廖老师网上千题解答分类十四、超纲直线与圆

39、设圆满足:①截 y 轴所得弦长为 2;②被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为 3:1,在满足条件①、②的所有圆中,求圆心到直线 ι :x-2y=0 的距离最小的圆的方程.

解 1：设圆的圆心为 P(a,b),半径为 r，则点 P 到 x 轴,y 轴的距离分别为 ｜b｜,｜a｜.

因圆 P 被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为 3:1,

故圆 P 截 x 轴所得的弦长所对劣弧的圆心角为直角

因此，$r^2=2b^2$

∵P 截 y 轴所得的弦长为 2,

∴$r^2=a^2+1$.　　从而　$2b^2-a^2=1$.

∵点 P(a,b)到直线 x–2y=0 的距离为 $d=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

∴　$5d^2=|a-2b|^2=a^2+4b^2-4ab\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=2b^2-a^2=1$,

当且仅当 a=b 时上式等号成立,此时 $5d^2=1$,从而 d 取得最小值.

由 $\begin{cases}a=b\\2b^2-a^2=1\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$，又 $r^2=2b^2$，得 $r=\sqrt{2}$

所求圆的方程是：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,或$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

解 2：设圆的圆心为 P(a,b),半径为 r，则点 P 到 x 轴,y 轴的距离分别为 ｜b｜,｜a｜.

因圆 P 被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为 3:1,

故圆 P 截 x 轴所得的弦长所对劣弧的圆心角为直角

因此，$r^2=2b^2$

∵P 截 y 轴所得的弦长为 2　∴$r^2=a^2+1$.

从而　$2b^2-a^2=1$　(1)

∵点 P(a,b)到直线 x–2y=0 的距离为 $d=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$a-2b=\pm\sqrt{5}d, a=2b\pm\sqrt{5}d$ (2)

(2)代入(1)　$2b^2-(2b\pm\sqrt{5}d)^2=1\Rightarrow 2b^2\pm4\sqrt{5}db+5d^2+1=0$

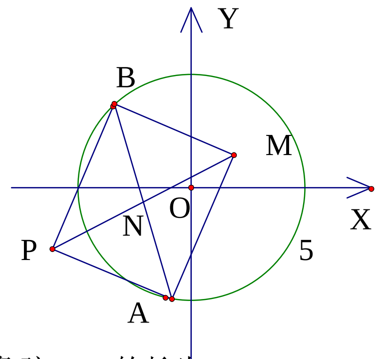
由 $\Delta=(4\sqrt{5}d)^2-8(5d^2+1)\geq0$,得$d^2\geq\dfrac{1}{5}$，于是 $d_{\min}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

此时，$2b^2\pm4b+2=0,(b\pm1)^2=0,b=\mp1$，$a=2b\pm\sqrt{5}d=\mp1$

故 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$，又 $r^2=2b^2$，得 $r=\sqrt{2}$

所求圆的方程是：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,或$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

175、已知某圆方程为 $x^2+y^2=4$， A， B 为圆上两动点，
M(1 , 1)为圆内一定点．若四边形 MAPB 为矩形，求 P 点的轨迹方程．



解：设 $P(x,y)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

,则 $x_1^2+y_1^2=4$①

$x_2^2+y_2^2=4$②

$x_1+x_2=x+1$③

$y_1+y_2=y+1$④

$(x-1)^2+(y-1)^2=(x_1-1)^2+(y_1-1)^2+(x_2-1)^2+(y_2-1)^2$⑤

把①②③④代入⑤式得 $x^2+y^2=6$ 为所求的方程

250、已知圆 C 过定点 $A(0,a)$,且在 x 轴上截得的象弦 MN 的长为 $2a$

(1)求圆 C 的圆心的轨迹方程(2)$|AM|=m,|AN|=n$，求 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 的最大值及此时圆 C 的方程

解：（1）设过点 A(0，a)的圆为

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ （$r>0$）

则 $x_0{}^2+(a-y_0)^2=r^2$①

由于圆在 x 轴上截得的弦长为 2a

因此，$a^2+y_0{}^2=r^2$②

由①②得 $x_0{}^2+(a-y_0)^2=a^2+y_0{}^2$

即 $x_0{}^2=2ay_0$ 所以所求的方程为 $x^2=2ay$

（2）设 MN 的中点为（x_0，0）则 M（x_0-a，0）,N（x_0+a，0）

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{\sqrt{(x_0-a)^2+a^2}}{\sqrt{(x_0+a)^2+a^2}}+\frac{\sqrt{(x_0+a)^2+a^2}}{\sqrt{(x_0-a)^2+a^2}}$$

$$=\frac{2x_0{}^2+4a^2}{\sqrt{(x_0{}^2+2a^2-2ax_0)(x_0{}^2+2a^2+2ax_0)}}=\frac{2(x_0{}^2+2a^2)}{\sqrt{(x_0{}^2+2a^2-2ax_0)(x_0{}^2+2a^2+2ax_0)}}$$

设 $t=x_0{}^2+2a^2$ 则 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{2t}{\sqrt{t^2-4a^2x_0{}^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{4a^2x_0{}^2}{t^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1-4a^2(\frac{x_0}{x_0{}^2+2a^2})^2}}$

$$\leq\frac{2}{\sqrt{1-4a^2(\frac{x_0}{2\sqrt{2}ax_0})^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-4a^2(\frac{x_0}{2\sqrt{2}ax_0})^2}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2}$$

当且仅当 $x_0=\pm2\sqrt{a}$ 时上式取等号

故 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 最大值是 $2\sqrt{2}$

此时 $(x\pm2\sqrt{2}a)^2+(y-4a)^2=4a^2$

370、曲线 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 上两点 P,Q 满足(1)关于直线 kx-y+4=0 对称;(2)向量 OP 垂直于向量 PQ,求直线 PQ 的方程.

解 1：圆方程 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 化为 $(x+\frac{1}{2})^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$

因为，圆上的两点 P,Q 关于直线 kx-y+4=0 对称，

所以，直线 kx-y+4=0 过圆心（$-\frac{1}{2},3)$

故 $-\frac{1}{2}$k-3+4=0，得 $k=2$

直线 kx-y+4=0 就是 y=2x-4

因为向量 OP 垂直于向量 PQ,求直线 PQ 的方程.

所以向量 OP∥直线 y=2x-4

可设 P（t.2t）

代入圆方程求出 P（t.2t）就可得直线 PQ 的方程了

解 2、圆方程 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 化为 $(x+\frac{1}{2})^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$

因为，圆上的两点 P,Q 关于直线 kx-y+4=0 对称

所以，直线 kx-y+4=0 过圆心 $(-\frac{1}{2},3)$,故 $-\frac{1}{2}$k-3+4=0，得 $k=2$

直线 kx-y+4=0 就是 2x-y+4=0

直线 PQ 与对称轴 2x-y+4=0 垂直

故可设直线 PQ 的方程为 x+2y+m=0

因为向量 OP 垂直于向量 OQ

故以线段 PQ 为直径的圆过原点

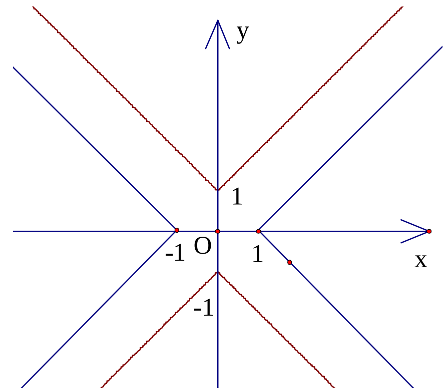
设以 PQ 为直径的圆的方程为： $x^2+y^2+x-6y+3+l(x+2y+m)=0$

过原点可得 $3+lm=0$①

圆心为 $(-\frac{1+l}{2},-\frac{2l-6}{2})$ 在直线 PQ 上

故 $2m-5l+11=0$②　　由①②解得 $m=-3$，或 $m=-\frac{5}{2}$

400、直角坐标系内到两坐标轴距离之差等于 1 的点的轨迹是什么？



解：适合条件的点为 $P(x,y)$

则 $|y|-|x|=1$，或 $|y|-|x|=-1$

$|y|=|x|+1$ 或 $|x|=|y|+1$

$y=|x|+1$（y⩾0），或 $y=-(|x|+1)$ (y⩽0)

或 $x=|y|+1$（x⩾0）或 $x=-|y|-1$ (x⩽0)

图象如图所示即 $y\pm x=1$ 或 $y\pm x=-1$ 表示四条直线

405、设 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0(A,B$不全为$0)$，的距离为 d

推出公式 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ （不用向量法或是垂直法.而用点到点距离公式去推.）(拓广阅读)

推导：$P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 上任意一点的距离的最小值就是点 P 到直线 l 的距离。在 l 上取任意点 $Q(x,y)$，则

$|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0{}^2)$ （1） $Ax+By+C=0$ （2）

由于 $(A^2+B^2)|PQ|^2=(A^2+B^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0{}^2)]$

$=A^2(x-x_0)^2+B^2(y-y_0)^2+B^2(x-x_0)^2+A^2(y-y_0)^2$

$=[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2+[B(x-x_0)-A(y-y_0)]^2$

$=[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2+[B(x-x_0)-A(y-y_0)]^2$

$=(Ax+Bx-Ax_0-By_0)^2+(Bx-Ay-Bx_0+Ay_0)^2$

$=(-Ax_0-By_0-C)^2+(Bx-Ay-Bx_0+Ay_0)^2$

$\geq(Ax_0+By_0+C)^2$

故 $|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0{}^2)\geq\dfrac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$

当且仅当 $Bx-Ay-Bx_0+Ay_0=0$ 且 $Ax+By+C=0$ 时取等号

所以当 $d=|PQ|$ 最小$=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

438、已知点 B（2，1），在直线 y=x 及 x 轴上各找一点，使三点构成的三角形周长最小

解：

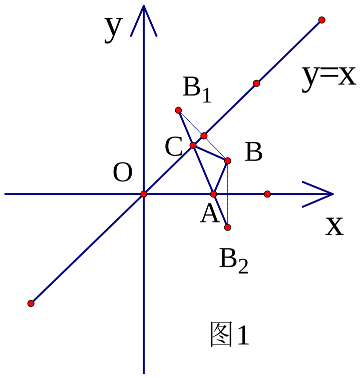


图1

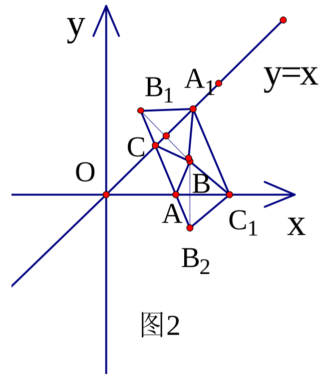
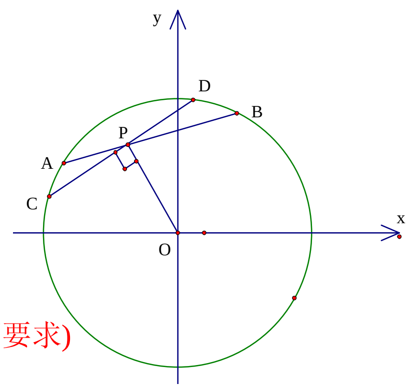


图2

图 1 是作法

图 2 是证明

444、圆 $x^2+y^2=9$ 内有一点 $\boldsymbol{P(-1,2)}$,过 P 点的直线交圆于 A，B 两点，求 $PA\cdot PB$ 的值(好题)



解：作弦 CD $\perp$ OP

则 $PC=PD=\sqrt{r^2-OP^2}=\sqrt{9-5}=2$

故 $PA\bullet PB=PC\bullet PD=4$

449、直线 3x+3y+8=0 到

直线 xsinα +ycosα +1=0($\frac{p}{4}<a<\frac{p}{2}$)的角是? (高考不要求)

解：　因直线 3x+3y+8=0 的倾斜角为 $\frac{3p}{4}$

直线 xsinα +ycosα +1=0(π /4 < α < π /2)的倾斜角为 $p-a$

故设直线 3x+3y+8=0 到直线 xsinα +ycosα　+1=0($\frac{p}{4}<a<\frac{p}{2}$)的角

$$q=p+p-a-\frac{3p}{4}=\frac{5p}{4}-a$$

458、讨论方程所表示的曲线 $x+y+\sqrt{x+y}+4t=0$ (解几)

解：设 $m=\sqrt{x+y}\geq 0$　则 $m^2-6m+4t=0$ （1）

当 $\Delta=36-16t\geq 0$ 即 $t\leq\frac{9}{4}$ 时方程（1）有实根

当 $0\leq t<\frac{9}{4}$ 时方程（1）有两个不同的非负实根，原方程表示两条射线

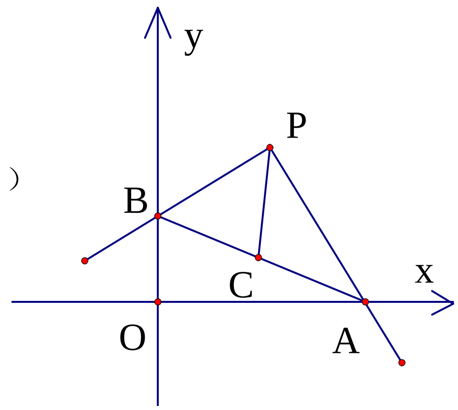
当 $t<0$ 时方程（1）的两根一正一负，原方程表示一条射线

$t=\frac{9}{4}$ 时方程（1）有两个相等的正根，原方程表示一条条射线

460、过点 P(6,8)作两条互相垂直的直线 PA,PB.分别交 x 正半轴于 A,y 正半轴于 B

(1)线段 AB 中点的轨迹方程

(2)若 S 三角形 AOB=S 三角形 PAB,求 PA,PB 所在方程(直线与圆)



解：(1)设 $PA: y-8=k(x-6)$（$k>\frac{4}{3}$,或$k<0$）

则 $PB: y-8=-\frac{1}{k}(x-6)$（$-\frac{1}{k}<\frac{4}{3}$）

故 $A(-\frac{8}{k}+6,0)$， $B(0,\frac{6}{k}+8)$（$k>\frac{4}{3}$,或$k<-\frac{3}{4}$）

设线段 AB 中点 C(x,y)

则 $\begin{cases} x=-\frac{4}{k}+3 \\ y=\frac{3}{k}+4 \end{cases}$ $(-\frac{4}{3}<\frac{1}{k}<\frac{3}{4},\text{且}\frac{1}{k}\neq 0)$

消 k 得 3x+4y-25=0（$0<x<\frac{25}{3}$）当 k 不存在时点 C(3,4)也适合方程

故线段 AB 中点的轨迹方程是 3x+4y-25=0（$0<x<\frac{25}{3}$）

解法 2、因 $\angle AOB=\angle APB=90°$ 故 $|CP|=|CO|$,且 C 点在第一象限上

$(x-6)^2+(y-8)^2=x^2+y^2$

即 $3x+4y-25=0$（$0<x<\frac{25}{3}$）为所求

（2）因 O,A,P,B\四点在以 AB 为直径的圆上，又 $S_{\Delta OAB}=S_{\Delta PAB}$

故 O,P 关于直径 AB 对称，或 OAPB 是矩形

当 O,P 关于直径 AB 对称时

直线 AB 的方程为 $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ 得 A($\frac{25}{3}$,0),B(0,$\frac{25}{4}$)

此时 PA 的方程为 $y=-\frac{24}{7}x+\frac{25}{3}$,

PB 的方程为 $y-\frac{25}{4}=\frac{7}{24}x$

当 OAPB 是矩形时 PA 的方程为 $x=6$, PB 的方程为 $y=8$

470、已知数列$\{a_n\}$是公差d不为零的数列前n项和为S_n

(1)求证$(1,S_1)$、$(2,\frac{S_2}{2})$、…、$(n,\frac{S_n}{n})$在一条直线上

(2) 过点$(1,a_1)$、$(2,a_2)$的直线为l_2，过点$(1,S_1)$、$(2,\frac{S_2}{2})$的直线为l_1，他们的夹角为a，求证：$\tan a \le \frac{\sqrt{2}}{4}$ (数列) (直线与圆)

证明(1)因为$\{a_n\}$是等差数列，公差为d,所以$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$

$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d$,因此，点$(n,\frac{S_n}{n})$（$n \in N_+$）在直线$y = a_1 + \frac{1}{2}(x-1)d$上

(2)由第 1 题知l_1的斜率$k_1 = \frac{1}{2}d$, l_2的斜率$k_2 = \frac{a_2 - a_1}{2-1} = d$

因此$\tan a = |\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}| = |\frac{d - \frac{1}{2}d}{1 + \frac{1}{2}d^2}| = \frac{|d|}{2 + d^2} = \frac{1}{\frac{2}{|d|} + |d|} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

476、已知直线l过点 P（1，2），且被两平行直线l_1：4x+3y+1=0 与l_2：4x+3y+6=0 截得的线段长为$\sqrt{2}$，求直线l的方程。(直线与圆) (高考不要求)

解：设直线l与直线l_1的夹角为a

l_1：4x+3y+1=0 与l_2：4x+3y+6=0 的距离是

$d = \frac{5}{5} = 1$，直线l被l_1与l_2截得的线段长$\sqrt{2}$

因此$a = 45°$　设直线l的斜率为k，则

$\tan a = |\frac{k - (-\frac{4}{3})}{1 + (-\frac{4}{3})k}| = 1$，$k = 7$或$k = -\frac{1}{7}$

因此直线l的方程是$y - 2 = 7(x-1)$或$y - 2 = -\frac{1}{7}(x-1)$

即$7x - y - 5 = 0$或$x + 7y - 15 = 0$

525、 已知函数 y=asinx+2bcosx 的图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{3}{4}p$ ，求直线 ax+by+1=0 与 3x+y-1=0 的夹角大小为________ (三角)(解几) (高考不要求)

解：因为 y=asinx+2bcosx 的图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{3}{4}p$

所以当 $x=\frac{3}{4}p$ 时 y 取最大值或最小值

因此 asin$\frac{3}{4}p$ +2bcos$\frac{3}{4}p$ $=\pm\sqrt{a^2+4b^2}$， $\frac{\sqrt{2}}{2}$（a-2b）$=\pm\sqrt{a^2+4b^2}$

两边平方得：$(a-2b)^2=2(a^2+4b^2)$，$(a+2b)^2=0$，$a=-2b$

直线 ax+by+1=0 的斜率 $k_1=-\frac{a}{b}=2$

直线 3x+y-1=0 的斜率 $k_2=-3$，设两线夹角为 q

于是 $\tan q=|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|=1$，因此 $q=45°$

555、设 $3x-4y+4=0$,

求 $d=\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}+\sqrt{x^2+y^2-4x-30y+229}$ 的最小值.

(直线与圆) (竞赛)

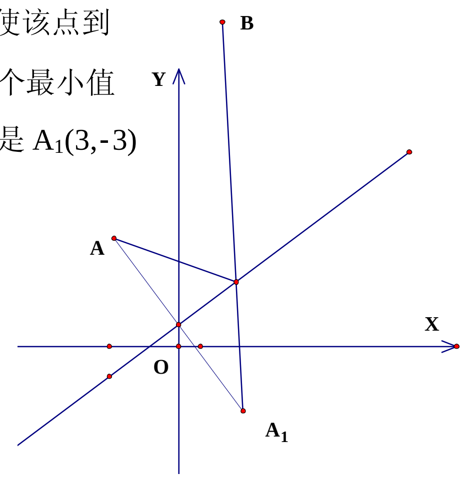
解：$d=\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}+\sqrt{x^2+y^2-4x-30y+229}$

$=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-15)^2}$

因此,本题就是在直线 $3x-4y+4=0$ 上找一点使该点到 A(-3,5)和 B(2,15)的距离之和最小，并求出这个最小值

因为 A(-3,5)关于直线 $3x-4y+4=0$ 的对称点是 $A_1(3,-3)$

所以 d 最小值$=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$



579、问题：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ (λ 是参数)

似乎并非直线上所有的点的坐标都满足这个方程，比如点（x2,y2）就是一例。但是高中教学参考用书（人教版）给出的直线参数方程确实是这个，其他资料上也是这样。哪位老师能给我解释一下？

答：应该要这样说(直线与圆) (高考不要求)

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，直线 AB (除去 B 点)的参数方程是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} (\lambda \text{ 是参数})$$

649、已知圆 M；$2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$，直线 l：$x+y-9=0$，过直线上上一点 A 作 ΔABC，使 $\angle BAC=45°$，边 AB 过圆心 M，且 B、C 在圆上，求点 A 的横坐标的取值范围。(直线与圆) (竞赛)

解：直线 $x+y-9=0$（1）

圆 M；$(x-2)^2+(y-2)^2=\dfrac{17}{2}$（2）

A 点对圆 M 的动直径 BC，的张角为 45°，故 A 点的轨迹是以 BC 弧的中点 D 为圆心以|DA|=$\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{17}{2}}=\sqrt{17}$ 为半径的优弧 BC，

优弧 BC 与直线（1）的交点，即为 A 点

成为优弧 BC 与直线（1）交点的充要条件是直线（1）上的点在优弧 BC 簇的外包线内部

优弧 BC 簇的外包线是以（2，2）为圆心以 $\sqrt{\dfrac{17}{2}}+\sqrt{17}=\sqrt{17}(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 为半径的圆。其方程是 $(x-2)^2+(y-2)^2=[\sqrt{17}(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})]^2$（3）

直线 $x+y-9=0$（1）被圆（3）截下的弦长为

$d=2[17(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2-(\dfrac{5}{\sqrt{2}})^2]^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{13+17\sqrt{2}}$，其在 x 轴上的投影长为

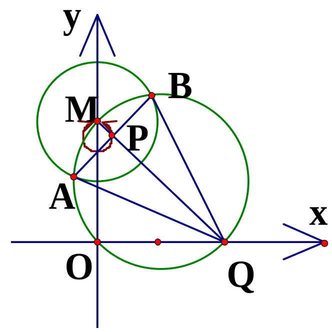
$2\sqrt{13+17\sqrt{2}}\cos 45°=\sqrt{26+34\sqrt{2}}$，

弦点的横坐标为 $\dfrac{9}{2}$，于是 A 点的横坐标的范围是

$[\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{26+34\sqrt{2}}，\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{26+34\sqrt{2}}]$

801、如图，已知圆 M：$x^2+(y-2)^2=1$，Q 是 x 轴上的动点，QA、QB 分别切⊙M 于 A、B 两点。求动弦 AB 的中点 P 的轨迹方程 (直线与圆)

解：设 $Q(x_0,0)$，已知圆的圆心 M(0,2)则



动弦 AB 的方程是：$xx_0+(-2)(y-2)=1$（1）

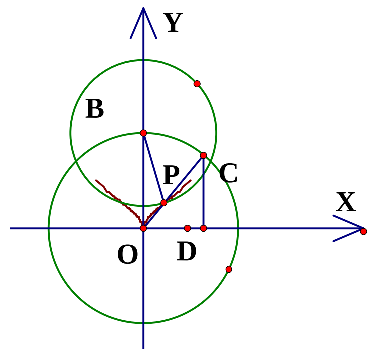
直线 MQ 的方程是 $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{2}=1$（2）

由（1）（2）消去 x_0 得 $x^2=(2y-3)(1-\frac{y}{2})$

$x^2+(y-\frac{7}{4})^2=\frac{1}{4}$ 为所求

823、P 是圆 $x^2+y^2=1$ 的半径 OC 上一点,CD 垂直于 x 轴,D 为垂足,B(0,1).若|BP|=|CD|,求动点 P 的轨迹方程.

解： 设 $C(x_0,y_0)$, $P(x,y)$



${x_0}^2+{y_0}^2=1$①，$\frac{y}{x}=\frac{y_0}{x_0}$②，$x^2+(y-1)^2={y_0}^2$ ③

由①②得 ${y_0}^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 代入③得

$(x^2+y^2)[x^2+(y-1)^2]=y^2$ 为方程的曲线在已知圆内部的部分为所求的轨迹

826、过点 K(2，1)做直线 l 交 x、y 轴正半轴与 A、B 两点，当|KA||KB|取到最小值时，求直线 l 的方程。(直线与圆) (不等式)

解：设直线 l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,b>0)$

则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，$\frac{a-2}{a}=\frac{1}{b}$，$b=\frac{a}{a-2}$ 故 $a>2$

（|KA||KB|）^{2}＝$[(a-2)^2+1][4+(b-1)^2]=[(a-2)^2+1][4+(\frac{2}{a-2})^2]$

＝$4[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}]+8\ge 8\sqrt{(a-2)^2\bullet\frac{1}{(a-2)^2}}+8=16$

当且仅当 $a=3$ 时上式取等号，此时|KA||KB|取到最小值

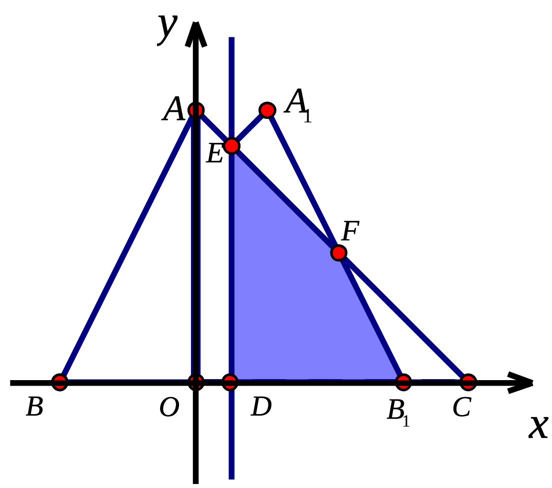
$a=3$，直线 l 的方程是 $x+y-3=0$

1158、(竞赛)

边长为 $\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt{2}$ 的三角形纸片沿垂直于 $\frac{3}{2}$ 的边方向折叠，问最大重叠面积？

解：用解析法，$|OC|=|OA|=1$，$|OB|=\frac{1}{2}$

设 $D(m,0)$，$ED: x=m$，$AC: y=-x+1$，$A_1(2m,1)$，$B_1(2m+\frac{1}{2},0)$



$AB: y=2x+1$，　$A_1B_1: y=2(2m-x)+1$

由 $x=m$与$y=-x+1$得$E(m,1-m)$

由 $y=2(2m-x)+1$与$y=-x+1$得$F(4m,1-4m)$

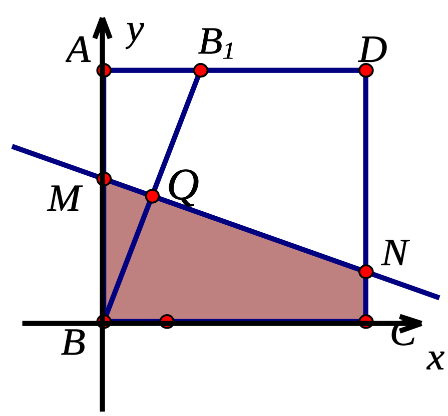
于是重叠面积

$$S=\frac{1}{2}(1-m)(4m-m)+\frac{1}{2}(2m+\frac{1}{2}-m)(1-4m)$$
$$=\frac{3}{2}m(1-m)+\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})(1-4m)$$
$$=\frac{3}{2}m-\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m-2m^2+\frac{1}{4}-m$$
$$=-\frac{7}{2}m^2+m+\frac{1}{4}, \text{当}m=\frac{1}{7}\text{时}S_{\text{大}}=\frac{9}{28}$$

1160、(竞赛)

把一张边长为 a 的正方形纸片 ABCD 折叠，使 B 落在 AD 上，若要使折起部分的面积最小，则 B 落在 AD 的_______位置上，且面积为_________.

解：如图建立坐标系，设 B 落到 $B_1(m,a)(0<m<a)$



则 $Q(\frac{m}{2},\frac{a}{2})$，$K_{BB_1}=\frac{a}{m}$, $K_{\text{折线}}=-\frac{m}{a}$,

折线方程 $y=-\frac{m}{a}(x-\frac{a}{2})+\frac{m}{2}$(1)

在(1)中令 $y=0$ 得 $x=\frac{a^2}{2m}+\frac{m}{2}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4}}=a$，于是

折线与 C $M(0,\frac{m^2}{2a}+\frac{a}{2}), N(a,\frac{m^2}{2a}+\frac{a}{2}-m)$

于是 折起部分的面积 $S=\frac{1}{2}a(\frac{m^2}{a}-m+a)$

因此当 $m=\frac{a}{2}$时，$S_{\min}=\frac{3}{8}a^2$

1193、(直线与圆)

已知 $P(t,t)$，$t \in R$，点 M 是圆 $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ 上的动点，点 N 是圆

$(x-2)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上的动点，则 $|PN|-|PM|$ 的最大值是(　　)

A、$\sqrt{5}-1$　B、$\sqrt{5}$　C、1　D、2

解：如图(1)，$|PN|-|PM|=|PN|-|PM'|\le|NM'|\le|AB|=2$，

如图（2）P 与原点重合，M'与A重合，N与B重合，上式取到"＝"号

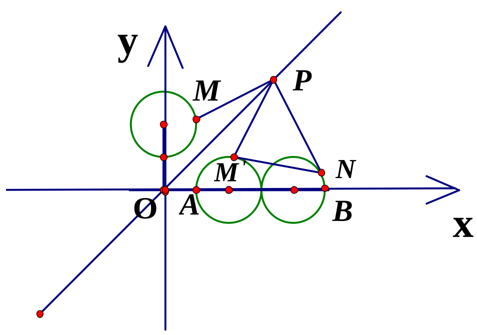


图 1

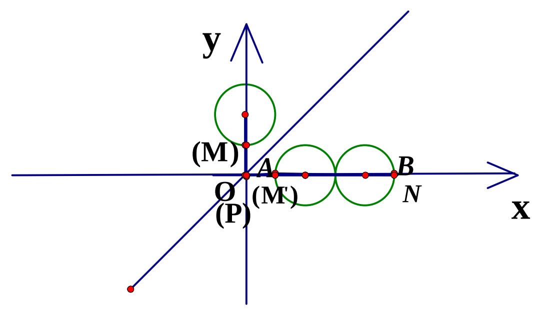


图 2

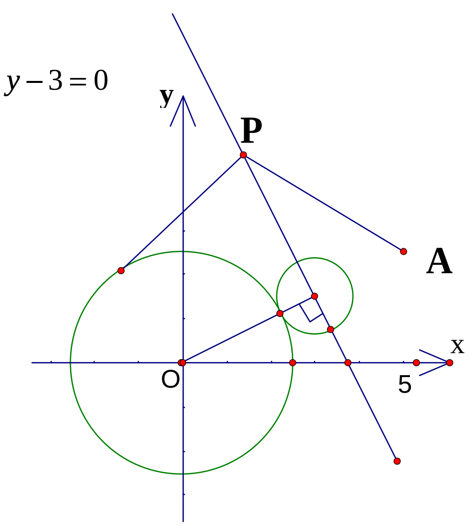
1249、(直线与圆) (竞赛)

已知圆 $O: x^2+y^2=1$ 和定点 $A(2,1)$，由圆 O 外一点 $P(a,b)$，向圆 O 引切线 PQ，切点为 Q，且满足 $|PQ|=|PA|$，若以 P 为圆心所做的圆与圆 O 有公共点，试求半径取最小值时圆 P 的方程。

解：$|PQ|=|PA|$ 则 $a^2+b^2-1=(a-2)^2+(b-1)^2$

即 $2a+b-3=0$，于是 $P(a,b)$ 的轨迹是直线 $2x+y-3=0$

如图



以 $P(a,b)$ 为圆心的圆与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点且半径最小,则

最小半径＝$\frac{|-3|}{\sqrt{5}}-1=\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$，

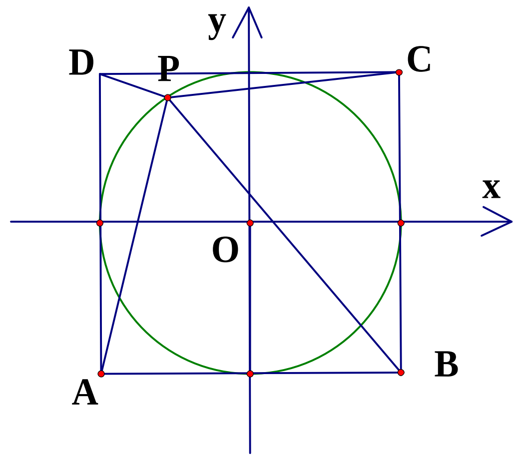
圆心为（0，0）在直线 $2x+y-3=0$ 上的射影 $(\frac{6}{5},\frac{3}{5})$

所求圆的方程是 $(x-\frac{6}{5})^2+(y-\frac{3}{5})^2=(\frac{3\sqrt{5}}{5}-1)^2$

1284、(直线与圆) (高考不要求)

已知：一圆内切于正方形 ABCD，点 P 为圆上的动点

求证：$\tan^2 \angle BPD + \tan^2 \angle APC = 8$



证明：如图建立，直角坐标系，

设正方形的边长为 2，$P(x,y)$

则 $x^2+y^2=1$，

$A(-1,-1), B(1,-1), C(1,1), D(-1,1)$

$k_{PB}=\frac{y+1}{x-1}$，$k_{PD}=\frac{y-1}{x+1}$

于是 $\tan^2 \angle BPD=\left(\frac{\frac{y+1}{x-1}-\frac{y-1}{x+1}}{1+\frac{y+1}{x-1}\bullet\frac{y-1}{x+1}}\right)^2=\left(\frac{2x+2y}{x^2+y^2-2}\right)^2=4(x+y)^2$

同理 $\tan^2 \angle APC=4(x-y)^2$，故

$\tan^2 \angle BPD+\tan^2 \angle APC=4(x+y)^2+4(x-y)^2=8(x^2+y^2)=8$

1309

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13156

(1) 已知点 A(3,5)及直线 L:x-2y+2=0,试在 y 轴上找出一点 B，在 L 上找一点 C，使三角形 ABC 的周长最短，并求出其最短周长的值。

(2) 设在同一平面上的动点 P、Q 的坐标分别为（x,y），（X,Y）,并且坐标之间存在关系 X=3x+2y-1,Y=3x-2y+1,当动点 P 在不平行坐标轴的直线 L 上移动时，动点 Q 在与这条直线 L 垂直且通过点（2，1）的直线上移动，求直线 L 的方程。

解(1)分别求出找出 A(3,5)关于 L：:x-2y+2=0,和 y 轴的对称点 M\、N 连 M、N 分别与直线 L 和 y 轴交于 B 点和 C 点

为所求，BC 的距离为最小距离

（2）设 P 点的直线方程为：x+Ay+B=0①

设 Q 点的直线方程为：AX-Y+C=0②

则点的直线方程为：A（3x+2y-1）-（3x-2y+1）+C=0③

（2，1）代入②得一 A、C 的方程

②③重合得 A、B、C 的两个方程，就可解出 A、B、C 了

1429

已知 $x^4+y^2=1$ 的图象为 C，给出以下结论：

①C 关于 x 轴对称②C 关于 y 轴对称③C 是封闭图形，且面积大于 p ④C 是封闭图形，且面积小于 p

以上说法正确的是序号是_________

解：把 $x^4+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 对照

当 x 一样时 $x^4\le x^2$，于是前一个方程的 $y^2\ge$ 后一个方程中的 y^2，因 $x^2+y^2=1$ 围成的面积为 p

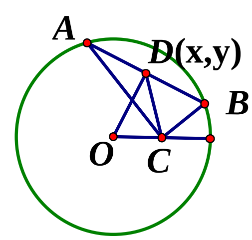
故 $x^4+y^2=1$ 围成的面积大于 p

故④不对，填①②③

1481、

http://bbs.pep.com.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=2930517

设点 A,B 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的两点，C(1,0) ，如果 $\angle ACB=90°$, 求线段 AB 长的取值范围。



解：设弦 AB 中点 D(x,y)，$|DC|=\frac{1}{2}|AB|$

则 $(\frac{|AB|}{2})^2+|DO|^2=R^2, |DC|^2+|DO|^2=R^2$

$(x-1)^2+y^2+x^2+y^2=4, 2x^2+2y^2-2x=3$

$x^2+y^2-x=\frac{3}{2}, (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{7}{4}, y^2=\frac{3}{2}-x^2+x$

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\le x\le\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$

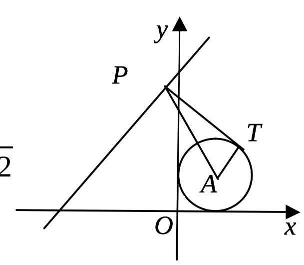
$|DC|^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+\frac{3}{2}-x^2+x$

$=-x+\frac{5}{2}\in[2-\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\frac{\sqrt{7}}{2}]$

$|DC|\in[\frac{\sqrt{7}-1}{2}, \frac{\sqrt{7}+1}{2}], |\mathrm{AB}|=2|DC|\in[\sqrt{7}-1, \sqrt{7}+1]$

1482、圆中的最值举例

例 1、动点 P 在直线 y=x+4 上，过 P 作圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的切线切点是 T，则|PT|的最小值=_____

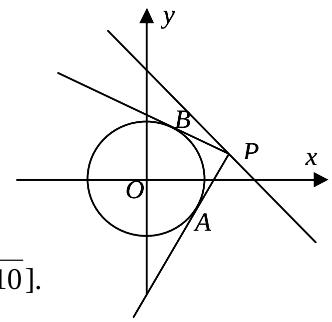


解：$|PT|^2=|PA|^2-1$

|PA|最小=A(1,1)到 x- y+4=0 的距离 d=$\frac{|1-1+4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

|PT|最小=$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7}$

例 2、已知直线 $x+y-m=0$ 存在点 P，由点 P 向圆 O: $x^2+y^2=10$ 引两条切线 PA,PB，使得 $PA\perp PB$,求实数 m 的取值范围.



解： $OP=\sqrt{2}r=2\sqrt{5}$.

要存在 P 满足条件，则 $d\le 2\sqrt{5}$.

$\therefore d=\dfrac{|0+0-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}\le 2\sqrt{5}$, 即 $\therefore m\in[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$.

例 3、过点 P 作圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的切线，切点为 M，若 $|PM|=|PO|$（O 为原点），则 $|PM|$ 的最小值是(　　)　（A）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　（C）$\dfrac{3\sqrt{5}-5}{5}$　（D）1

解：$|PM|=|PO|$，设 $P(x,y)$,圆心 C(-1,2)

$(x+1)^2+(y-2)^2-1=x^2+y^2, 2x-4y+4=0, x-2y+2=0$ 为 P 点的轨迹方程

$|PM|$ 最小就是 $|PO|$ 最小。于是 $|PO|_{\min}=d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

例 4、已知 AC、BD 为圆 O:x²+y²=4 的两条互相垂直的弦,垂足为 M(1,根号 2)则四边形 ABCD 的面积最大值为______

解 1：设圆心 O 到弦 AC，BD 的距离分别为 $d_1,d_2(d_1,d_2\ge 0)$,

则 $d_1^2+d_2^2=OM^2=3$.

于是 $AC=2\sqrt{4-d_1^2}, BD=2\sqrt{4-d_2^2}$,

$$所以 S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{4-d_1^2}\times 2\sqrt{4-d_2^2}=2\sqrt{4+d_1^2d_2^2}$$

$$\le 2\sqrt{4+(\frac{d_1^2+d_2^2}{2})^2}=2\sqrt{4+(\frac{3}{2})^2}=5$$

$$解2: AC^2+BD^2=(2\sqrt{4-d_1^2})^2+(2\sqrt{4-d_2^2})^2$$

$$=4(4-d_2^2+4-d_2^2)=4(8-3)=20$$

于是 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\times BD=\dfrac{1}{4}\times 2AC\times BD\le\dfrac{1}{4}(AC^2+BD^2)=5$

思考：求 $AC+BD$ 的最大值.

解： 设圆心 O 到弦 AC，BD 的距离分别为 $d_1,d_2(d_1,d_2\ge 0)$,

且 $d_1^2+d_2^2=OM^2=3$.

于是 $AC=2\sqrt{4-d_1^{\ 2}}, BD=2\sqrt{4-d_2^{\ 2}}$,

所以 $AC+BD=2\sqrt{4-d_1^{\ 2}}+2\sqrt{4-d_2^{\ 2}}$,

则 $(AC+BD)^2=4(4-d_1^{\ 2}+4-d_2^{\ 2}+2\sqrt{4-d_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{4-d_2^{\ 2}})$

$=4(5+2\sqrt{4+d_1^{\ 2}d_2^{\ 2}})\le 4[5+2\sqrt{4+(\dfrac{d_1^{\ 2}+d_2^{\ 2}}{2})^2}]=20$

当且仅当 $d_1^{\ 2}=d_2^{\ 2}=\dfrac{3}{2}$ 时取等号. $AC+BD$ 的最大值为 $2\sqrt{10}$.