:A_1B_1$

$A_0B_0=\frac{1}{2}(AB+A_1B_1)$

因此 $\sqrt{S_0}=\frac{1}{2}(\sqrt{S}+\sqrt{S'})$

$S_0=\frac{1}{4}(\sqrt{S}+\sqrt{S'})^2$

846、在四棱锥 P-ABCD 中，PC⊥平面 ABCD，四边形 ABCD 为正方形，PC=AB=1，E，F 分别是 PA，PC 的中点，求异面直线 BE 与 DF 间的距离？(立几)

题示：想到此图是正方体的殘缺图

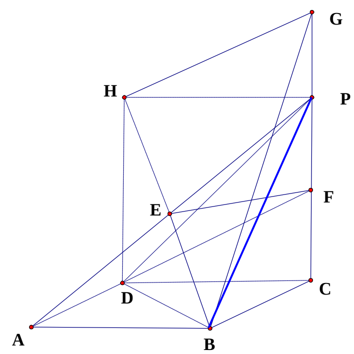
平移 DP 到 HG

则 DP // 面 HGB

于是 D 到面 HGB 的距离为所求

接着在四棱锥 D- HGB 中用体积法求出

是 D 到面 HGB 的距离

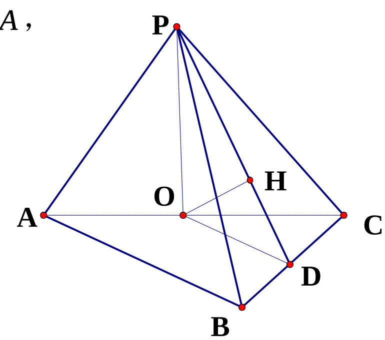


907、(立几)

在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB\perp BC$, $AB=BC=kPA$ ，

点 O 是 AC 的中点， $PO\perp$ 面ABC ，当 k 为何值时

点 O 在面 PBC 上的射影是 ΔPBC 的重心，为什么？



解：取 BC 的中点 D，连 PD，在 PD 上取点 H，

使 PH=2HP，则 H 是 ΔPBC 的重心，连 OH。

因为 $AB\perp BC$， OD // AB

故有 $OD\perp BC$ 。

又因 $PO\perp$ 面ABC， 于是 $PO\perp BC$， 而 $PO \cap OH=O$

所以 $BC\perp$ 面POD， 于是 $BC\perp OH$ ，

因此要使 $OH\perp$ 面PBC， 只要 $PD\perp OH$ ， 只要 $OD^2=DH\bullet PH=\frac{1}{3}PH^2$

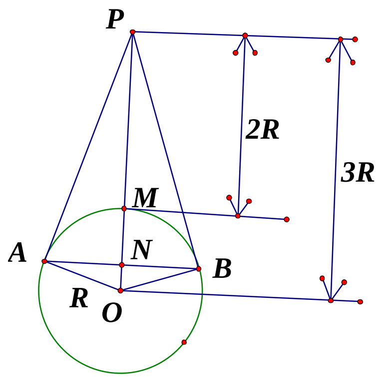
假设 $AB=BC=2$， 则 $OD=1$， $OC=\sqrt{2}$

于是要 $PD=\sqrt{3}$， $PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{2}$， $PA=\sqrt{PO^2+OA^2}=2$

因此 $k=\frac{AB}{PA}=1$

976、(立几)

卫星离地面高度为 2R（R 为地球半径），从卫星发射的电波覆盖的地面面积是地球表面积的______



解：如图

在 $Rt\Delta POA$ 中， $AN \perp PO$

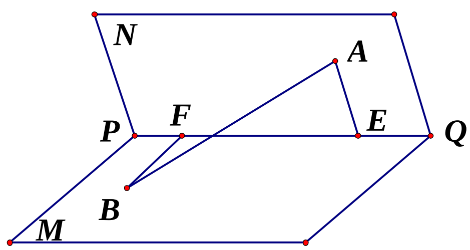
故 $OA^2 = ON \bullet OP$， 于是 $ON = \frac{OA^2}{OP} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$

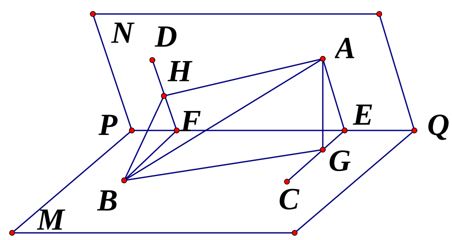
所以球冠的高 $h = MN = OM - ON = \frac{2R}{3}$

因此，覆盖的地面面积＝ $2pRh = \frac{4pR^2}{3} = \frac{1}{3}$×地球表面积

992、(立几)

如图所示,设点Ａ、Ｂ分别在二面角Ｍ－ＰＱ－Ｎ（平面角为锐角）的两个面Ｎ，Ｍ上，直线ＡＢ与Ｍ，Ｎ所成角分别为α，β，过点Ａ，Ｂ分别作棱ＰＱ的垂线ＡＥ，ＢＦ，垂足为Ｅ，Ｆ。求证： $\frac{AE}{BF} = \frac{\sin a}{\sin b}$





证明：在面 M 内作 $EC \perp PQ$，在面 N 内作 $FD \perp PQ$,

由于 $AE \perp PQ$， $BF \perp PQ$

故 $\angle AEC$ 和 $\angle DFB$ 都是Ｍ－ＰＱ－Ｎ的平面角，于是 $\angle AEC = \angle DFB$

作 $AG \perp EC$ 于点 G，作 $BH \perp FD$ 于点 H

由于 $EC \perp PQ$， $AE \perp PQ$， $AC \text{ I } EC = E$

于是 $PQ \perp$ 面AEC， 又 $AG \subset$ 面AEC，

故 $AG \perp PQ$，因为 $PQ \subset$ 面AEC， $EC \subset$ 面AEC， $EC \text{ I } PQ = E$

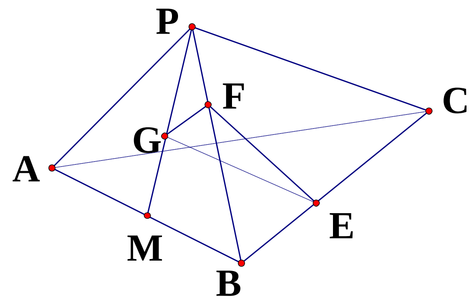
故 $AG \perp$ 面M， 因此 $\angle ABG$ 是ＡＢ与Ｍ所成角， $\angle ABG＝a$

$\sin a = \frac{AG}{AB}$， 同理 $\sin b = \frac{BH}{AB}$， $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{AG}{BH}$

由于 $Rt\Delta AEG \backsim Rt\Delta BFH$， 因此 $\frac{AE}{BF} = \frac{AG}{BH}$， 所以 $\frac{AE}{BF} = \frac{\sin a}{\sin b}$

1000、(立几) (高考不要求)

在正三棱 P-ABC 中,三条侧棱两两垂直,G 是三角形 PAB 的重心,E,F 分别为 BC.PB 上的点,且 BE:EC=PF:FB=1:2,



(1)求证: 面$GEF \perp$面PBC

(2)求证:EG 是 PG 与 BC 的公垂线.

解：(1)设 $PA = PB = PC = 3$,

则 $BC = AB = 3\sqrt{2}$，

因 G 是三角形 PAB 的重心，

故 $PG = \frac{2}{3}PM = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$

因 BE:EC=PF:FB=1:2,

故 $PF = 1, BF = 2, BE = \sqrt{2}$

在ΔFBE 中， $EF^2 = BE^2 + BF^2 - 2BE \times BF\cos\angle FBC = 2 + 4 - 2\sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

于是 $EF^2 + BE^2 = 2 + 2 = 4 = BF^2$，故 $EF \perp BC$

在ΔFBE 中， $FG^2 = PG^2 + PF^2 - 2PG \times PF\cos\angle GPF = 2 + 1 - 2\sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

于是 $PF^2 + FG^2 = 1 + 1 = 2 = PG^2$，故 $GF \perp PF$

因为 $PC \perp PA, PC \perp PB$,故 $PC \perp$面PAB， $PC \perp GF$， 又 $PC \cap PB = P$

因此 $GF \perp$面PBC， 又 $BC \subset$面PBC， 故 $GF \perp BC$， 又 $GF \cap FE = F$

因此 $BC \perp$面FGE， 又 $BC \subset$面PBC， 故 面$GEF \perp$面PBC

(2) 因 $BC \perp$面FGE， 故 $BC \perp GE$

在 $Rt\Delta GFE$ 中， $GE^2 = GF^2 + FE^2 = 1 + 2 = 3$

连 PE， 在 ΔPBE 中，

$$PE^2 = PB^2 + BE^2 - 2PB \times BE\cos\angle PBE = 9 + 2 - 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

于是 $GE^2 + GP^2 = 3 + 2 = 5 = PE^2$，故 $PG \perp GE$， 又 $BC \cap GE = G$， $PG \cap GE = G$

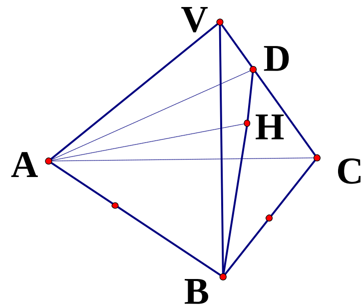
因此 EG 是 PG 与 BC 的公垂线.

1002、(立几)

如图，在三棱锥 V-ABC 中，AH⊥侧面 VBC,且 H 为△VBC 的垂心，

(1)求证：VC⊥AB.

(2)若二面角 H-AB-C 的大小为 30°,求 VC 与面 ABC 所成角的大小.



证明：(1)因 $AH\perp$面VBC，

故 AB在面VBC上的射影是BH

因 H 为△VBC 的垂心

故$VC\perp BH$，由三垂线定理得，$VC\perp AB$

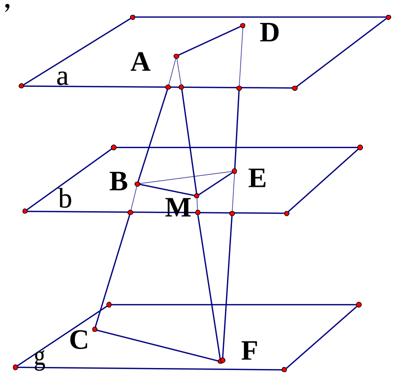
(2)延长 BH 交 VC 于点 D,

因$VC\perp BH$，$VC\perp AH$，故$VC\perp$面ABD

因 面ABD与面 ABC 所成角为 30° 故 VC 与面 ABC 所成角为 60°

1005、(立几)

如图，已知平面$\alpha\ /\!/\ \beta\ /\!/\ \gamma$，$\beta$ 位于α，γ 之间，$A\in\alpha$，$D\in\alpha$，$C\in\gamma$，$F\in\gamma$，AD与CD 是异面直线，$AC\cap\beta=B$，$DF\cap\beta=E$，$AF\cap\beta=M$，α，β 之间的距离为h'，α，γ 之间的距离为h，当$\dfrac{h'}{h}$的值是多少时，三角形 BME 的面积最大？



解：设 $AD=a$，$CF=b$，AD 与 CF 所成的角为θ

$MB=x$，$MF=y$，$\dfrac{h'}{h}=t$，则$\dfrac{h-h'}{h}=1-t$

因$\alpha\ /\!/\ \beta\ /\!/\ \gamma$ 故 $BM\ /\!/\ CF$,$EM\ /\!/\ AD$

于是$\dfrac{x}{b}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{h'}{h}=t$，$\dfrac{y}{a}=\dfrac{FM}{FA}=\dfrac{h-h'}{h}=1-t$

BM 与 EM 所成的角为θ

于是$\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=t+1-t=1$（1），$S_{\Delta BME}=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$ （2）

由（1）得，$1=\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{xy}{ab}}$，$xy\leq\dfrac{1}{4}ab$

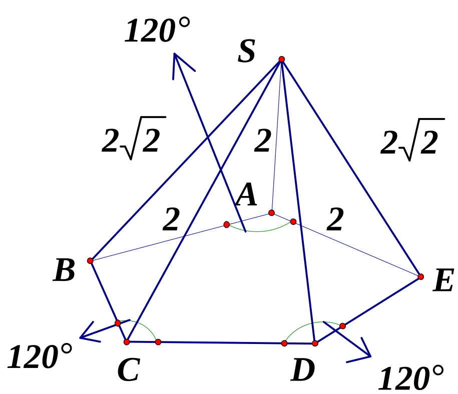
由（2）得，$S_{\Delta BME}=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta\leq\dfrac{1}{8}ab\sin\theta$

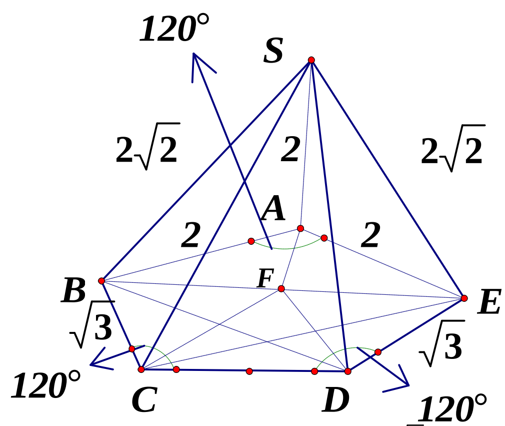
当且仅当$\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{a}$，$t=1-t$，$t=\dfrac{1}{2}$时取等号

当$\dfrac{h'}{h}$的值是$\dfrac{1}{2}$时，三角形 BME 的面积最大

1019、(立几)

如图，在五棱锥$S-ABCDE$中，$SA\perp$底面$ABCDE$，$SA=AB=AE=2$，$BC=DE=\sqrt{3}$，$\angle BAE=\angle BCD=\angle EDC=120^\circ$（Ⅰ)求 CD 与 SB 所成的角（Ⅱ)求证$BC\perp$面$SAB$(Ⅲ)求二面角$B-SC-D$的大小





解：(Ⅰ)连接 BD、CE 、BE，由$\angle BCD=\angle EDC=120^\circ$，$BC=DE=\sqrt{3}$

得$\Delta BCD\cong\Delta EDC$，于是$\Delta BCE\cong\Delta EDB$，故$\angle CBE=\angle DEB=60^\circ$

所以 CD//BE，于是$\angle SBE$是 SB 和 CD 所成的角。

在ΔSBE中，SB=SE=$2\sqrt{2}$，BE=$2\sqrt{3}$

因此$\cos\angle SBE=\dfrac{SB^2+BE^2-SE^2}{2SB\bullet BE}=\dfrac{12}{8\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(Ⅱ)在等腰ΔABE中$\angle BAE=120^\circ$，于是$\angle ABE=30^\circ$

因此$\angle ABC=\angle ABE+\angle EBC=90^\circ$，即$AB\perp BC$

因$SA\perp$底面$ABCDE$，故$SA\perp BC$，又$AB\ \mathbf{I}\ SA=A$

所以$BC\perp$面SAB

(Ⅲ)在$Rt\Delta SBC$中，$SB=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{11}$

$$\cos\angle SCB=\frac{BC}{SC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}，\quad \sin\angle SCB=\frac{SB}{SC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

取 BE 中点 F，连 FC，FD，易得$CD=\sqrt{3}$

在等腰ΔSCD中，$SC=SD=\sqrt{11}$

于是$\cos\angle SCD=\dfrac{SC^2+CD^2-SD^2}{2SC\bullet CD}=\dfrac{3}{2\sqrt{11}\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}$，$\sin\angle SCD=\dfrac{\sqrt{41}}{2\sqrt{11}}$

设二面角$B-SC-D$的大小为q，由三面角的余弦定理得

$$\cos q=\frac{\cos\angle BCD-\cos\angle SCB\bullet\cos\angle SCD}{\sin\angle SCB\bullet\sin\angle SCD}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\bullet\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{11}}}=\frac{-\frac{7}{11}}{\frac{\sqrt{82}}{11}}=-\frac{7\sqrt{82}}{82}$$

因此，$q=p-\arccos\dfrac{7\sqrt{82}}{82}$

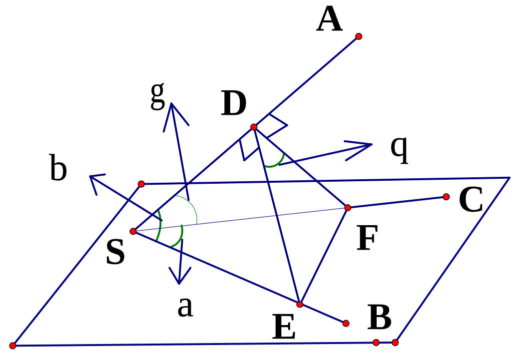
1020、(立几)

由三面角的余弦定理：

如图，$\angle BSA = a$ $\angle ASB = b$ ，$\angle ASC = g$

二面角 $B-SC-D$ 的大小为 q ，则

$$\cos q = \frac{\cos a - \cos b \cos g}{\sin b \sin g}$$



证明：设 $SD = 1$，则 $DE = \tan b$ ，$DF = \tan g$

$$SE = \frac{1}{\cos b} = \sec b \text{ ，} \quad SF = \frac{1}{\cos g} = \sec g$$

$$EF^2 = SE^2 + SF^2 - 2SE \bullet SF \cos a = \sec^2 b + \sec^2 g - 2\sec b \sec g \cos a$$

所以 $DE^2 + DF^2 - EF^2 = 2\sec b \sec g \cos a + \tan^2 b - \sec^2 b + \tan^2 g - \sec^2 g$

$= 2\sec b \sec g \cos a - 2$

所以 $\cos q = \dfrac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2DE \bullet DF} = \dfrac{2\sec b \sec g \cos a - 2}{2\tan b \tan g} = \dfrac{\cos a - \cos b \cos g}{\sin b \sin g}$

1025、(立几)

已知正三棱锥 V—ABC 的底面边长为 a，侧棱与底面所成的角为 α；过底边 BC 作这棱锥的截面，试问当截面与底面所成的二面角为多少时，截面的面积最小？并求面积的最小值

解：设过 BC 的截面与侧棱 VA 交于 P 点，

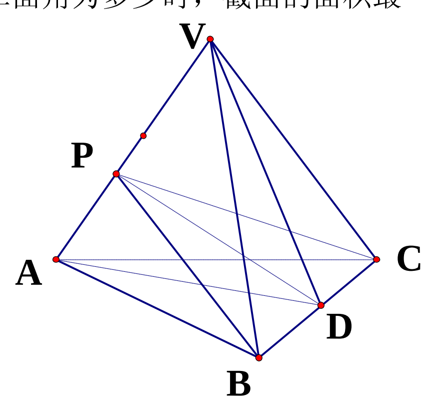
取 BC 中点 D，连 PD，则 $PD \perp BC$

于是 $S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} a \bullet PD$

当 PD 最小时，$S_{\Delta PBC}$ 最小

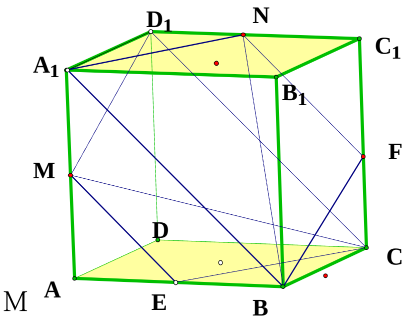
于是 PD 是 VA 与 BC 的公垂线

因此，$a_1 = \angle PDA = 90° - \angle VAD = 90° - a$



1035、(立几)

正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,M,N 分别是 AB,CC_1,AA_1,C_1D_1 的中点，求



证：平面CEM //平面BFN

证明：连 A_1B，A_1N、CD_1，MD_1

因 A_1B//NF，于是 $A_1B\subset$平面ＢＦＮ

故 $A_1N\subset$平面ＢＦＮ

因 A_1B //ME，$ME\subset$平面ＣＥＭ，$A_1B\not\subset$平面ＣＥＭ

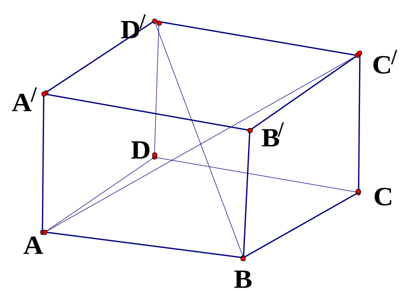
故 A_1B //平面ＣＥＭ

再证 A_1N //平面ＣＥＭ

可得平面ＣＥＭ//平面ＢＦＮ

1041、(立几)

一个直平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，BD'=根号 33，AC'=9，底面周长 18，侧棱 AA'长为 4 且，求这个直平行六面体的表面积.



解：设 $\overrightarrow{AB}=\vec{m},\ \overrightarrow{AD}=\vec{n},\ \overrightarrow{AA'}=\vec{q},$

则 $\vec{m}\bullet\vec{q}=0,\vec{n}\bullet\vec{q}=0$

$|\vec{q}|=4$，$|\overrightarrow{AC'}|=9$，$|\overrightarrow{BD'}|=\sqrt{33}$

$\vec{m}+\vec{n}+\vec{q}=\overrightarrow{AC'}$　　　$-\vec{m}+\vec{n}+\vec{q}=\overrightarrow{BD'}$

分别平方得

$\vec{m}^2+\vec{n}^2+\vec{q}^2+2\vec{m}\bullet\vec{n}=\overrightarrow{AC'}^2$　　$\vec{m}^2+\vec{n}^2+\vec{q}^2-2\vec{m}\bullet\vec{n}=\overrightarrow{BD}^2$

$\vec{m}^2+\vec{n}^2+2\vec{m}\bullet\vec{n}=65$（1）$\vec{m}^2+\vec{n}^2-2\vec{m}\bullet\vec{n}=17$（2）

[（1）+（2）]÷2 得

$\vec{m}^2+\vec{n}^2=41$，又 $|\vec{m}|+|\vec{n}|=9$，故$|\vec{m}|=5,|\vec{n}|=4$ 或$|\vec{m}|=4,|\vec{n}|=5$

于是$|\vec{m}||\vec{n}|=20$，$\vec{m}\bullet\vec{n}=\dfrac{65-16-25}{2}=12$

$S_{\Delta ABCD}=\sqrt{\vec{m}^2\bullet\vec{n}^2-(\vec{m}\bullet\vec{n})^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$，侧面积＝$18\times4=72$

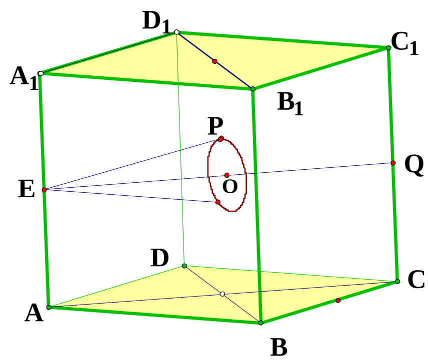
直平行六面体的表面积＝$72+12\times2=96$

1042、(立几)

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AA_1 的中点，点 P 在其对角面 BDD_1B_1 内运动，若 EP 总与直线 AC 成等角，则点 P 的轨迹有可能是（　）

A 圆或圆的一部分　　　　B 抛物线或其一部分

C 双曲线或其一部分　　　D 椭圆或其一部分



解：取 CC_1 的中点 Q，连 EQ

设 EQ **I** 面 BDD_1B_1=O，连 PO

于是 EO // EP

则 $\angle OEP$ 是 EP 与直线 AC 所成的角 q

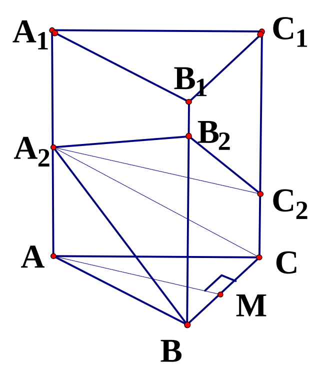
PO= $OE\tan q$

故点 P 的轨迹是以 O 为圆心 $OE\tan q$ 为半径的圆或圆的一部分

1080、(立几)

如图，直三棱柱油箱底面 ABC 的面积是 S，A_2、B_2、C_2 是三条侧棱上的小孔（其面积忽略不计）A $A_2=h_1$、B $B_2=h_2$、$CC_2=h_3$，若允许油箱倾斜，求这个油箱的最大容积

解：当一个容器能装满时，容积最大。由于这个油箱有 A_2、B_2、C_2 三个小孔因此只有把几何体 $ABC\text{-}A_2B_2C_2$ 装满时油箱的容积最大



$$V_{ABC-A_2B_2C_2}=V_{A_2-ABC}+V_{A_2-B_2BCC_2}$$

$$=\frac{1}{3}Sh_2+\frac{1}{3}S_{BCC_2B_2}\bullet AM$$

$$=\frac{1}{3}Sh_2+\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}(h_1+h_3)BC\bullet AM$$

$$=\frac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3)$$

1133、(立几)

已知在四棱锥 P-ABCD 中底面是一个平行四边形，

$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$ ，$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$

(1)求证：$\overrightarrow{AP}\perp$ 底面$ABCD$

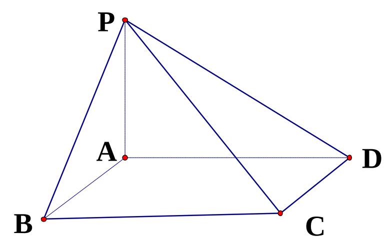
(2)求四棱锥 P-ABCD 的体积

(3)设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 定义 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

求 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$ 的绝对值，并指出它的几何意义

解：(1)因 $\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$ ，$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$

故 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AB}=-2-2+4=0$，$\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AD}=-4+4=0$



于是 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AD}$

故 $AP\perp$ 面$ABCD$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{21}$ $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{20}$

$$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{6}{\sqrt{21}\times2\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{105}}$$

$$\sin\angle BAD=\sqrt{\frac{96}{105}}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{105}}$$

$$S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\sin\angle BAD=\sqrt{21}\times2\sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{105}}=8\sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{6},V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}|\overrightarrow{AP}|=16$$

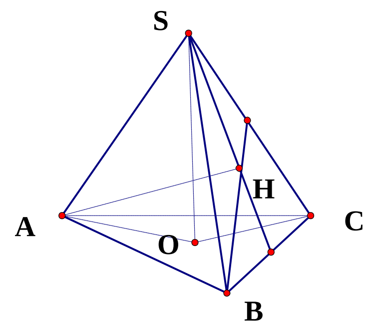
$$(3)|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\bullet\overrightarrow{AP}|=\left\|\begin{matrix}2 & -1 & -4\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=|-48|=48$$

由此可知 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\bullet\overrightarrow{AP}|$

1142、(立几)

已知三棱锥 S－ABC 的底面是正三角形，点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是三角形 SBC 的垂心，

SA＝a，则此三棱锥体积最大值是____________。



解：因 $AH\perp 面SBC$，故 $AH\perp BC$

因 H 是是三角形 SBC 的垂心，故 $SH\perp BC$

又因 $SH \cap AH = H$

故 $BC\perp 面SAH$，于是 $SA\perp BC$

作 $SO\perp 面ABC$ 于 O，由三垂线定理得 $AO\perp BC$

同理可得 $CO\perp AB$，于是 O 是三角形 ABC 的垂心

因 ΔABC 是正三角形，故 O 是 ΔABC 的中心

设 $AB=x$，则 $AO=\frac{2}{3}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，又因 $SA=a$

$SO=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}x^2}$，于是 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}SO=\frac{1}{3}\bullet\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\bullet\sqrt{a^2-\frac{1}{3}x^2}$

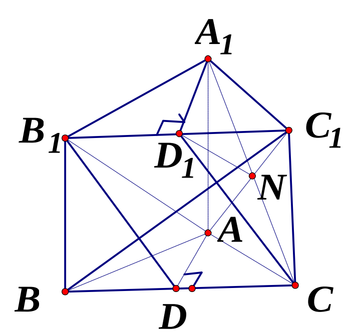
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1}{6}x^2\bullet\frac{1}{6}x^2(a^2-\frac{1}{3}x^2)}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x^2+a^2-\frac{1}{3}x^2}{3})^3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet\frac{a^3}{3\sqrt{3}}=\frac{a^3}{6}$$

故当 $\frac{1}{6}x^2=a^2-\frac{1}{3}x^2$ 即 $x^2=2a^2$ 时上式取等号，于是 $V_{最大}=\frac{a^3}{6}$

1166、(立几)

在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,BC_1 垂直于 A_1C，BC_1 垂直于 AB_1,那么底面三角形 ABC 的形状可能是什么三角形?请给详细解答.

证明：作 $AD\perp BC 于 D$, $A_1D_1\perp B_1C_1 于 D_1$



由于 $面ABC\perp 面BCC_1B_1$，于是 $AD\perp 面BCC_1B_1$，

故 $AD\perp 面BC_1$，又 $BC_1\perp AB_1$

于是 $BC_1\perp 面B_1AD$

同理 $BC_1\perp 面CA_1D_1$

故 $面B_1AD \,//\, 面CA_1D_1$

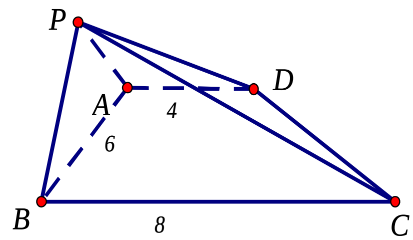
设 $AC_1\cap CA_1=N$，则 N 是 AC_1 的中点，且 $D_1N\,//\,AB_1$

于是 D_1 是 A_1C_1 的中点，于是 $\Delta A_1B_1C_1$ 是等腰三角形

1168、(立几)

四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD\perp$ 平面PAB， $BC\perp$ 平面PAB，底面 ABCD 为梯形， $AB=6$, $AD=4$, $BC=8$, $\angle APD=\angle CPB$ 满足上述条件的顶点 P 的轨迹为(　　)

A、圆一部分　B、椭圆一部分　C、双曲线的一部分　　D 抛物线一部分



解： $\angle PAD=90^\circ \Rightarrow PA=\dfrac{AD}{\tan\angle APD}=\dfrac{4}{\tan\angle APD}$，

$\angle PBC=90^\circ \Rightarrow PB=\dfrac{BC}{\tan\angle CPB}=\dfrac{8}{\tan\angle CPB}$

又 $\angle APD=\angle CPB$， 故

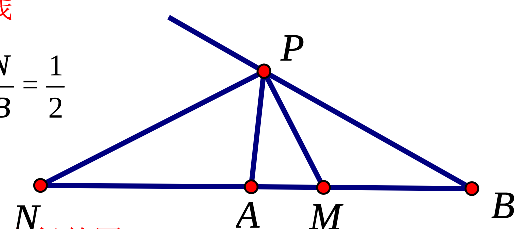
$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$,由解几很容易知道 P 点的轨迹为圆，因 P 与 $ABCD$ 构成四棱锥，于是要除去底面 ABCD 上的两点

注：如何用几何法由 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$， $AB=6$, 证出 P 的轨迹是圆呢？

如图 2,作 $\triangle PAB$ 的角 P 的内外角平分线，交直线 AB 于 M 和 N,， 则 $\angle NPM=90^\circ$ 于是 $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{1}{2}$

又 $AB=6$, 故 $AM=2$, $AN=6$，

因此 M,N 是定点，于是点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆。

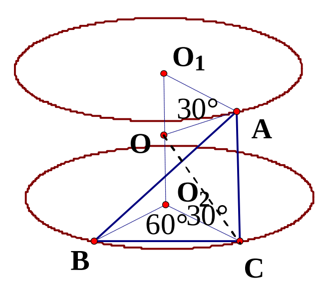


1219、(立几)

A 在北纬 30° 东经 30°， B 在南纬 30° 西经 30°， 设地球半径为 R,则线段 AB 的长为(　　)

A、$\sqrt{2}R$　　B、$\sqrt{3}R$　　A、$\dfrac{\sqrt{5}}{2}R$　　A、$\dfrac{\sqrt{7}}{2}R$

图示：选 D



1237、(立几) (竞赛)

已知棱长为 1 的正方体容器 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$，在棱 AB，BB_1 以及 BC_1 的中点处各有一个小孔 E、F、G，若此容器可以任意放置，则该容器可装水的最大容积为

A，4/5　B　7/8　C 7/12　D．11/12

答案：D　为什么

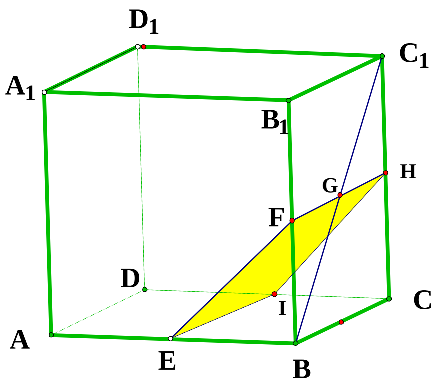


图 1

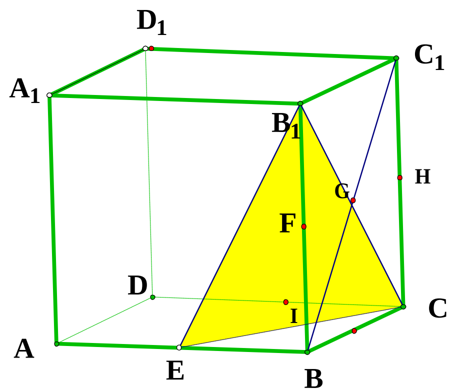


图 2

转到以黄色的截面为水平面，容积大的在下方

按图 1，则该容器可装水的容积为 7/8

按图 2，则该容器可装水的容积为 11/12

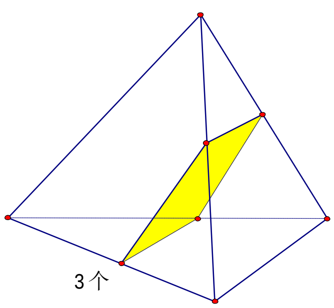
于是该容器可装水的最大容积为选 D

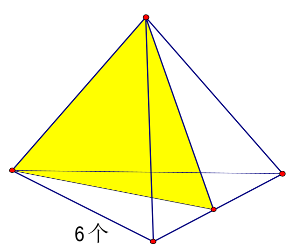
若为解答题就更难了，见下图

1248、(立几) (竞赛)

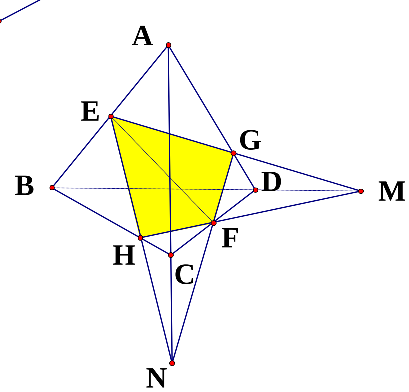
用一个平面去切正四面体，使切成的两部分成为形状大小都相同的两个几何体，这样的平面有（　　）个

A、3　　B、6　　C、8　　D、无数个





解 1：于是至少 9 个，排除 A、B、C　故选 D



解 2：过对棱中点作截面，

两部分会一样，因此无数

1262、(立几)

过棱长 a 为的正方体的每个顶点出发的三条棱的中点作截面，所得的各截面与正方体各面共同围成一个多面体。则此多面体：（1）相对面间的距离为 a 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$；（2）相邻面所成二面角为 $p - \mathbf{arctan}\sqrt{2}$ 或 $p - \mathbf{arctan}\, 2\sqrt{2}$；（3）表面积为 $3a^2$；（4）体积为 $\frac{5}{6}a^3$；（5）体内可放最大球的表面积为 $p\, a^2$。以上结论正确的是__________

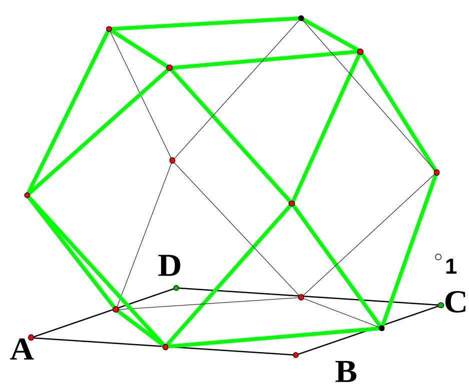
（1）错的，相对面的距离是 a 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（2）错的，$p - \mathbf{arctan}\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $p - 2\mathbf{arctan}\sqrt{2}$ 或 $90°$

（3）错的，$\frac{3}{2}a^2 + \sqrt{3}a^2$

（4）对的：$V_{右}=\frac{1}{3}\bullet(\frac{1}{2}\bullet\frac{a}{2}\bullet\frac{a}{2})\bullet\frac{a}{2}=\frac{a^3}{48}$，$V_{左}=1-\frac{8a^3}{48}=\frac{5a^3}{6}$

（5）也是对的



1279、(立几)

在△ABC 中，∠C 是直角，平面 ABC 外有一点 P，PC=4cm，点 P 到直线 AC、BC 距离都等于√10 cm，那么 PC 与平面 ABC 所成的角为　多少？

解：作 $PO\perp$ 面ABC 于点 O，作 $PD\perp AC$于D，作 $PE\perp BC$于E

连 OD，OE，则∠PCO 是 PC 与平面 ABC 所成的角

OD，OE 分别是 PD、PE 在面 ABC 上的射影

由三垂线定理的逆定理得：$OD\perp AC$，$OE\perp BC$

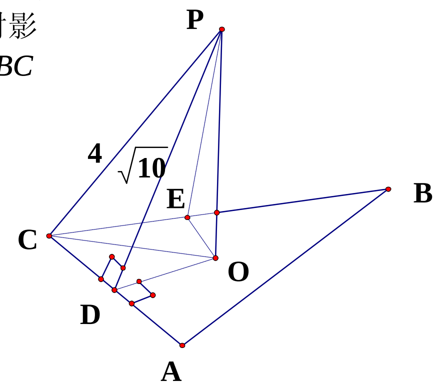
因为 $PD=PE=\sqrt{10}cm$，所以 $OD=OE$

于是 OC 平分 $\angle AOB$，∠OCD= 45°

由 $Rt\Delta PCD$ 得 $CO=\sqrt{6}$

由 $Rt\Delta OCD$ 得 $CO=2\sqrt{3}$

由 $Rt\Delta AVO$ 得∠PCO＝30°



1319

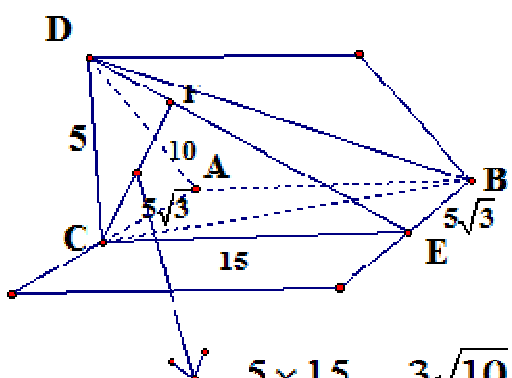
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22395&show=0

二面角 a -AB- b 的平面角为30°，在 b 上作 AD 垂直于 AB，AD=10，过 D 作 CD 垂直于 a 于 C，若 $\angle ACB=60°$

求 AC 与 BD 的距离.

解：因 AC 平行于面 DBE

故 AC 与 BD 的距离就是 AC 与面 DBE 的距离 CF



$$\frac{5\times15}{5\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

1332

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22476&start=36&show=0

如图,棱长为 5 的正方体,无论从哪一个面看都有两个直通的边长为 1 的正方形孔,求这个有孔立方体表面积(含内各面)

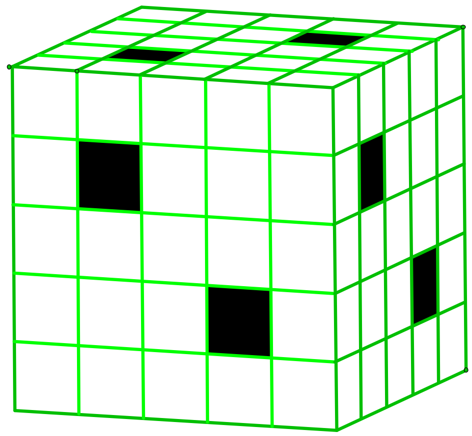


图1

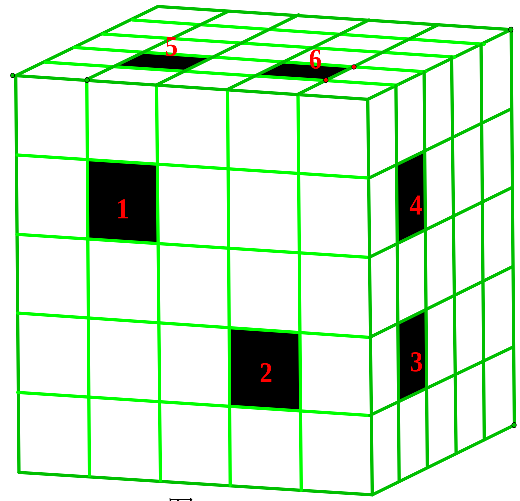


图2

通道内正方体产生的面积

①3 个通道相交面积=0　　②2 个通道相交面积=2

③2 个通道相擦面积=3　　④不与别通道相交相擦面积=4

1、在图 1 中，　面积=(25-2)×6+4×4×6=234

2、在图 2 中，　正方体外表面面积=(25-2)×6，

　1、2 通道产生的内部面积=16×2

　3，4 通道产生的内部面积=14×2

　5，6 通道产生的内部面积=12×2,（两个两通道相交面积 3，4 通道已经计算）

　总面积=(25-2)×6+16×2+14×2+12×2=222

3、图 3 与图 4，让网友们解一解

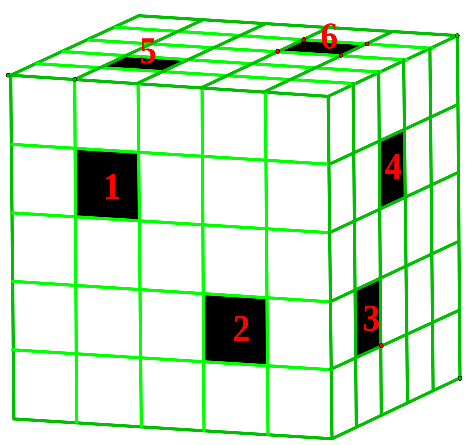


图3

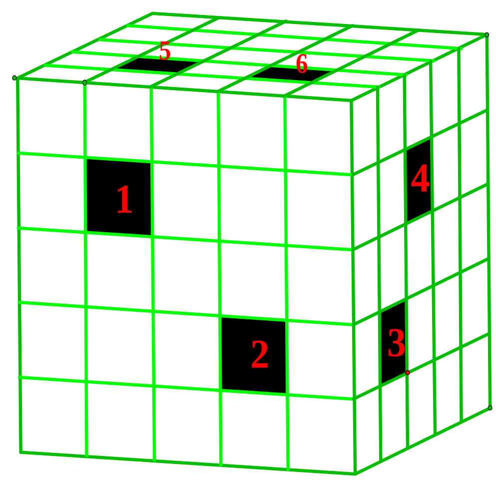
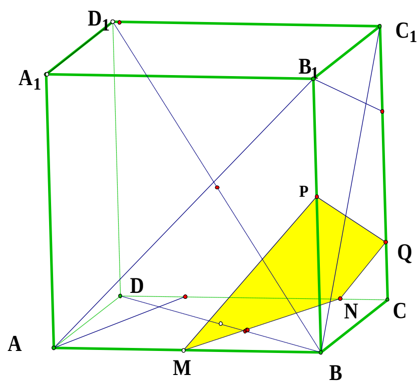


图4

1347、

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21624&show=0

长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AA_1 = 4, BC = 2, P$为BB_1 的中点，则长方体的过 P 点且垂直于对角线 BD_1 的截面面积为_______



解 1

$$S = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$$

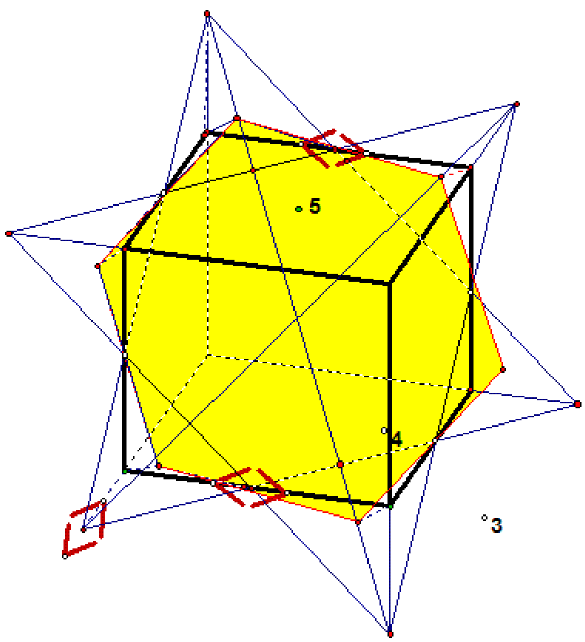
解 2：

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{截}} = \cos a = \sin \angle D_1BD = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, S_{MBCN} = 3, S_{截} = \frac{9}{2}$$

1383

http://bbs.pep.com.cn/thread-286901-1-1.html

单位正方体在一平面上的射影面积的最大值是多少？　给的答案是根 3，但我算的是：3 根 6/4

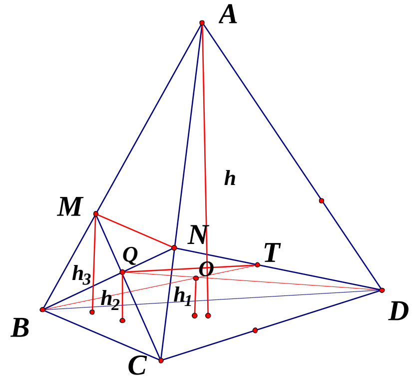


1385

http://bbs.pep.com.cn/thread-285695-1-2.html

AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G， 使 AE : EB=AF : FC=AG : GD=2 : 1，记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点，则三棱锥 O—BCD 的体积等于　　　（　　）

A 1/9 B 1/8 C 1/7 D1/4



$$\frac{h_3}{h}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{QM}{QC}=\frac{MN}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{h_2}{h_3}=\frac{QC}{MC}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{QO}{OD}=\frac{QT}{BD}=\frac{NA}{NB}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{h_1}{h_2}=\frac{OD}{QD}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{h_1}{h}=\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{5}\bullet\frac{5}{7}=\frac{1}{7}$$

1405

http://bbs.pep.com.cn/thread-288496-1-1.html

三棱锥 S-ABC,三角形 ABC 是等边三角形,点 A 在面 SBC 上的射影是三角形 SBC 的垂心,若 SA=a.求三棱锥体积的最大值.

讲解：(1)可证 SA 垂 BC,SB 垂 C

(2)可证 S 在底面的射影是底面的垂心,于是是底面中心,于是 SA=SB=SC

(3)三角形 SAB 最大面积 $\frac{a^2}{2}$ (此面上的最大高 a),于是最大体积 $\frac{a^3}{6}$

1411、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=288670&page=1#pid2999299

若对任意长方体 M,都存在一个与 M 等高的长方体 N,使得 M 与 N 的侧面积之比和体积之比都等于 t,则 t 的取值范围是:

A $0<t\le 1$ B $t\ge 1$ C $1\le t\le 2$ D $t\ge 2$

解：设长宽高分别为 a,b,h 和 m,n,h，则

$\dfrac{ab}{mn}=\dfrac{a+b}{m+n}=t$，于是 $mn=\dfrac{ab}{t},m+n=\dfrac{a+b}{t}$

因 $(m+n)^2\ge 4mn,$ 于是 $\dfrac{(a+b)^2}{t^2}\ge\dfrac{4ab}{t},$ 故 $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}\ge t$ 对 $a,b\in R^+$ 恒成立

因 $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}\ge\dfrac{4ab}{4ab}=1$，故 $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}$ 最小＝1，于是 $0<t\le 1$

解 2

$\dfrac{ab}{mn}=\dfrac{a+b}{m+n}=t$，于是 $ab=tmn,a+b=t(m+n)$

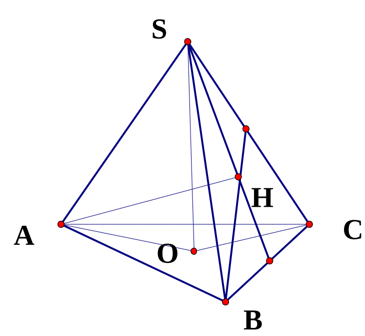
因 $(a+b)^2\ge 4ab,$ 于是 $t^2(m+n)^2\ge 4tmn,$

因 $t\ge\dfrac{4mn}{(m+n)^2}$ 存在 m，n 使之成立，只能得，故 $t>0$，这种做法失败

1441

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292257&pid=3032445&page=1&extra=pageD1#pid3032445

已知三棱锥 S－ABC 的底面是正三角形，点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是三角形 SBC 的垂心，SA＝a，则此三棱锥体积最大值是____________。



解：因 $AH\perp$ 面 SBC，故 $AH\perp BC$

因 H 是是三角形 SBC 的垂心，故 $SH\perp BC$

又因 $SH\cap AH=H$

故 $BC\perp$ 面 SAH，于是 $SA\perp BC$

作 $SO\perp$ 面 ABC 于 O，由三垂线定理得 $AO\perp BC$

同理可得 $CO\perp AB$，于是 O 是三角形 ABC 的垂心

因 ΔABC 是正三角形，故 O 是 ΔABC 的中心，于是 $SA=SB=SC=a$

$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}a^2\sin\angle ASB\le\frac{1}{2}a^2$，C 到面 SAB 的距离 $h\le CS=a$

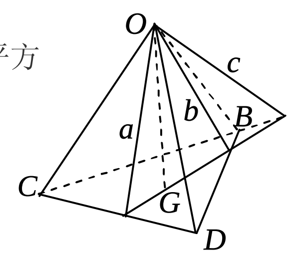
于是 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta SAB}h\le\frac{1}{3}*\frac{1}{2}a^2\bullet a=\frac{a^3}{6}$

当且仅当 SA、SB、SC 两两垂直时上式取等号，于是 $V_{最大}=\frac{a^3}{6}$

注意：若四面体的一个顶点在相对面上的射影是垂心，则其它三个顶点在相对面上的射影也是垂心

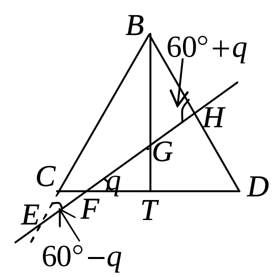
1456
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=281117&page=1#pid2927819

在正四面体中过顶点 O 作底面的垂线 OG，则过 OG 的平面分别交四面体的三个侧面，交线分别为 a,b,c。求证 a,b,c 与底面的夹角的正切平方之和为 12.



答：此题等价于证底面中心到三个交点的距离的倒数的平方和为定值，可由三角函数证之
如图，设底面内切圆半径为 r,

$$GF=\frac{GT}{\sin q}=\frac{r}{\sin q},GE=\frac{BG\sin30^\circ}{\sin(60^\circ-q)}=\frac{r}{\sin(60^\circ-q)}$$



$$GH=\frac{BG\sin30^\circ}{\sin(60^\circ+q)}=\frac{r}{\sin(60^\circ+q)}$$

$$\frac{1}{GF^2}+\frac{1}{GE^2}+\frac{1}{GH^2}=\frac{1}{r^2}[\sin^2 q+\sin^2(60^\circ-q)+\sin^2(60^\circ+q)]$$
$$=\frac{1}{2r^2}[\sin^2 q+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos q-\frac{1}{2}\sin q)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos q+\frac{1}{2}\sin q)^2]$$
$$=\frac{1}{2r^2}[\sin^2 q+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos q-\frac{1}{2}\sin q)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos q+\frac{1}{2}\sin q)^2]$$
$$=\frac{1}{2r^2}(\frac{3}{2}\sin^2 q+\frac{3}{2}\cos^2 q)=\frac{3}{4r^2}$$