廖老师网上千题解答分类十五、大纲不等式

29、已知 a>0，b>0，c>0，求证$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

证 1：因 a>b>c　　故$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{a^2}=2a$

同理$\frac{b^2}{c}+c>2b$，$\frac{c^2}{a}+a>2c$，三式相加，移项后就行了

证 2、因$\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$，$\frac{b^2}{c}\ge 2b-c$，$\frac{c^2}{a}>2c-a$

故$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c$

49、若x,y Î R^+ 且$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，则$x\sqrt{1+y^2}$的最大值为______

解：由公式$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$得

$$x\sqrt{1+y^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}x\sqrt{1+y^2})\le\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{2x^2+1+y^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{2+1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当$\sqrt{2}x=\sqrt{1+y^2}$ 即$x=\frac{\sqrt{3}}{2},y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时上式取等号

故$x\sqrt{1+y^2}$的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

66、.已知 a、b 均为正数,n∈N*.求证:$(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$

证明　$2(a^{n+1}+b^{n+1})$ -（$(a+b)(a^n+b^n)=a^{n+1}+b^{n+1}-a\,b^n-b\,a^n=a^n(a-b)+b^n(b-a)$

$=(a-b)(a^n-b^n)$

∵a、b 均为正数, n∈N*

∴$(a-b)$与(a^n-b^n)同号或都为 0，即$(a-b)(a^n-b^n)\geqslant 0$

故原式成立

67、设实数 x、y 满足 $y+x^2=0$,且 $0<a<1$,求证：$\log(a^x+a^y)<1/8+\log_a 2$

证：$a^x+a^y \ge 2\sqrt{a^x a^y}=2\sqrt{a^{x+y}}=2\sqrt{a^{x-x^2}}$

$\because 0<a<1$

$\therefore \log_a(a^x+a^y)\le \frac{1}{2}(x-x^2)+\log_a 2=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}+\log_a 2\le \frac{1}{8}+\log_a 2$

72、已知 a，b>0，a+b=1,求证：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\ge \frac{25}{4}$

证明：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ab+\frac{1}{ab}+2$

由于　$f(x)=x+\frac{1}{x}$在（0，$\frac{1}{4}$]上递减，$ab\le(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$

故$ab+\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\ge\frac{17}{4}+2=\frac{25}{4}$

74、已知：$(a+b)(a^2+b^2-1)=2$且$a>0,b>0$，求证：$a+b\le 2$

证法 1 反证法：假设$a+b>2$　则

$(a+b)(a^2+b^2-1)\ge(a+b)[\frac{1}{2}(a+b)^2-1]$

$>2(\frac{1}{2}\times 2^2-1)=2$与已知矛盾

证法 2：设$a+b=x$　则

$\because (a+b)(a^2+b^2-1)=2$

$\therefore a^2+b^2=\frac{2}{x}+1$

$\because a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$

$\therefore \frac{2}{x}+1\ge\frac{1}{2}x^2$

$(x-2)(x^2+2x+2)\le 0$

$\because x^2+2x+2>0$

$\therefore x-2\le 0$即$a+b\le 2$

75、设 a、b 均为正数，求证：$\sqrt{2}$ 在 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$

证明：$(\sqrt{2}-\frac{a}{b})(\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b})=\frac{\sqrt{2}b-a}{b}\bullet\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{2}b-a-2b}{a+b}$

$=\frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}b-a)^2}{b(a+b)}\leq 0$

$\therefore\sqrt{2}$ 在 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$

76、已知 $a>1$，求证 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

证明 $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$

$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=\frac{-2}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})}<0$

故原式成立

77、某厂值第二年比第一年增长 P%，第三年比第二年增长 q%，又这两年的平均增长率为 S%，则 S 与 $\frac{p+q}{2}$ 的大小

解：$\because (1+p\%)(1+q\%)=(1+s\%)^2$

$(1+p\%)(1+q\%)\leq(\frac{1+p\%+1+q\%}{2})^2$

$\therefore (1+s\%)^2\leq(1+\frac{p\%+q\%}{2})^2$

$\therefore 1+s\%\leq 1+\frac{p\%+q\%}{2}$,， $s\leq\frac{p+q}{2}$

78．已知 x 小于 $\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

解：由 $x<\frac{5}{4}$ 得 $5-4x>0$

$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3==-(5-4x+\frac{1}{5-4x})+3$

$\leq -2\sqrt{(5-4x)(\frac{1}{5-4x})}+3=1$

当且仅当 $x=1$ 时上式取等号，故当 $x=1$ 时 y 取最大值 1

81、在某两个正数 x、y 之间，若插入一个正数 a，使 x、a、y 成等比数列，若另插入两个正数 b、c，使 x、b、c、y 成等差数列。

求证：$(a+1)^2 \le (b+1)(c+1)$

证 1 $\because x,b,c,y$ 成等差数列

$\therefore$ 可设$b＝x+d, c=x+2d, y=x+3d$， d 为公差

$\because x,a,y$ 成等比数列

$\therefore a=\sqrt{xy}=\sqrt{x(x+3d)}$

$\therefore$ $(b+1)(c+1)-(a+1)^2=$ $(x+d+1)(x+2d+1)-(\sqrt{x(x+3d)}+1)^2$

$=2d^2+x+(x+3d)-2\sqrt{x(x+3d)} \geq d^2+2\sqrt{x(x+3d)}-2\sqrt{x(x+3d)}＝d^2>0$

证 2 $\because$ 正数x,b,c,y 成等差数列

$\therefore$ $x+y=b+c, bc＝(x+d)(x+2d)=x^2+3dx+2d^2=x(x+3d)+2d^2>xy$

$\therefore$ $(b+1)(c+1)=ab+a+b+1 \geq xy+x+y+1=xy+2\sqrt{xy}+1=a^2+2a+1=(a+1)^2$

93、比较$a^2+b^2+c^2$与$ab+bc+ac$的大小

解：$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)＝(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

94、已知 a>0,b>0,c>0,且 a+b+c=1

求满足不等式$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<k$的最小整数 k 的值.

解： $(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1})^2 \le 3[(\sqrt{4a+1})^2+(\sqrt{4b+1})^2+(\sqrt{4c+1})^2]$

＝3（4+3）＝21

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4a+1}+\sqrt{4a+1} \leq \sqrt{21}$

k$>\sqrt{21}$，最小整数 k 的值是 5

98、若 x>0,y>0,且$\sqrt{x+y} \leq a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$)成立，求 a 的最小值

解：$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \leq 2[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2]=2(x+y)$

$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

由$\sqrt{x+y} \leq a(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

得$a \geq \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{2(x+y)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a 的最小值是$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，在$x=y>0$时取到最小值

103、已知实数a,b,c满足$a+b+c=5, a^2+b^2+c^2=9$，求证a,b,c都不小于1，又都不大于$\frac{7}{3}$

证：$a+b=5-c \quad \therefore a^2+b^2=9-c^2$

$\because a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$

$\therefore 9-c^2 \geq \frac{1}{2}(5-c)^2$

解得：$1 \leq c \leq \frac{7}{3}$

同理可证$1 \leq 5 \leq \frac{7}{3}$，$1 \leq b \leq \frac{7}{3}$

114、设a,b是不相等的两正数且$a^3-b^3=a^2-b^2$，则$a+b$的取值范围是多少?

证：设$a+b=x$ 则

$\because (a-b)(a^2+b^2+ab)=(a+b)\ (a-b)$，$a \neq b$

$\therefore (a+b)^2-ab=a+b$，$ab=x^2-x$

$\because ab<\frac{1}{4}(a+b)^2 \therefore x^2-x<\frac{1}{4}x^2$，$0<x<\frac{4}{3}$

121、已知 x、y、z 是正实数，又 xyz (x+y+z)=1，求(x+y)(y+z)的最小值。(联赛)

解：设 t=(x+y)(y+z)$=y^2+(x+z)y+xz$

则$y^2+(x+z)y=t-xz$

$xyz(x+y+z)=1$化为$xz[y^2+(x+z)y]=1$

即$xz[t-xz]=1$，$t=xz+\frac{1}{xz} \geq 2$

131、证明不等式 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ (n∈N+)

证明：当 n=1 时原式成立

当 n≥2 时$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{2\sqrt{n}}$

$<1+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$=1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2\sqrt{n}-1<2\sqrt{n}$

综上原式成立

144、若 $a^3+b^3=2$，求证　a+b≤2

证明：用反证法

假设 a+b>2,则 $a^3+b^3>2(a^2+b^2-ab)\geq 2[\frac{(a+b)^2}{2}-(\frac{a+b}{2})^2]=\frac{(a+b)^2}{2}>2$

与 $a^3+b^3=2$ 相矛盾

145、已知 $a>2,b>2$，求证 $a+b<ab$

证明 ab-a-b+1=(a-1)(b-1)>1

149、设函数 f(x)=丨2ax+b丨(a,b 是实常数)的定义域是(-1,1),如果对于定义域内的每一个 x,都有 f(x)<1,那么丨a丨+丨b丨<1.

(1)证明上述命题;

(2)写出上述命题的逆命题,若逆命题正确,请加以证明;若逆命题错误,请举一个反例加以说明.

证明：（1）

当 ab＝0 时易证丨a丨+丨b丨<1

当 ab＞0 时|2a|+|b|＝|2a+b|≤1，|a|+|b|≤1-|a|<1

当 ab＜0 时|2a|+|b|＝|2a-b|≤1，|a|+|b|≤1-|a|<1

（2）逆命题是：设函数 f(x)=丨2ax+b丨(a,b 是实常数)的定义域是(-1,1),

如果丨a丨+丨b丨<1.，那么，对于定义域内的每一个 x,都有 f(x)<1,

这是一个假命题

取 $a=0.9$，b＝0.1

f(x)=| 1.8x+0.1|，f(0.6)>1

159、已知 $a,b,c\in R^+$，求证：$\lg\frac{c}{a}\lg\frac{c}{b}\geq\lg\sqrt{\frac{a}{b}}\lg\sqrt{\frac{b}{a}}$

解：因为 x=1 是方程 $(\lg c-\lg a)x^2+(\lg a-\lg b)x+(\lg b-\lg c)=0$ 的根

故 $\Delta=(\lg a-\lg b)^2-4(\lg c-\lg a)(\lg b-\lg c)\geq 0$

$\frac{1}{4}\lg\frac{a}{b}\lg\frac{a}{b}-\lg\frac{c}{a}\lg\frac{b}{c}\geq 0\Rightarrow\lg\frac{c}{a}\lg\frac{c}{b}\geq\lg\sqrt{\frac{a}{b}}\lg\sqrt{\frac{b}{a}}$，故得原式

180 、设 m 等于 $|a|$ ，$|b|$，1中最大的一个，当 $|x|>m$ 时，求证 $|\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}|<2$

证明：　$|x|>m$，$|a|\leq m$ ，$|b|\leq m$，$1\leq m$

$|\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}|\leq|\frac{a}{x}|+|\frac{b}{x^2}|<\frac{|a|}{m}+\frac{|b|}{m^2}\leq\frac{m}{m}+\frac{m}{m^2}=\frac{m}{m}+\frac{m\bullet 1}{m^2}\leq\frac{m}{m}+\frac{m\bullet m}{m^2}=2$

181、已知 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求证：当 $a\neq b$ 时 $|f(a)-f(b)|<|a-b|$

证明：由于 $a\neq b$，故

①当 $a=-b$ 时 $|f(a)-f(b)|=0<|a-b|$

②当 $a\neq -b$ 时 $|f(a)-f(b)|=|\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1}|=\dfrac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}}<$

$$\frac{|a+b||a-b|}{\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}}=\frac{|a+b||a-b|}{|a|+|b|}\leq\frac{(|a|+|b|)|a-b|}{|a|+|b|}=|a-b|$$

184、已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证: $(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)>16abc$

证明：因 a,b,c 是正数

故 $(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)$

$=(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geq 2\sqrt{a}\bullet 2\sqrt{b}\bullet 2\sqrt{ac}\bullet 2\sqrt{bc}=16abc$

取等号条件是 $a=b=c$

因 a,b,c 不全相等，故 $(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)>16abc$

185、已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证:

$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

证明：因 a,b,c 是正数

故 $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geq(a+b)(2ab-ab)=(a+b)ab=a^2b+b^2a$

同理 $b^3+c^3\geq b^2c+c^2b$， $c^3+a^3\geq c^2a+a^2c$

三个不等式同时取等号的条件是 $a=b=c$

而 a,b,c 是不全

因此，（a^3+b^3）+（a^3+b^3）+（a^3+b^3） $>a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c$

所以 $2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

192、已知 1 £ x^2+y^2 £ 2，求证： $\dfrac{1}{2}$ £ x^2+y^2+xy £ 3

证明： $-\dfrac{x^2+y^2}{2}\leq xy\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$

故 $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}\leq x^2+y^2+xy\leq\dfrac{3(x^2+y^2)}{2}\leq 3$

196、已知 a,b,c Î R^+，求证： $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{a^2}{a}$ ³ $a+b+c$

证明： $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{a^2}{a}+a+b+c\geq 2\sqrt{a^2}+2\sqrt{b^2}+2\sqrt{c^2}=2a+2b+2c$

故 $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{a^2}{a}\geq a+b+c$

197、已知$a,b \in R^{+}$，$ab-(a+b)\geq 1$，那么(　　)

A、$a+b \geq 2\sqrt{2}+2$　B、$a+b \geq \sqrt{2}+1$　C、$a-b \leq (\sqrt{2}+1)^2$　D、$a+b>2\sqrt{2}+2$

解：$ab-(a+b)\geq 1$

$ab-(a+b)+1\geq 2$

$(a-1)(b-1)\geq 2$

$a-1>0, b-1>0$，$a\geq \frac{2}{b-1}+1$，$a+b\geq \frac{2}{b-1}+b-1+2\geq 2\sqrt{2}+2$

选 A

198、若$-1<a<b<1$，$-2<c<3$，则$\frac{a-b}{c^2}\in$ ______

解：

$-1<a<b<1 \Rightarrow 2>b-a>0$

$-2<c<3 \Rightarrow 0\leq c^2<9$，$\frac{a-b}{c^2}$有意义$\Rightarrow c\neq 0$

故$0<c^2<9 \Rightarrow \frac{1}{c^2}>\frac{1}{9}$

$\frac{b-a}{c^2}>0$，$\frac{a-b}{c^2}\in(-\infty,0)$

205、周长为 L（ L 为定值）的直角三角形，求直角三角形的最大面积。

解：设三边长为$a,b,\sqrt{a^2+b^2}$则$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=L$

$\because a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=$（$2+\sqrt{2}$）$\sqrt{ab}$

$\therefore L\geq$（$2+\sqrt{2}$）$\sqrt{ab}$

$ab\leq \frac{L^2}{(2+\sqrt{2})^2}$，因此面积的最大值是$\frac{L^2}{2(2+\sqrt{2})^2}$

当$a=b$时取到最大值

216、设$f(x)=\frac{2^{x+4}}{4^x+8}$ (1)求$f(x)$的最大值(2)证明对任何实数a,b恒有$f(a)<b^2-3b+\frac{21}{4}$

解：(1)$f(x)=\frac{2^{x+4}}{4^x+8}=\frac{16}{2^x+\frac{8}{2^x}}\leq \frac{16}{2\sqrt{8}}$

当且仅当$x=\frac{3}{2}$时上式取等号，故$f(x)_{\max}=2\sqrt{2}$

（2）$b^2-b+\frac{21}{4}=(b-\frac{1}{2})^2+5\geq 5>2\sqrt{2}\geq f(a)$

231、已知实数 a,b,c 满足 a+b+c=0 和 $abc=2$，求证 a,b,c 中至少有一个不小于 2。
证明：不妨设 $a \geq b \geq c$
由于 a+b+c=0，故 a>0， c<0
又因为 $abc=2$，故 $a>0$， $c<0$， $b<0$
假设 $0<a<2$，则 $bc>1$①

$$bc=(-b)(-c) \leq (\frac{-b-c}{2})^2=(\frac{a}{2})^2<1②$$

① 与②相矛盾
故 $a \geq 2$
257、已知|a|<1，|b|<1，则|a+b|+|a-b|与 2 的大小关系为|a+b|+|a-b|___2
解：不妨设|a|≥|b|，
(1)当 a 与 b 同号
则|a+b|+|a-b|=|a|+|b|+|a|-|b|=2|a|
(1)当 a 与 b 异号
则|a+b|+|a-b|=|a|-|b|+|a|+|b|=2|a|
因|a|<1 故 2|a|<2
综上|a+b|+|a-b|<2

302 、已知： $x, y \hat{I} R^+$, x+y=1，求证： $2<(\frac{1}{x}-x)(\frac{1}{y}-y) \leq \frac{9}{4}$

证明：$(\frac{1}{x}-x)(\frac{1}{y}-y)=\frac{1-x^2}{x} \bullet \frac{1-y^2}{y}=\frac{(1+x)(1-x)}{x} \bullet \frac{(1+y)(1-y)}{y}$

$$=\frac{(1+x)y}{x} \bullet \frac{(1+y)x}{y}=1+x+y+xy=2+xy \leq 2+(\frac{x+y}{2})^2=\frac{9}{4}$$

$$(\frac{1}{x}-x)(\frac{1}{y}-y)=2+xy>2$$

322、若 M(x,y)在直线 $x+2y+1=0$ 上移动，则 2^x+4^y 的最小值=________

解：$2^x+4^y=2^x+2^{2y} \geq 2\sqrt{2^x 2^{2y}}=2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$

363、设 a,b,c 是正实数,求证：$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}<2$

证明：$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b+a}{b+c+a}+\frac{c+b}{a+c+b}=2$

389、求周长 t 的直角三角形面积的最大值

解：设三边长为 $a, b, \sqrt{a^2+b^2}$ 则 $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=t$

$\because$ $a+b+\sqrt{a^2+b^2} \ge 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}$ =（2+$\sqrt{2}$）$\sqrt{ab}$

$\therefore$ $t \ge$（2+$\sqrt{2}$）$\sqrt{ab}$

$ab \le \dfrac{t^2}{(2+\sqrt{2})^2}$，因此面积的最大值是 $\dfrac{t^2}{2(2+\sqrt{2})^2}$

当 $a=b$ 时取到最大值

390、已知 x>1,求函数 $y=x+\dfrac{9x}{x-1}$ 的值域

解：$y=x+\dfrac{9x}{x-1}=x+\dfrac{9(x-1)+9}{x-1}=x+\dfrac{9}{x-1}+9=x-1+\dfrac{9}{x-1}+10 \ge 2\sqrt{9}+10=16$

396、设 $f(x)=2x^2+1$ 且 a,b 同号 a+b=1

求证:对任意实数 p,q 恒有 af(x)+bf(q)≥f(ap+bq)成立.

证明：$af(p)+bf(q)-f(ap+bq)=a(2p^2+1)+b(2q^2+1)-2(ap+bq)^2-1$

$=2ap^2+2bq^2+a+b-2(ap+bq)^2-1=2a(a+b)p^2+2b(a+b)q^2-2(ap+bq)^2$

$=2abp^2+2baq^2-4abpq=2ab(p-q)^2 \ge 0$

411、已知：$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正实数，　$x_1x_2\cdots x_n=1$ 求证：$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 2^n$

证明：$1+x_1 \ge 2\sqrt{x_1}$，$1+x_2 \ge 2\sqrt{x_2}$，……，$1+x_n \ge 2\sqrt{x_n}$

相乘得 $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \ge 2^2\sqrt{x_1x_2\cdots x_n}=2^n$

419、已知：a、b、$c \in R_+$，x、y 大于0，且 $ax+by=c$，$ax^2+by^2=c$，则比较 $x+y$ 与 1 的大小(推理题)

解：（1）假设 $x+y=1$ 则

$ax+by=ax(x+y)+by(x+y)=ax^2+by^2+(a+b)xy=c+(a+b)xy$

又 $ax+by=c$，故 $c=c+(a+b)xy$，$(a+b)xy=0$ 题设矛盾

（2）假设 $x+y<1$ 则

$ax+by>ax(x+y)+by(x+y)=ax^2+by^2+(a+b)xy=c+(a+b)xy$

又 $ax+by=c$，故 $c>c+(a+b)xy$，$(a+b)xy<0$ 与题设矛盾,综上 $x+y>1$

427、已知$m,n,p \in R$，且$m^2+n^2-p^2=0$，求$\frac{m+n}{p}$的最大值

解：$(\frac{m+n}{p})^2=\frac{(m+n)^2}{p^2}\le\frac{2(m^2+n^2)}{p^2}=2$

故$-\sqrt{2}\le\frac{m+n}{p}\le\sqrt{2}$，$\frac{m+n}{p}$的最大值为$\sqrt{2}$

428、设$0<x<1$，a,b为常数，求$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$的最小值

解：$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x})[x+(1-x)]\ge(|a|+|b|)^2$

当且仅当$\frac{|a|}{\sqrt{x}}=\frac{|b|}{\sqrt{1-x}}$时等号成立

于是当$x=\frac{a^2}{a^2+b^2}$时$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$的最小值为$(|a|+|b|)^2$

429、已知a,b,c是ΔABC的三边，$M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$，$N=\frac{c}{c+1}$则（　）

A、$M>N$　B、$M<N$　C、$M\ge N$　D、$M\le N$

解1：$a+b>c$

$M-N=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}=\frac{abc+2ab+a+b-c}{(a+1)(b+1)(c+1)}>0$，故$M>N$

解2：$M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{a+b+1}=\frac{a+b}{a+b+1}$

$a+b>c\Rightarrow a+b-c>0$

故$N=\frac{c}{c+1}<\frac{c+a+b-c}{c+1+a+b-c}=\frac{a+b}{a+b+1}$　　故$M>N$

434、若$x^2-2mx+m+6=0$的两实根为a、b，求$y=(a-1)^2+(b-1)^2$的最小值

解：$4m^2-4(m+6)\ge0$，$m\le-2或m\ge3$

$a+b=2m$，$ab=m+6$，消 m 得$2ab=a+b+12$

y＝(a-1)^2+(b-1)^2＝$a^2+b^2-2a-2b+2=(a+b)^2-2ab-2(a+b)+2$

＝$4m^2-2(m+6)-4m+2=4m^2-6m-10=4(m-\frac{3}{4})^2-10-\frac{9}{4}$

故当$m=3$时，y 的最小值是 8

440、设二次函数 $f(x)=x^2+x+a\ (a>0)$ 满足 $f(m)<0$

请比较 $f(m+1)$ 与 0 的大小(好题)

解：因 $f(m)<0$

故 $f(x)=x^2+x+a$ 的图象与 x 轴有两个交点，

设为 $(x_1,0),(x_2,0)$, $x_1<m<x_2$

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$

两个交点之间的距离是 $|x_1-x_2|=\sqrt{1-4a}$

因 $a>0$ 故 $|x_1-x_2|=\sqrt{1-4a}<1$

故 $m+1>x_2$ ，于是 $f(m+1)>0$

453、设函数 f(x)=|lgx|,若 0<a<b,且 f(a)>f(b).
证明:ab<1.

证明：因 0<a<b,故 $0<\frac{a}{b}<1$，$\lg\frac{a}{b}<0$

f(a)>f(b) Þ |lga|>|lgb| Þ $|lga|^2-|lgb|^2>0$

又 $|lga|^2-|lgb|^2$＝（lga+lgb）（lga-lgb）＝（lgab）（$\lg\frac{a}{b}$）>0

因此 lgab<0，故 ab<1 (函数不等式) (好题)

509、实数 m、n、x、y，满足 $m^2+n^2=a,x^2+y^2=b$(a ¹ b),求 mx+ny 的最大值 (不等式)

解 1：设（mx+ny）$^2\le(m^2+n^2)(x^2+y^2)=ab$. 故 mx+ny 的最大值是 $\sqrt{ab}$

解 2：设 m＝$\sqrt{a}\cos a$ ，n＝$\sqrt{a}\sin a$ ，x＝$\sqrt{b}\cos b$ ，y＝$\sqrt{b}\sin b$

故 mx+ny＝$\sqrt{ab}\cos(a-b)\le\sqrt{ab}$

523、已知两个正变量 x, y 满足 $x+y$=4，则使不等式 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ ³ m 恒成立的实数 m 的取值范围是__________ (不等式)

解：$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 5+2\sqrt{4}=9$， $x+y=4$

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq\frac{9}{4}$，取等号的条件是 $\begin{cases} y=4x \\ x+y=4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases}$

故当 $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases}$ 时 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 最小值=$\frac{9}{4}$， 于是 $\frac{9}{4}\geq m$， m 的范围是 $(-\infty,\frac{9}{4}]$

527、 已知，x>0,y>0,若 x+2y-30=0,求 $\mathbf{lg}\frac{x}{9}+\mathbf{lg}8x$ 的最大值。

解：lg(x/9)+lg8y= $\lg\frac{8xy}{9}=\lg\frac{4(x\bullet 2y)}{9}\leq\lg\frac{4}{9}(\frac{x+2y}{2})^2=\lg\frac{4\times 15^2}{9}=\lg 100=2$

528、在△ABC 内求一点 P，使｜AP｜^{2}+｜BP｜^{2}+｜CP｜^{2}的值最小. (不等式)

解：设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $C(x_3,y_3),P(x,y)$

则 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$

$=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$

$=3(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^2+3(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$

$-3(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^2-3(\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^2$

因此当 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ 且 $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 时 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 取最小值

解法 2、因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$ 故 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PA}^2-2\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PA}$

同理 $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PB}^2-2\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2-2\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PC}$

三式相加得

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2=2\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{PB}^2+2\overrightarrow{PC}^2-2\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{PB},$

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2=3(\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2)-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})^2$

$3(\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2)=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2\geq\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2$

当且仅当 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 时上式取等号

因此 P 是△ABC 的重心时 $\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2$ 取最小值 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)$

547、已知 $y=x^2(x,y\in R)$，求证 $\log_2(2^x+2^y)>\frac{7}{8}$ (不等式)

证：$2^x+2^y\geq2\sqrt{2^x2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}=2\sqrt{2^{x+x^2}}$

$\because 2>1$

$\therefore \log_2(2^x+2^y)\geq1+\frac{1}{2}(x+x^2)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{8}\geq\frac{7}{8}$

548、(1) 过点 P(1,4)引一条直线,使它在两坐标上截距为正值,且它们的和最小,求这条直线方程

(2) 求与两坐标（截距为正值）所围成的直角三角形 A O B 面积最小时 l 方程(直线与圆) (不等式)

（1）解：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$

则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1(a>0,b>0)$（1）

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})=5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\geq5+2\sqrt{4}=9$

$a+b\geq9$

当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$ 即 $b=2a$ 时上式取等号

于是得 $a=3$， $b=6$

故直线 l 的方程是 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$

553、若正数 a,b 满足 ab-a-b≥1,则 a+b 的取值范围是(不等式)

解：因 ab-a-b≥1,

故 ab≥a+b+1

所以

$a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{a+b+1}$，设 $a+b=t$

因此 $t\geq 2\sqrt{t+1}$，　$t^2\geq 4(t+1)$，　$(t-2)^2\geq 8$

$t\leq -2\sqrt{2}+2$ 或 $t\geq 2\sqrt{2}+2$，因 $t>0$，故 $t\geq 2\sqrt{2}+2$

于是 a+b 的取值范围是 $[2\sqrt{2}+2,+\infty)$

663、已知两个正变量 x,y 它们满足 $x+y=4$ 求使不等式 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq M$ 恒成立的实数 M 的取值范围. (不等式)

解：$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=1+4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 5+2\sqrt{4}=9$

故 $4(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})\geq 9$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq\frac{9}{4}$

当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$ 即 $x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{16}{5}$ 时等号成立

故 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 最小＝$\frac{9}{4}$，于是 $M\leq\frac{9}{4}$

682、已知 $x,y\in R$,函数 $y=f(x)$ 由关系 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(xy>0)$ 确定，求 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ 的最小值(不等式)

解：$(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})(\frac{x^2}{4}+y^2)=\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{4y^2}+\frac{1}{4}+1\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}+1\geq\frac{9}{4}$

因 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，故 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{9}{4}$

当且仅当 $\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2}{4y^2}$ 即 $x^2=2y^2$ 时上式取等号

因 $xy>0$，$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，故此时 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$

所以当 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ 时 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ 取最小值，最小值是 $\frac{9}{4}$

718、用数学归纳法证明$(1+\frac{1}{n})^n < n\ (n \ge 3, n \in N_+)$(推理与证明)

证明：（1）当 n=3 时成立，（自己验证）

（2）假设当$n=k(k \ge 3)$，即$(1+\frac{1}{k})^k < k$

当$n=k+1$时$(1+\frac{1}{k+1})^{k+1} < (1+\frac{1}{k})^k(1+\frac{1}{k+1}), < k(1+\frac{1}{k+1}) = k+\frac{k}{k+1} < k+1$

因此当当$n=k+1$时时原式也成立

综上，当$n \ge 3, n \in N_+$时，原式总成立

719、已知a,b,c三个正数成等差数列，公差不为零，$n \ge 3, n \in N_+$

用数学归纳法证明：$a^n + c^n > 2b^n$(推理与证明)

证明：因为a,b,c三个正数成等差数列，所以$a+c=2b$

（1）当 n=2 时，因为公差不为零，所以$a \ne c$，所以

$a^2+c^2 > \frac{(a+c)^2}{2} = 2b^2$，于是当 n=2 时原式成立

（2）假设当$n=k(k \ge 2)$时原式成立，即$a^k+c^k > 2b^k$

当$n=k+1$时

$$a^{k+1}+c^{k+1} - \frac{(a+c)(a^k+c^k)}{2} = \frac{a^{k+1}+c^{k+1} - ac^k - ca^k}{2} = \frac{(a-c)(a^k-c^k)}{2} > 0$$

因此$a^{k+1}+c^{k+1} > \frac{(a+c)(a^k+c^k)}{2} = b(a^k+c^k) > b \bullet 2b^k = 2b^{k+1}$

于是当 n=k+1 时原式成立

综上，当$n \ge 2, n \in N_+$时，原式总成立

911、(不等式)

已知$4^x = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，正实数$x_1, x_2$满足条件，$f(x_1)+f(x_2)=1$，

求$f(x_1+x_2)$的最小值

解 1：$4^x = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，得$f(x) = \frac{4^x-1}{4^x+1} = \frac{4^x+1-2}{4^x+1} = 1-\frac{2}{4^x+1}$

$f(x_1)+f(x_2) = 2-\frac{2}{4^{x_1}+1}-\frac{2}{4^{x_2}+1} = 1$，$1 = \frac{2}{4^{x_1}+1}+\frac{2}{4^{x_2}+1}$

$$4^{x_1+x_2}+4^{x_1}+4^{x_2}+1 = 2\bullet 4^{x_1}+2\bullet 4^{x_2}+4$$

$4^{x_1+x_2}-3=4^{x_1}+4^{x_2}\ge 2\sqrt{4^{x_1+x_2}}$，$(\sqrt{4^{x_1+x_2}}-3)(\sqrt{4^{x_1+x_2}}+1)\ge 0$

故$\sqrt{4^{x_1+x_2}}\ge 3, 4^{x_1+x_2}\ge 9$，于是 $f(x_1+x_2)=1-\dfrac{2}{4^{x_1+x_2}+1}\ge 1-\dfrac{2}{10}=\dfrac{4}{5}$

解 2：$4^{x_1}4^{x_2}=\dfrac{1+f(x_1)}{1-f(x_1)}\bullet\dfrac{1+f(x_2)}{1-f(x_2)}=\dfrac{1+f(x_1)+f(x_2)+f(x_1)f(x_2)}{1-f(x_1)-f(x_2)+f(x_1)f(x_2)}$

$$=\frac{2+f(x_1)f(x_2)}{f(x_1)f(x_2)}=\frac{2}{f(x_1)f(x_2)}+1\ge\frac{2}{[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}]^2}+1=9$$

$f(x_1+x_2)=1-\dfrac{2}{4^{x_1+x_2}+1}\ge 1-\dfrac{2}{10}=\dfrac{4}{5}$

913、 (不等式) (函数)

设$a>1$，$0<b<1$，求$\log_a b+\log_b a$的取值范围

解：因$a>1$，$0<b<1$

故$\log_a b<0$，$-\log_a b>0$

$-\log_a b+\dfrac{1}{-\log_a b}\ge 2$，$\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}\le -2$

即$\log_a b+\log_b a\le -2$

917、(数列) (不等式)

用数学归纳法证明 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^n-1}>\dfrac{n-2}{2}(n\ge 2)$

证明：（1）当$n=2$时，左边＝$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$＝$\dfrac{5}{6}$，右边＝0，左边$>$右边

此时原不等式成立

（2）假设当$n=\mathrm{k}(k\ge 2)$时，原式成立即$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^k-1}>\dfrac{k-2}{2}$

则$n=\mathrm{k}+1(k\ge 2)$时，左边＝$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}$

$>\dfrac{k-2}{2}+\overbrace{\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}}^{2^k个}$＝$\dfrac{k-2}{2}+1$＝$\dfrac{k}{2}$，右边＝$\dfrac{k-1}{2}$

所以，左边$>$右边，即$n=\mathrm{k}+1$时，原不等式也成立

由数学归纳法原理得，原不等成立

966、(不等式)

设 a、b、c>1,则 loga b+2logb c+4logc a 的最小值为( )

A、2　B、4　C、6　D、8

解：$\log_a b+2\log_b c+4\log_c a=\log_a b+\dfrac{2\log_a c}{\log_a b}+\dfrac{4}{\log_a c}\geq 3\sqrt[3]{8}=6$

968、(不等式)

求证：$1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$

证明：$n=1$时$1<2$

当$n\geq 2$时$1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\leq 1+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=2-\dfrac{1}{n}<2$

982、(不等式)

已知正数 x，y 满足 x+y=1，求

（1）$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$的最小值；

（2）$(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})$的最小值

解：（1）$(x+y)(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y})=2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}+1\geq 3+2\sqrt{2}$，$x+y=1$

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 3+2\sqrt{2}$ 取等号的条件是$\begin{cases}x=\sqrt{2}y\\x+y=1\end{cases}$即$\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}-1\end{cases}$

故当$\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}-1\end{cases}$时$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$最小值$=3+2\sqrt{2}$

（2）因$xy\leq(\dfrac{x+y}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，$y=x+\dfrac{1}{x}$在$(0,\dfrac{1}{4}]$上递减

故$(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})=xy+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+xy+\dfrac{1}{xy}\geq 2+xy+\dfrac{1}{xy}\geq 2+\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{25}{4}$

于是$(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})\geq\dfrac{25}{4}$

当且仅当$x=y=\dfrac{1}{2}$时取等号，因此$(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})$最小值为$\dfrac{25}{4}$

984、(不等式)

已知$x\geq 1$，求证$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

证明：要证$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$（1）

只要证$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$（2）

因为$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

于是（2）式成立，于是（1）式成立

990、(不等式)

已知 $3^a=2$，$2^b=3$，则 a+b 的值所在的区间是（　　）

A、（0，1）　　B　（1，2）　　C　　（2，3）　　D　（3，4）

解：$a=\log_3 2$，$b=\log_2 3$

$a+b=\log_3 2+\log_2 3=\dfrac{1}{\log_2 3}+\log_2 3$

由于 $1<\log_2 3<2$

考察函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 上递增，于是 $a+b\in(2,3)$

1106、(不等式)

已知 $x^2+y^2+xy=3$，求 x^2+y^2 的范围

解：$-\dfrac{x^2+y^2}{2}\le xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$，于是 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\le x^2+y^2+xy\le\dfrac{3(x^2+y^2)}{2}$

即 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\le 3\le\dfrac{3(x^2+y^2)}{2}$，$2\le x^2+y^2\le 6$

1111、(不等式)

已知 $\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5$ 求 $x+y$ 的最小值

解：$\sqrt{x+1}=t$，则 $\sqrt{y-2}=5-t$，$0\le t\le 5$

于是 $x=t^2-1$，$y=(5-t)^2+2$

$x+y=2t^2-10t+26=2(t-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{27}{2}$

因 $0\le t\le 5$ 故 $x+y$ 的最小值＝$x+y=\dfrac{27}{2}$

1143、(不等式)

用一批长为 2.5m 的条形钢截成长为 60cm 和 43cm 的两种规格的毛坯，要使余下的废料最少，则材料的利用率是_______（利用率＝$\dfrac{\text{零件毛坯的长度和}}{\text{钢材总长}}$）

解：设截成长 60cm 与 43cm 的分别为 x 和 y 根，余下的为 zcm

$x,y\in N$，$Z=250-(60x+43y)\ge 0$

罗列各种情况

当 $x=1$ 时，y 取 3，Z 最小，当 $x=2$ 时，y 取 3，Z 最小

当 $x=3$ 时，y 取 1，Z 最小，当 $x=4$ 时，y 取 4，Z 最小

比较 4 个 z 的最小值，可得，当 $x=2$，y＝3 时，Z 最小

此时 $\dfrac{60x+43y}{250}=\dfrac{120+129}{250}=\dfrac{249}{250}$

1186、 (不等式)

如果有 B(0,6),C(0,2)两点,A 是 x 轴负半轴上的一点,问 A 在何处时,$\angle$BAC 有最大值,并求出最大值.

解：设 A($-a$,0) (a>0)

则 $k_{AB}=\dfrac{6}{a}$， $k_{AC}=\dfrac{2}{a}$， 则

$$\tan\angle BAC=\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}k_{AC}}=\frac{\dfrac{6}{a}-\dfrac{2}{a}}{1+\dfrac{12}{a^2}}=\frac{4}{a+\dfrac{12}{a}}\le\frac{4}{2\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

当且仅当 $a=\dfrac{12}{a}$ 即 $a=2\sqrt{3}$ 时上式取等号

因此 $A(-2\sqrt{3},0)$ 时， $\angle BAC$ 取最大值 $\dfrac{\pi}{6}$

1188、(不等式)

已知 $x^2+y^2+z^2=1$， $x,y,z\in R^+$ 求 $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{xz}{y}$ 最小值。

解： $$(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y})^2\ge 3(\frac{xy}{z}\bullet\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\bullet\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}\bullet\frac{yz}{x})=3(y^2+z^2+x^2)=3$$

于是 $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{xz}{y}$ 最小值为 $\sqrt{3}$

1269、(函数) (不等式)

求 $y=x^2+2x+\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ 的值域

解 $t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\in[2,+\infty)$，则 $y=t+\dfrac{1}{t}-3$ 在 $[2,+\infty)$ 上递增

于是 $y\in[-\dfrac{1}{2},+\infty)$

1394

http://bbs.pep.com.cn/thread-287656-1-1.html

已知 $a>b>0$， 求证： $a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

证明：要证 $a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$， 只要证 $a\ln a+b\ln b>\dfrac{a+b}{2}(\ln a+\ln b)$

$\Leftrightarrow(a-b)\ln a>(a-b)\ln b\Leftrightarrow a>b>0$

1428、

已知：x,y为实数，且x,a_1,a_2,y成等差数列，

x,b_1,b_2,y成等比数列，则$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}$的取值

范围是(　　　)

A、R　　B、$(0,4]$　　C、$[4,+\infty)$　　D、$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

解：$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}+2\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$