廖老师网上千题解答分类十六、超纲不等式

12、求证：无论 n 取何值，

$1+2^{-\frac{3}{2}}+3^{-\frac{3}{2}}+\cdots n^{-\frac{3}{2}}<3$

证明：设 $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$

$n^{-\frac{3}{2}}=f(n)=f(n)\times 1<\int_{n-1}^{n} f(x)dx=\int_{n-1}^{n} x^{-\frac{3}{2}}dx(n=2,4,\cdots,n)$

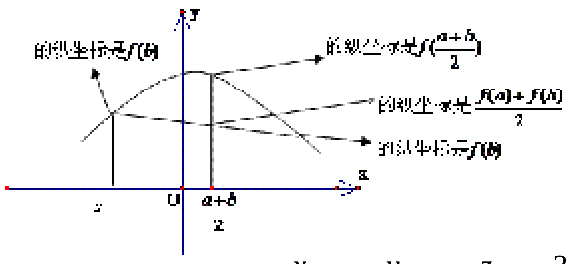
$1+2^{-\frac{3}{2}}+3^{-\frac{3}{2}}+\cdots n^{-\frac{3}{2}}<1+\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{1}^{t} x^{-\frac{3}{2}}dx=1+\lim\limits_{t\to+\infty}[-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^t=1+\lim\limits_{t\to+\infty}[-2t^{-\frac{1}{2}}+2]_1^t=3$

15、15、已知三角形 ABC ,求证：$\sin A+\sin B+\sin C>\sin\dfrac{A+B+C}{3}$

提示：用琴生不等式　设 $x_1,x_2,\cdots x_n\in(a,b)$，若 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的上凸函数，则 $f(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\ge\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

若 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的下凸函数，则

$f(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$



16、已知：$x,y,z\in R_+$ 求证：$\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}$

证法 1：（高考）设 $y+z=m$， $x+z=n$， $y+x=p$

则 $x=\dfrac{n+p-m}{2}$， $y=\dfrac{m+p-n}{2}$， $z=\dfrac{m+n-p}{2}$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m+p-n}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+\frac{p}{m}+\frac{m}{p}+\frac{p}{n}+\frac{n}{p})-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{2}\times 6-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

证法 2：（竞赛）

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z-(y+z)}{y+z}+\frac{x+y+z-(x+z)}{x+z}+\frac{x+y+z-(x+y)}{x+y}$$

$$=(x+y+z)(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y})-3$$

$$=\frac{1}{2}[(y+z)+(x+z)+(x+y)](\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y})-3\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

24、已知x,y,z均为实数且满足$x+y+z=4$，求$xy+yz+zx$的最大值

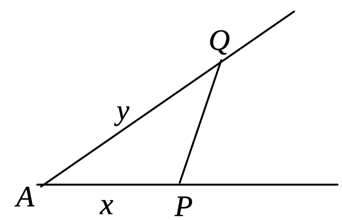
解：$2xy+2xz+2yz\le 2x^2+2y^2+2z^2$

$\Rightarrow xy+xz+yz\le x^2+y^2+z^2$

$\Rightarrow 3(xy+xz+yz)\le x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$\Rightarrow xy+xz+yz\le \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{16}{3}$

90、已知角 A 为定角,P`Q 分别在角 A 的两边上,PQ 为定长,当 P`Q 处于什么位置时,三角形 APQ 的面积最大?



解：设 AP=x，AQ=y

则：APQ 的面积＝$\frac{1}{2}xy\sin A$

$x^2+y^2-2xy\cos A=PQ^2$

$x^2+y^2\geqslant 2xy$

$\therefore PQ^2+2xy\cos A\geqslant 2xy$

$xy\leqslant \frac{PQ^2}{2(1-COSA)}$

APQ 的面积＝$\frac{1}{2}xy\sin A\leqslant \frac{PQ^2\sin A}{4(1-COSA)} = \frac{PQ^2}{4\tan\frac{A}{2}}$

当且仅当 $x=y=\frac{PQ}{2\sin\frac{A}{2}}$ 时上式取等号

110、a,b,c都不等于 0，$a+b$不等于 0，$a+b+c$不等于 0, $\frac{1.}{a}+\frac{1.}{b}+\frac{1.}{c}=\frac{1.}{a+b+c}$，

求证：$ab+bc+ac<0$ (联赛)

证明：$\frac{1.}{a}+\frac{1.}{b}+\frac{1.}{c}=\frac{1.}{a+b+c}\Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab)=abc$

$\Leftrightarrow [(a+b)+c][c(a+b)+ab]=abc \Leftrightarrow (a+b)^2c+(a+b)ab+c^2(a+b)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)[ac+bc+ab+c^2]=0$

$\because a+b\neq 0$，　$\therefore ac+bc+ab+c^2=0$

$\therefore ac+bc+ab=-c^2<0$（$c\neq 0$）

注本题：没有“a+b 不等于 0”这一条件结论也成立，你们可试一试应怎么证

111、若 x+y=1

求证：$\frac{7}{4} \pounds (\frac{1}{x} - x)(\frac{1}{y} - y) \pounds \frac{9}{4}$

证明：$(\frac{1}{x} - x)(\frac{1}{y} - y)=\frac{1-x^2.}{x}\bullet\frac{1-y^2.}{y}=\frac{y(1+x).}{x}\bullet\frac{x(1+y).}{y}=(1+x)(1+y)=2+xy$

$-\frac{(x+y)^2}{4}\le xy\le\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}\le xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{7}{4}\le 2+xy\le\frac{9}{4}$

注如果条件中有x和y是正数时，$2<(\frac{1}{x} - x)(\frac{1}{y} - y) \pounds \frac{9}{4}$

113、 若 x+y=1，求证$\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{y^2+x^3}\pounds\frac{8}{3}$(联赛)

证明：$x^2+y^3=x^2(x+y)+y^3=y\ (x+y)+x^3=y^2+x^3$

$xy\pounds(\frac{x+y}{2})^2=\frac{1}{4}$

$x^2+y^3=y^2+x^3=\frac{x^3+y^3+x^2+y^2.}{2}=\frac{2x^2+2y^2-xy.}{2}=\frac{2-5xy.}{2}\ ^{3}\ \frac{3}{8}$

$\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{y^2+x^3}=\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{x^2+y^3}=\frac{x+y}{x^2+y^3}=\frac{1}{x^2+y^3}\pounds\frac{8}{3}$

122、设 x≥y≥z≥$\frac{p}{12}$，且 x＋y＋z＝$\frac{p}{2}$，求 cosxsinycosz 的最大值和最小值。(联赛)

解：$\mathbf{Q}\ x+y+z=\frac{p}{2}$，x≥y≥z≥$\frac{p}{12}$

$\therefore x=\frac{p}{2}-(y+z)\le\frac{p}{2}-(\frac{p}{12}+\frac{p}{12})=\frac{p}{3}$， *sin*(*y-z*)≥0

$\therefore$ ***cosxsinycosz***$=\frac{1}{2}\cos x[\sin(y+z)+\sin(y-z)]=\frac{1}{2}\cos x[\cos x+\sin(y-z)]$

$\ge\frac{1}{2}\cos^2 x\ge\frac{1}{2}\cos^2\frac{p}{3}=\frac{1}{8}$

当且仅当 x＝$\frac{p}{3}$，y＝z＝$\frac{p}{12}$时 ***cosxsinycosz*** 取到最小值$\frac{1}{8}$

$\because$ x≥y≥z≥$\frac{p}{12}$，*sin*(*x-y*)≥0

$\therefore$ ***cosxsinycosz***$=\frac{1}{2}\cos z[\sin(x+y)-\sin(x-y)]=\frac{1}{2}\cos z[\cos z-\sin(x-y)]$

$\le\frac{1}{2}\cos^2 z\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{p}{12}=\frac{1+\cos\frac{p}{6}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$

当且仅当 x＝y＝$\frac{5p}{24}$，z＝$\frac{p}{12}$时 ***cosxsinycosz*** 取到最大值$\frac{2+\sqrt{3}}{8}$

129、已知：a,b,c 为正实数，$a+b+c=1$，求证：$\frac{13}{27}\le a^2+b^2+c^2+4abc<1$
(联赛)
证明：不妨设 $a\ge b\ge c\ge 0$
Q $a+b+c=1$
$\therefore a+b\ge\frac{2}{3},c\le\frac{1}{3}$，$2c\le\frac{2}{3}<1$

$a^2+b^2+c^2+4abc\le a^2+b^2+c^2+4abc\le a^2+b^2+c^2+2ab$

$=(a+b+c)^2-2ac-2bc<1$

设 $a+b=\frac{2}{3}+t\qquad c=\frac{1}{3}-t\ (0\le t\le\frac{1}{3})$

$a^2+b^2+c^2+4abc=(a+b+c)^2-2ac-2bc-2ab+4abc$

$=1-2c(a+b)-2ab(1-2c)\ge 1-2c(a+b)-\frac{1}{2}(a+b)^2(1-2c)$

$=1-2(\frac{1}{3}-t)(\frac{2}{3}+t)-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+t)^2(\frac{1}{3}+2t)==\frac{13}{27}+t^2(\frac{5}{6}-t)\ge\frac{13}{27}$

177、已知 a,b,c 是正实数。求证：$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\le(\frac{b}{a})^3+(\frac{c}{b})^3+(\frac{a}{c})^3$(竞赛)

证明：$(\frac{b}{a})^3+(\frac{c}{b})^3+(\frac{a}{c})^3-3\bullet\frac{b}{a}\bullet\frac{c}{b}\bullet\frac{a}{c}-=(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})[(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})^2-3(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})]$

设 $y=(\frac{b}{a})^3+(\frac{c}{b})^3+(\frac{a}{c})^3,x=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$

则 $y-3=x(x^2-3x)$

$y-x=x^3-3x^2-x+3$

设 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$

Q $x=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\bullet\frac{b}{c}\bullet\frac{c}{a}}=3$

$\therefore$ 则 $f'(x)=3x^2-6x-1=3(x-1)^2-4>0$

故 $f(x)$ 在 $x\in[3,+\infty)$ 上递增，$f(x)\ge f(3)=0$

因此 $y\ge x$，原不等式得证

200、已知 x,y,z 是实数,求 $\frac{xy+2xz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最值.(联赛)

解：设$t=\frac{xy+2xz}{x^2+y^2+z^2}$

（1）当 $y=0$ 时则 $t=0$

（2）当 $y\neq 0$ 时则 $t=\dfrac{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}+\frac{2z}{y}}{(\frac{x}{y})^2+(\frac{z}{y})^2+1}$

设 $m=\frac{x}{y},n=\frac{z}{y}$ 则

$\frac{x}{y}+\frac{2z}{y}=t\ [(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y}\}^2+1]\Leftrightarrow m+2n=t\ [m^2+n^2+1]$

$\because (m+2n)^2-5(m^2+n^2)=-(2m-n)^2\leq 0$

$\therefore t^2(m^2+n^2+1)^2-5(m^2+n^2)\leq 0$

设 $q=m^2+n^2$，则 $t^2\leq\frac{5q}{(q+1)^2}$

①当 $q=0$ 时 $x=0,y=0$，则 $t=0$

②当 $q\neq 0$ 时 $t^2\leq\frac{5q}{(q+1)^2}=\frac{5q}{q^2+1+2q}=\dfrac{5}{q+\frac{1}{q}+2}\leq\frac{5}{4}$

$\therefore -\frac{\sqrt{5}}{2}\leq t\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$

当且仅当 $q=1$ 时取等号

因此当 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{z}{y}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时 设$t=\frac{xy+2xz}{x^2+y^2+z^2}$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

当 $\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{z}{y}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时 设$t=\frac{xy+2xz}{x^2+y^2+z^2}$ 取最小值 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

202、已知：$x,y,z\in[-2,2]$

求证：　$xy+yz+xz\geq -4$

证明：（1）当 x,y,z 全正负，则 $xy+yz+xz\geq -4$

（2）当 x,y,z 至少之一为 0，不妨设 z=0.则 $xy+yz+xz=xy$

由于 $x,y\in[-2,2]$ 因此 $xy\geq -4$

（3）当 x,y,z 两个正，一个负，不妨设 x,y 为正，z 为负则

$xy+yz+xz+4=xy-2x-2y+4+2x+2y+yz+xz$

$=(x-2)(y-2)+(x+y)(2+z)\geq 0$

（3）当 x,y,z 两负，一个正，不妨设 x,y 为负，z 为正则

$xy+yz+xz+4=xy+2x+2y+4-2x-2y+yz+xz$

$=(x-2)(y-2)-(x+y)(2-z)\geq 0$

综上原式成立

203、已知 x、y、z 都是非负实数，且 $x+y+z=1$.
求证：$x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)\geqslant 0$，并确定等号成立的条件．(联赛)

证明：不妨设 $x\ge y\ge z\ge 0$，由于 $x+y+z=1$

$\therefore x+y\ge \frac{2}{3}, z\le \frac{1}{3}$，可设 $x+y=\frac{2}{3}+t \qquad z=\frac{1}{3}-t$（$0\le t\le \frac{1}{3}$）

$x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)$

$=6(x^3+y^3+z^3)-5(x^2+y^2+z^2)+x+y+z$

$=6[(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz]-5(x^2+y^2+z^2)+1$

$=x^2+y^2+z^2-6xy-6yz-6xz+18xyz+1$

$=2-8xy-8yz-8xz+18xyz$

$=2-8xy-8yz-8xz+18xyz$

$=2-2xy(4-9z)-8z(x+y)$

$=2-2xy(4-9z)-8z(x+y)==1-8(\frac{1}{3}-t)(\frac{2}{3}+t)-2xy(1+3t)$

$\ge 2-8(\frac{1}{3}-t)(\frac{2}{3}+t)-\frac{(x+y)^2}{2}(1+3t)$

$\ge 2-8(\frac{1}{3}-t)(\frac{2}{3}+t)-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+t)^2(1+3t)=\frac{1}{2}t^2(11-3t)\ge 0$

230、已知 ΔABC 的三边长为 a,b,c,求证：$\mathbf{\sin}\frac{A}{2}\mathbf{\sin}\frac{B}{2}\mathbf{\sin}\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ (高考不要求)

证明：$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3})^3\le(\sin\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3})^3$

$=(\sin\frac{\pi}{6})^3=\frac{1}{8}$

258、已知 $a>1, n>1, n\in N_+$,证明：$a^n-\frac{1}{a^n}\ge n(a-\frac{1}{a})$

证明 $\frac{a(a^{2n}-1)}{a^n(a^2-1)}=\frac{a(1-a^{2n})}{a^n(1-a^2)}=\frac{1}{a^n}$（$a+a^3+\cdots+a^{2n-1}$)

$>\frac{1}{a^n}n(a\cdot a^3\cdot\cdots\cdot a^{2n-1})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^n}n(a^{n^{2}1})^{\frac{1}{n}}=n$，故原式成立

287、已知 a>b>c，

(1)求证 当 p <4 时，$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{p}{c-a}$>0 恒成立

(2)从另一个角度推广， m、n、p 满足什么条件，$\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}+\frac{p}{c-a}$>0 恒成立?

a=3,b=2,c=1, p=10,1/(a-b) + 1/(b-c) + p/(c-a)<0

证明：（1）设$u=a-b$， $v=b-c$，则$c-a=-(m+n)$

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{p}{c-a}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{p}{u+v}==\frac{(u+v)^2-puv}{uv(u+v)}$$

$$\geq\frac{4uv-puv}{uv(u+v)}=\frac{uv(4-p)}{uv(u+v)}>0$$

（2）要使$\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}+\frac{p}{c-a}=\frac{m}{u}+\frac{n}{v}-\frac{p}{u+v}==\frac{(u+v)(nu+mv)-puv}{uv(u+v)}$

$\geq\frac{4\sqrt{mn}uv-puv}{uv(u+v)}=\frac{uv(4\sqrt{mn}-p)}{uv(u+v)}>0$恒成立

只要$4\sqrt{mn}>p$

118、已知：x,y Î R^{+}，x+y=1， 求证：$\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{y^2+x^3}\leq\frac{8}{3}$(联赛)

证明：当 x 与 y 非负时

因$x+y=1$，故$xy\leq(\frac{x+y}{2})^2=\frac{1}{4}$

$$\frac{x}{x^2+y^3}=\frac{x}{x^2(x+y)+y^3}=\frac{x}{x^3+y^3+x^2y}=\frac{x}{x^2+y^2-xy+x^2y}=$$
$$\frac{x}{(x+y)^2-3xy+x^2y}=\frac{x}{1-xy(3-x)}\leq\frac{x}{1-\frac{1}{4}(3-x)}=\frac{4x}{1+x}$$

同理$\frac{y}{y^2+x^3}\leq\frac{4y}{1+y}$

$$\frac{x}{x^2+y^3}+\frac{y}{y^2+x^3}\leq\frac{4x}{1+x}+\frac{4y}{1+y}=\frac{4(x+xy+y+xy)}{(1+x)(1+y)}=\frac{4(1+2xy)}{2+xy}=$$
$$=\frac{8(xy+2)-12}{2+xy}==8-\frac{12}{2+xy}\leq8-\frac{12}{2+\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$$

323、已知$\dfrac{\sin^3 a}{\sin b}=\dfrac{\cos^3 a}{\cos b}=k$，则$k$的取值范围是______(联赛)

解：由$\dfrac{\sin^3 a}{\sin b}=\dfrac{\cos^3 a}{\cos b}=k$得

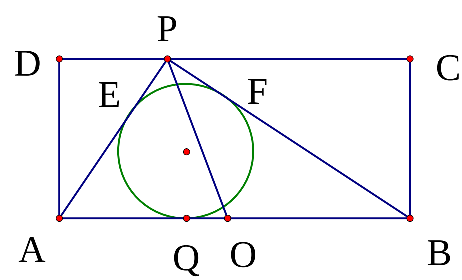
$\sin^3 a=k\sin b$， $\cos^3 a=k\cos b$ （$\sin^3 a\neq 0,\cos^3 a\neq 0$）

$\sin^6 a+\cos^6 a=k^2$

$k^2=\sin^6 a+\cos^6 a=1-3\sin^2 a\cos^2 a=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2a\in[\dfrac{1}{4},1)$

324、设ABCD是面积为2的长方形，P为边CD上的一点，Q为△PAB的内切圆与边AB的切点．乘积PA•PB的值随着长方形ABCD及点P的变化而变化，当PA•PB取最小值时，（1）证明：AB≥2BC;（2）求AQ•BQ的值．(联赛)

解：（1）设PA=a，PB=b



则$\dfrac{1}{2}ab\sin\angle APB=S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}=1$

$ab=\dfrac{2}{\sin\angle APB}$

故当$\angle ABC=90°$时ab取最小值2

取AB的中点O，连PO，则AB=2PO

由垂线段最短得PO≥BC，故AB≥2BC

（2）AQ+BQ=AB=$\sqrt{a^2+b^2}$

AQ-BQ=AE-BF=（AE+PE）-(BF+PF)=$a-b$

两式平方相减得

4AQ•BQ＝$2ab=4$故AQ•BQ＝1

327、已知：abcd=1、a、b、c、d 为正数(联赛)

求证：$\dfrac{1}{a+b+c+1}+\dfrac{1}{a+b+d+1}+\dfrac{1}{a+c+d+1}+\dfrac{1}{b+c+d+1}\leq 1$

证明：因$a+b+c=(\sqrt[4]{a})^4+(\sqrt[4]{b})^4+(\sqrt[4]{c})^4\geq\sqrt[4]{abc}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})$

故$\dfrac{1}{a+b+c+1}\leq\dfrac{\sqrt[4]{abcd}}{\sqrt[4]{abc}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})+\sqrt[4]{abcd}}\leq\dfrac{\sqrt[4]{d}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}}$

同理$\dfrac{1}{a+b+d+1}\leq\dfrac{\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}}$， $\dfrac{1}{a+c+d+1}\leq\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}}$，

$\dfrac{1}{b+c+d+1}\leq\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}}$相加可得原不等式

328、（讲座）(联赛)

已知：$a,b,c\in R^{+}$，求证：（1）$a^3+b^3\geq ab(a+b)$（2）$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$

（3）$\dfrac{abc}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{abc}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{abc}{c^3+a^3+abc}\leq 1$

（4）$\dfrac{abcd}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\dfrac{abcd}{a^4+b^4+d^4+abcd}+\dfrac{abcd}{a^4+c^4+d^4+abcd}+\dfrac{abcd}{b^4+c^4+d^4+abcd}\leq 1$

证明：（1）$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\geq 0$

（2）$a^4+b^4+c^4\geq\dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}{3}\geq abc(a+b+c)$

（3）因 $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ 故 $\dfrac{abc}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{abc}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{abc}{c^3+a^3+abc}$

$\leq\dfrac{abc}{ab(a+b)+abc}+\dfrac{abc}{bc(b+c)+abc}+\dfrac{abc}{ac(a+c)+abc}$

$=\dfrac{c}{a+b+c}+\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}=1$

（4）因 $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$

故

$\dfrac{abcd}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\dfrac{abcd}{a^4+b^4+d^4+abcd}+\dfrac{abcd}{a^4+c^4+d^4+abcd}+\dfrac{abcd}{b^4+c^4+d^4+abcd}$

$\leq\dfrac{abcd}{abc(a+b+c)+abcd}+\dfrac{abcd}{abd(a+b+d)+abcd}+\dfrac{abcd}{acd(a+c+d)+abcd}+\dfrac{abcd}{bcd(b+c+d)+abcd}$

$=\dfrac{d}{a+b+c+d}+\dfrac{c}{a+b+c+d}+\dfrac{b}{a+b+c+d}+\dfrac{a}{a+b+c+d}=1$

（5）可推广

332、(讲座)幂平均数不等式(超出联赛)

（1）定义： a 次幂平均数

设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 n 个正数， $a\neq 0$，

称 $\mathrm{M}(a)=\left(\dfrac{b_1{}^a+b_2{}^a+\cdots+b_n{}^a}{n}\right)^{\frac{1}{a}}$ 为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的 a 次幂平均数，

规定 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的 0 次幂平均数 $\mathrm{M}(0)=\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$

（2）幂平均数不等式：

设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的 a ，b 次幂平均数分别为 $\mathrm{M}(a)$ 和 $\mathrm{M}(b)$，则当 $a<b$ 时

$\mathrm{M}(a)\le \mathrm{M}(b)$，当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取到等号。

证一个特殊情况

要证 $\left(\dfrac{b_1^{\ a}+b_2^{\ a}+\cdots+b_n^{\ a}}{n}\right)^{\frac{1}{a}}\ge\left(\dfrac{b_1^{\ b}+b_2^{\ b}+\cdots+b_n^{\ b}}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$ $(a>b)$

只要证 $\left(\dfrac{b_1^{\ a}+b_2^{\ a}+\cdots+b_n^{\ a}}{n}\right)^{\frac{b}{a}}\ge\dfrac{b_1^{\ b}+b_2^{\ b}+\cdots+b_n^{\ b}}{n}$

由 $(b_1^{\ a}+b_2^{\ a}+\cdots+b_n^{\ a})^{\frac{1}{\frac{a}{b}}}(1+1+\cdots 1)^{1-\frac{1}{\frac{a}{b}}}\ge b_1^{\ b}+b_2^{\ b}+\cdots+b_n^{\ b}$

$(b_1^{\ a}+b_2^{\ a}+\cdots+b_n^{\ a})^{\frac{b}{a}}n^{1-\frac{b}{a}}\ge b_1^{\ b}+b_2^{\ b}+\cdots+b_n^{\ b}$

例 1、已知 a,b,c 均为正实数，且 $a^2+b^2+c^2=12$。求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 24$(联赛)

证明：由幂平均数不等式得 $\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\ge\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

故 $\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\ge 4^{\frac{1}{2}}=2$，$a^3+b^3+c^3\ge 24$

例 2、已知 $a,b,c\in R_+$，求证（1）$a^3+b^3\ge ab(a+b)$ (联赛)

（2）$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$

例 3、已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R_+$ 求证

$a_1^{\ n+1}+a_2^{\ n+1}+\cdots+a_n^{\ n+1}\ge a_1a_2\cdots a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ (超出联赛)

证明：$\left(\dfrac{a_1^{\ n+1}+a_2^{\ n+1}+\cdots+a_n^{\ n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}\ge\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

$a_1^{\ n+1}+a_2^{\ n+1}+\cdots+a_n^{\ n+1}\ge\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{n+1}}{n^n}$

$\ge\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n(a_1+a_2+\cdots+a_n)\ge a_1a_2\cdots a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

350、已知 x,y∈R，$x^2+y^2\le 1$，求|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|的范围

解：因 $x^2+y^2\le 1$

故 $-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 1$

|y+1|+|2y-x-4|＝y+4+x-2y＝4+x-y

(1)当 x+y≥0 时 z=|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|＝x+y+4+x-y＝4+2x

因 $x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 故 $z\in[4-\sqrt{2},6]$

(2)当 x+y<0 时 z=|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|＝-x-y+4+x-y＝4-2y

因 $y\in[-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 故 $z\in(4-\sqrt{2},6]$

综上|x+y|+|y+1|+|2y-x-4|的范围是 $[4-\sqrt{2},6]$

372、是否存在这样的 P 值，使适合不等式$|x^2-4x+p|+|x-3|\le 5$的 x 的最大值为 3，若存在，求出此值；若不存在，说明理由。

解：假设存在 P 值满足条件，则 3 必是方程
$|x^2-4x+p|+|x-3|=5$的根
由此得$|p-3|=5$，$p=8$或$p=-2$
（1）当$p=8$时
$|x^2-4x+p|+|x-3|\le 5$就是$|x^2-4x+8|+|x-3|\le 5$
解集为$[2,3]$，x 的最大值为 3，适合
（2）当$p=-2$时
$|x^2-4x+p|+|x-3|\le 5$就是$|x^2-4x-2|+|x-3|\le 5$
易知 x=4 是不等式的解故，x 的最大值不为 3，从舍去
综上，这样的 P＝8 满足条件
383、已知$a>0,b>0,c>0$， 求证 $a+b-2\sqrt{ab}<a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$

证明：要证$a+b-2\sqrt{ab}<a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$

只要证$c+2\sqrt{ab}>\sqrt[3]{abc}$ （1）

由于$a>0,b>0,c>0$，故$c+2\sqrt{ab}=c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}>3\sqrt[3]{abc}$

即（1）成立，因此原式成立

409、a，b 为非负数，c，d 为正数,b+c≥a+d ，求$\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$的最小值。 (竞赛)

解：设$M=\dfrac{a+b+c+d}{2}$， ,因 b+c≥a+d

故 b+c＝M+P, a+d =M-P(p≥0))

不妨设 c+d＝M+q, a+b =M-q(q≥0))

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{a+b}-\frac{b}{a+b}+\frac{b}{c+d}=\frac{M+P}{M-q}-\frac{b}{M-q}+\frac{b}{M+q}$$
$$=\frac{M+P}{M-q}-\frac{2bq}{(M-q)(M+q)}\ge\frac{M+p}{M-q}-\frac{2(M-q)q}{(M-q)(M+q)}$$
$$\ge\frac{M}{M-q}-\frac{2q}{M+q}=\frac{M+q+M-q}{2(M-q)}-\frac{M+q-(M-q)}{M+q}$$
$$=\frac{M+q}{2(M-q)}+\frac{M-q}{M+q}-\frac{1}{2}\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

当且仅当$p=0$， $a=0$，$\dfrac{M+q}{2(M-q)}=\dfrac{M-q}{M+q}$时上式取等号

即$a=0,b=2,c=\sqrt{2}-1,d=\sqrt{2}+1$时，$\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$取最小值$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

416、已知：$x+y+z=a(a\in R_+),x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$，求证：$0\le x\le\dfrac{2a}{3}$(竞赛)

证明：把 $z=a-x-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$ 得

$x^2+y^2+(a-x-y)^2=\dfrac{a^2}{2}$ 按 y 整理得

$$2y^2+2(x-a)y+2x^2-2ax+\frac{a^2}{2}=0$$

由于 $y\in R$，因此 $4(x-a)^2-8(2x^2-2ax+\dfrac{a^2}{2})\ge 0$

化简得 $3x^2-2ax\le 0$，所以 $0\le x\le\dfrac{2a}{3}$

469、设 a,b,c,d 是满足 ab+bc+cd+da=1 的非负实数,求证

$\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c}\ge\dfrac{1}{3}$ (联赛)

证明：由柯西不等式得

$$(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c})[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]$$

$\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$（1）

$a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)$

$=ab+ac+ad+bc+bd+ab+cd+ac+bc+ad+bd+cd$

$=2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

$\le a^2+b^2+a^2+c^2+a^2+d^2+b^2+c^2+b^2+d^2+c^2+d^2=3(a^2+b^2+c^2+d^2)$（2）

（1）÷（2）得 $\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c}$

$$\ge\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}=\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+d^2+d^2+a^2}{6}\ge\frac{2ab+2bc+2cd+2da}{6}=\frac{1}{3}$$

480、证明不等式: $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<3\,(n\in N^{+})$　(综合难题)

证法 1：当 n=1 时原式成立

当 $n\geq 2$ 时 $\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{2n\sqrt{n}}=\frac{2}{n\sqrt{n}+n\sqrt{n}}<\frac{2}{n\sqrt{n}-\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}}$

$$=\frac{2}{(n-1)\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}}=\frac{2[(n-1)\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}]}{(n-1)^{2}n-n^{2}(n-1)}=\frac{2[(n-1)\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}]}{-(n-1)n}$$

$$=2(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$<1+2[(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})]$$

$$=1+2(1-\frac{1}{\sqrt{n}})<3$$

综上原式成立

证法 2：证法 1：当 n=1 时原式成立

当 $n\geq 2$ 时

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{2n\sqrt{n}}=\frac{2}{n\sqrt{n}+n\sqrt{n}}<\frac{2}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n(n-1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{\sqrt{n(n-1)}}=2(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$<1+2[(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})]$$

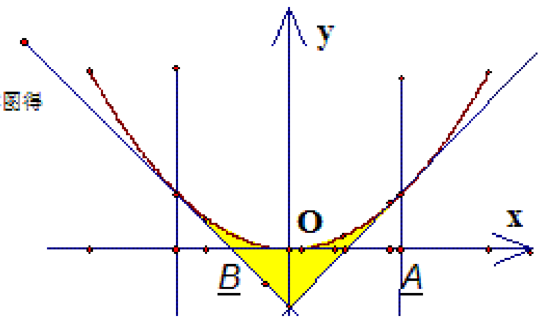
$$=1+2(1-\frac{1}{\sqrt{n}})<3$$

(以上两个方法其实是同一种方法,我第一次做时想要放缩后拆项相消,但有一点硬凑的做法,证法 2 是证法 1 的完善)

619、已知关于t的二次方程$t^2+tx+y=0(x,y\in R)$的实数$t\in[-1,1]$，那么$P(x,y)$的集合在平面区域的形状是______ (方程) (线性规划) (圆锥曲线)

解：$f(t)=t^2+tx+y$

则$\begin{cases}\Delta=x^2-4y\ge 0\\ f(1)=x+y+1\ge 0\\ f(-1)=-x+y+1\ge 0\\ -1\le -\dfrac{x}{2}\le 1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2\ge 4y\\ x+y+1\ge 0\\ x-y-1\le 0\\ -2\le x\le 2\end{cases}$ 作图得



650、求证：$\sqrt{\dfrac{a}{3a+b}}+\sqrt{\dfrac{b}{3b+a}}$ £ 1 £ $\sqrt{\dfrac{b}{3a+b}}+\sqrt{\dfrac{a}{3b+a}}$ (不等式) (竞赛)

证明：

易知 a,b 同号，不妨设，a,b 为正

$(\sqrt{\dfrac{a}{3a+b}}+\sqrt{\dfrac{b}{3b+a}})^2\le 2(\dfrac{a}{3a+b}+\dfrac{b}{3b+a})==\dfrac{2(a^2+b^2+6ab)}{3a^2+10ab+3b^2}$，

因 $3a^2+10ab+3b^2-2(a^2+6ab+b^2)=(a-b)^2$

故 $\dfrac{2(a^2+b^2+6ab)}{3a^2+10ab+3b^2}\le 1$

要证

$$\sqrt{\frac{b}{3a+b}}+\sqrt{\frac{a}{3b+a}}\ge 1$$

只要证 $\dfrac{b}{3a+b}+\dfrac{a}{3b+a}+2\sqrt{\dfrac{b}{3a+b}}\sqrt{\dfrac{a}{3b+a}}\ge 1$

只要证 $2\sqrt{\dfrac{b}{3a+b}}\sqrt{\dfrac{a}{3b+a}}\ge 1-(\dfrac{b}{3a+b}+\dfrac{a}{3b+a})$

$$=\frac{(3a^2+3b^2+10ab)-(3b^2+3a^2+2ab)}{(3a+b)(3b+a)}=\frac{(3a^2+3b^2+10ab)-(3b^2+3a^2+2ab)}{(3a+b)(3b+a)}$$

$$=\frac{8ab}{(3a+b)(3b+a)}$$

即证 $2\sqrt{(3a+b)(3b+a)}\ge 4\sqrt{ab}\Leftrightarrow(a+b)^2\ge 0$

因此右边成立

685、已知 A,B,C 为三角形的三个内角,x, y,z 为任意实数,

求证: $x^2+y^2+z^2 \ge 2xy\cos A+2yz\cos B+2xz\cos C$

(解三角形) (不等式) (竞赛)

证法 1: $x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2yz\cos B-2xz\cos C$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+y^2+z^2+2yz\cos(A+C)$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+(y\cos A+z\cos C)^2+(y\sin A-z\sin C)^2$

$=[x-(y\cos A+z\cos C)]^2+(y\sin A-z\sin C)^2 \ge 0$ 故原式成立

证法 2: $x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2yz\cos B-2xz\cos C$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+y^2+z^2-2yz\cos B$

$\Delta=4(y\cos A+z\cos C)^2-4(y^2+z^2-2yz\cos B)$

$=-4y^2\sin^2 A-4z^2\sin^2 C+8yz[\cos A\cos C-\cos(A+C)]$

$=-4y^2\sin^2 A-4z^2\sin^2 C+8yz\sin A\sin C$

$=-4(y\sin A-z\sin C)^2 \le 0$

故原式成立

699、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in R_+$, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ (不等式)

求证: $\dfrac{x_1^{\ 2}}{1+x_1}+\dfrac{x_2^{\ 2}}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^{\ 2}}{1+x_n} \ge \dfrac{1}{n+1}$

证明: $(\dfrac{x_1^{\ 2}}{1+x_1}+\dfrac{x_2^{\ 2}}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^{\ 2}}{1+x_n})(1+x_1+1+x_2+\cdots+1+x_n)$

$(\sqrt{\dfrac{x_1^{\ 2}}{1+x_1}}\bullet\sqrt{1+x_1}+\sqrt{\dfrac{x_2^{\ 2}}{1+x_2}}\bullet\sqrt{1+x_2}+\cdots+\sqrt{\dfrac{x_n^{\ 2}}{1+x_n}}\bullet\sqrt{1+x_2})^2$

$=(x_1+x_2+\cdots+x)^2=1$

因为 $1+x_1+1+x_2+\cdots+1+x_n=n+1$

所以 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{1+x_1}+\dfrac{x_2^{\ 2}}{1+x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^{\ 2}}{1+x_n} \ge \dfrac{1}{n+1}$

704、A+a=1 B+b=1 C+c=1(A、B、C、a、b、c 是正数)
求证：Ab+Bc+Ca<1(不等式) (竞赛)
证明：Ab+Bc+Ca = Ab(C+c) + Bc (A+a)+Ca (B+b)
= AbC+ Abc+ Bc A +Bc a+ Ca B+ Ca b
< (A+a)(B+b)(C+c)=1(正数和局部小于整体)

750、求证：$(\frac{n}{2})^n > n! > (\frac{n}{3})^n$ (n≥6， $n \in N_+$)(不等式) (竞赛)

证明：（1）设 $a_n = \frac{(\frac{n}{2})^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{n+1}{2})^{n+1}}{(n+1)!} \bullet \frac{n!}{(\frac{n}{2})^n} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^n = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n$$

由于当 $n \geq 2$ 时，$(1+\frac{1}{n})^n > 2$，因此，$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$，$a_{n+1} > a_n$

因 $a_6 = a_n = \frac{3^6}{6!} = \frac{729}{720!} > 1$，故当 $n \geq 6$ 时 $a_n > 1$

即 $\frac{(\frac{n}{2})^n}{n!} > 1$，故 $(\frac{n}{2})^n > n!$

（2）设 $b_n = \frac{(\frac{n}{3})^n}{n!}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\frac{n+1}{3})^{n+1}}{(n+1)!} \bullet \frac{n!}{(\frac{n}{3})^n} = \frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n$$

当 $n \in N_+$ 时 $(1+\frac{1}{n})^n < 3$，$\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$，$b_{n+1} < b_n$

因 $b_6 = \frac{2^6}{6!} = \frac{64}{720} < 1$，

故当 $n \geq 6$ 时 $b_n < 1$，即 $\frac{(\frac{n}{3})^n}{n!} < 1$，故 $(\frac{n}{3})^n < n!$

综上，原不等式得证

773、非负数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$，求证:2（a+b+c）⩾3

证 1：设 $a+b+c=t \qquad a+b=t-c$

$$ab+bc+ca+2abc \le \frac{(a+b+c)^2}{3}+2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{t^2}{3}+\frac{2t^3}{27}$$

因 $ab+bc+ca=1$ 故 $\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2t^3}{27}>1$

若 $t<\dfrac{3}{2}$ 则 $\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{2t^3}{27}<\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{3}+\dfrac{2(\frac{3}{2})^3}{27}=1$ 与上式矛盾

故 $t \ge \dfrac{3}{2}$ 原式成立

证 2：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \; {}^{3} \; 3ab+3bc+3ca=3$

$2(a+b+c) \; {}^{3} \; 2\sqrt{3}>3$

782、已知，$a,b,c\in R_+, abc\le 1$，求证：$\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\ge a+b+c$ (不等式) (竞赛)

证明：要证原不等式成立只要证

$a^2b+b^2c+c^2a \ge abc(a+b+c)$

只要证 $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt[3]{abc}} \ge \sqrt[3]{(abc)^2}(a+b+c)=\sqrt[3]{a^5b^2c^2}+\sqrt[3]{a^2b^5c^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^5}$

因为 $\sqrt[3]{abc}\le 1$ 所以 $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{\sqrt[3]{abc}} \ge a^2b+b^2c+c^2a$

于是只要证 $a^2b+b^2c+c^2a \ge \sqrt[3]{a^5b^2c^2}+\sqrt[3]{a^2b^5c^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^5}$ （1）

因为 $\dfrac{a^2b+a^2b+c^2a}{3}\ge\sqrt[3]{a^5b^2c^2}$ （2），$\dfrac{b^2c+b^2c+a^2b}{3}\ge\sqrt[3]{a^2b^5c^2}$ （3）

$\dfrac{c^2a+c^2a+b^2c}{3}\ge\sqrt[3]{a^2b^2c^5}$ （4）

由（2）+（3）+（4）得（1）因此原不等式成立

874、(不等式)

已知$x,y,z\in R_+$， $x^2+y^2+z^2=1$，求$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值

解：因$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

故$(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z})^2\geq 3(x^2+y^2+z^2)=3$

因$x,y,z\in R_+$,于是$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\geq\sqrt{3}$

当且仅当$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时上式取等号

因此$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值为$\sqrt{3}$

951、(不等式) (竞赛)

设$x,y,z\in R_+$,且$xyz=1$， 证明：

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+y)(1+x)}\geq\frac{3}{4}$$

证明：不妨设$0<x\leq y\leq z$

则$(1+y)(1+z)\geq(1+x)(1+z)\geq(1+y)(1+x)>0$

于是$\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leq\frac{1}{(1+x)(1+z)}\leq\frac{1}{(1+y)(1+x)}$

又因为$x^3\leq y^3\leq z^3$

由切比雪夫不等式得

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+y)(1+x)}$$

$$\geq\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\bullet[\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+x)(1+z)}+\frac{1}{(1+y)(1+x)}]$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\bullet\frac{3+x+y+z}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

由幂平均数不等式得

$(\frac{x^3+y^3+z^3}{3})^{\frac{1}{3}}\geq\frac{x+y+z}{3}$ 即 $x^3+y^3+z^3\geq\frac{(x+y+z)^3}{9}$

由均值不等式得

$(1+x)(1+y)(1+z)\leq(\frac{3+x+y+z}{3})^3$ 故 $\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\geq\frac{27}{(3+x+y+z)^3}$

于是$\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\bullet\frac{3+x+y+z}{(1+x)(1+y)(1+z)}\geq\frac{1}{3}\frac{(x+y+z)^3}{9}\frac{27(3+x+y+z)}{(3+x+y+z)^3}$

$$=\frac{(x+y+z)^3}{(3+x+y+z)^2}=\frac{x+y+z}{(\frac{3}{x+y+z}+1)^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{(\frac{3}{3\sqrt[3]{xyz}}+1)^2}=\frac{3}{4}$$

952、(不等式)

如果 a,b,c,d,e 为实数，且 a+b+c+d+e=8,$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,试求 e 的最大值。

解：由柯西不等式得

$$(1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2)\ge(a+b+c+d)^2$$

于是 $4(16-e^2)\ge(8-e)^2$ 即 $5e^2-16e\le0$

解得 $0\le e\le\dfrac{5}{16}$，故 e最大＝$\dfrac{16}{5}$

953、(不等式) (解三角形) (竞赛)

已知 A,B,C 为三角形的三个内角,x, y,z 为任意实数,

求证：$x^2+y^2+z^2\ge 2xy\cos A+2yz\cos B+2xz\cos C$

证法 1：$x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2yz\cos B-2xz\cos C$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+y^2+z^2+2yz\cos(A+C)$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+(y\cos A+z\cos C)^2+(y\sin A-z\sin C)^2$

$=[x-(y\cos A+z\cos C)]^2+(y\sin A-z\sin C)^2\ge0$ 故原式成立

证法 2：$x^2+y^2+z^2-2xy\cos A-2yz\cos B-2xz\cos C$

$=x^2-2x(y\cos A+z\cos C)+y^2+z^2-2yz\cos B$

$\Delta=4(y\cos A+z\cos C)^2-4(y^2+z^2-2yz\cos B)$

$=-4y^2\sin^2A-4z^2\sin^2C+8yz[\cos A\cos C-\cos(A+C)]$

$=-4y^2\sin^2A-4z^2\sin^2C+8yz\sin A\sin C$

$=-4(y\sin A-z\sin C)^2\le0$

故原式成立

974、(不等式) (知识介绍) (竞赛)

问契比雪夫不等式的证明

若 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$，$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\ge\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\bullet\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\ge\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$$

证明：要证 $\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\ge\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\bullet\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ （1）

只要证 $n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\ge(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

即证 $n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\ge a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+$

$$+\cdots+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

即证 $n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$+a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1$$

$$+a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2$$

……

$$+a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}\quad（2）$$

因为 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$， $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$ 由排序不等式得

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1$

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2$

……

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}$

于是（2）式成立，因此（1）成立

同理可证 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\bullet\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\ge\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$

989、(不等式)

已知 a,b,c 属于实数,且 $a+2b+3c=6$ a+2b+3c=6,求证 $a^2+2b^2+3c^2\ge 6$

证明： $6(a^2+2b^2+3c^2)=[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2][a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]$

$\ge(a+2b+3c)^2=36$

于是 $a^2+2b^2+3c^2\ge 6$

1006、(不等式) (高考不要求)

$a_1,a_2,\cdots a_n,b_1b_2\cdots b_n$ 大于等于 0，求证：

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}$$

证明：

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)\ge\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_m}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)\ge\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_m}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$$

相加得

$$1\ge\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_m}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_m}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}$$

于是 $\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$

1013、(不等式)

已知 a,b,c,A,B,C 是实数，A,a 非零

若$|ax^2+bx+c|\le|Ax^2+Bx+C|$对于任意$x\in R$恒成立

求证：$|b^2-4ac|\le|B^2-4AC|$

证明： $|ax^2+bx+c|\le|Ax^2+Bx+C|$ 等价于

$(ax^2+bx+c)^2\le(Ax^2+Bx+C)^2$

$[(a+A)x^2+(b+B)x+c+C)][(a-A)x^2+(b-B)x+c-C)]\le 0$

（1）$\begin{cases}(a+A)x^2+(b+B)x+(c+C)\ge 0\\(a-A)x^2+(b-B)x+(c-C)\le 0\end{cases}$ 或（2）$\begin{cases}(a+A)x^2+(b+B)x+(c+C)\le 0\\(a-A)x^2+(b-B)x+(c-C)\ge 0\end{cases}$

依题意（1）或（2）对任意$x\in R$恒成立

（Ⅰ）若（1）对任意$x\in R$恒成立，

由（1）得$\begin{cases}(A+a)x^2+(B+b)x+(C+c)\ge 0 & ①\\(A-a)x^2+(B-b)x+(C-c)\ge 0 & ②\end{cases}$

则$\begin{cases}A+a\ge 0, A-a\ge 0\Rightarrow -A\le a\le A ③\\(b+B)^2-4(A+a)(C+c)\le 0 \quad ④\\(b-B)^2-4(A-a)(C-c)\le 0 \quad ⑤\end{cases}$

由④+⑤得$2b^2+2B^2-8(AC+ac)\le 0$，即$b^2-4ac\le 4AC-B^2$⑩

由③得$A>0,\dfrac{|a|}{|A|}\le 1$

由①+②得$Ax^2+Bx+C\ge 0$恒成立，故$B^2-4AC\le 0$，即 $4AC-B^2\ge 0$

由（1）得$\begin{cases}ax^2+bx+c\ge -Ax^2-Bx-C & ⑥\\ax^2+bx+c\le Ax^2+Bx+C & ⑦\end{cases}$

设$f(x)=ax^2+bx+c$， $g(x)=Ax^2+Bx+C$，

若$a>0$，由⑦得$\dfrac{4ab-b^2}{4a}=f(-\dfrac{b}{2a})\le f(-\dfrac{B}{2A})\le g(-\dfrac{B}{2A})=\dfrac{4AC-B^2}{4A}$

于是$4ab-b^2\le\dfrac{a}{A}\bullet(4AC-B^2)\le 4AC-B^2$， $b^2-4ac\ge B^2-4AC$

若$a<0$，由⑥得$\dfrac{4ab-b^2}{4a}=f(-\dfrac{b}{2a})\ge f(-\dfrac{B}{2A})\ge -g(-\dfrac{B}{2A})=-\dfrac{4AC-B^2}{4A}$

于是$4ab-b^2\le\dfrac{-a}{A}\bullet(4AC-B^2)\le 4AC-B^2$， $b^2-4ac\ge B^2-4AC$

因此总有$b^2-4ac\ge B^2-4AC$ ⑾

由⑩与⑾得$|b^2-4ac|\le|B^2-4AC|$

（Ⅱ）若（2）对任意$x\in R$恒成立，同理可证$|b^2-4ac|\le|B^2-4AC|$

综上所述，原命题成立

1117、(不等式)

在等比数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$，已知正整数k满足$a_1+a_2+\cdots+a_k=1$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=4$，则$a_1a_2\cdots a_k=$______

解：由柯西不等式得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})\ge(\sqrt{a_1\bullet\frac{1}{a_1}}+\sqrt{a_2\bullet\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt{a_k\bullet\frac{1}{a_k}})^2=k^2$$

于是$k^2\le 4$，故$k=1$或$k=2$

当$k=1$时由已知$a_1=1$且$\frac{1}{a_1}=4$矛盾

故$k=2$，$a_1+a_2=1$，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=4$解得$a_1a_2=\frac{1}{4}$

1157、(不等式)

实数 x,y 满足$x^2+y^2=4$，则$\frac{2xy}{x+y-2}$的最小值是______

解：设$x+y-2=t$，则$(x+y)^2=(t+2)^2$，$2xy=(t+2)^2-4=t^2+4t$

于是$\frac{2xy}{x+y-2}=\frac{t^2+4t}{t}=t+4$

$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=8$，$x+y\ge -2\sqrt{2}$，$t=x+y-2\ge -2\sqrt{2}-2$

于是$\frac{2xy}{x+y-2}=t+4\ge -2\sqrt{2}+2$

1187、(不等式) (高考不要求)

$x^2+2xy-y^2=7$,则 x^2+y^2 的最小值是？

解：$x=ty$，代入 $x^2+2xy-y^2=7$，得$t^2y^2+2ty^2-y^2=7$

于是$y^2=\frac{7}{t^2+2t-1}$，$z=x^2+y^2=(t^2+1)y^2=\frac{7(t^2+1)}{t^2+2t-1}$

$zt^2+2zt-z=7t^2+7$，$(z-7)t^2+2zt-z-7=0$

（1）当$z\ne 7$时，$\Delta=4z^2+4(z-7)(z+7)=8z^2-4\times 49\ge 0$

解得$z\le -\frac{7\sqrt{2}}{2}$或$z\ge\frac{7\sqrt{2}}{2}$

因为$z>0$，故$z\ge\frac{7\sqrt{2}}{2}$且$z\ne 7$

（2）当z=7 时，$t=1$，于是z=7 也适合

综上$z\ge\frac{7\sqrt{2}}{2}$，于是 x^2+y^2 的最小值为$\frac{7\sqrt{2}}{2}$

1301、已知 $x^2+y^2=1$，求证： $-\sqrt{2}\le x^2+2xy-y^2\le\sqrt{2}$
不用三角函数怎样证？

证明：设 $y=tx$， 则代入 $x^2+y^2=1$， $x^2+(tx)^2=1$， 则 $x^2=\dfrac{1}{1+t^2}$

设 $z=x^2+2xy-y^2=x^2+2tx^2-(tx)^2=x^2(1+2t-t^2)=\dfrac{1+2t-t^2}{1+t^2}$

故 $(z+1)t^2-2t+z-1=0$， $\Delta=4-4(z+1)(z-1)\ge 0$， 解得 $-\sqrt{2}\le z\le\sqrt{2}$

1321
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22448&show=0

若 a,b,c>0且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$，则 $2a+b+c$ 的最小值为（　）

（A） $\sqrt{3}-1$　　（B） $\sqrt{3}+1$　　（C） $2\sqrt{3}+2$　　（D） $2\sqrt{3}-2$

解 1： $(2a+b+c)^2=4a^2+b^2+c^2+4ab+4ac+2bc=$

$4[a(a+b+c)+bc]+b^2+c^2-2bc=4(4-2\sqrt{3})+(b-c)^2\ge 4(4-2\sqrt{3})=4(\sqrt{3}-1)^2$

于是 $2a+b+c\ge 2(\sqrt{3}-1)$ 选 D

解 2：

$$a(a+b+c)+bc=a^2+ab+ac+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}bc$$

$$\le a^2+ab+ac+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{4}(b^2+c^2)=\frac{1}{4}(2a+b+c)^2$$

1325
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22470&start=0#bottom
柯西不等式的证明，
设 $a_i\in R,b_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$

则 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$：

证法 1：因为 $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\ge 0$ 对 $x\in R$ 恒成立
即 $(a_1{}^2+a_2{}^2\cdots+a_n{}^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1{}^2+b_2{}^2\cdots+b_n{}^2)\ge 0$
对 $x\in R$ 恒成立， 于是
$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\le 0$
所以 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$
证法 2：
设 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， 则

$$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}\sqrt{(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2}}\le 1$$

所以 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$

1326
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22470&start=0#bottom

排序不等式的证明

设有两组数 $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n$， $b_1, b_2, \mathbf{L}, b_n$ 满足 $a_1 \le a_2 \le \mathbf{L} \le a_n$ ，$b_1 \le b_2 \le \mathbf{L} \le b_n$， $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \mathbf{L}, a_n b_{in}$ 是 $b_1, b_2, \mathbf{L}, b_n$ 的一个排列则有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \mathbf{L} + a_n b_1 \le a_1 b_{i1} + a_2 b_{i2} + a_3 b_{i3} \mathbf{L} + a_n b_{in} \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \mathbf{L} = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \mathbf{L} = b_n$ 时上式取等号的证明

证明：设 $T_1 = a_1 b_{i1} + a_2 b_{i2} + a_3 b_{i3} \mathbf{L} + a_n b_{in}$， $b_{ik} = b_1$

在 T_1 中我们让 $a_1 b_{i1} + a_k b_{ik}$ 变成 $a_1 b_{ik} + a_k b_{i1}$，其他的项不变，

记变后的式子为 T_2，则

$T_1 - T_2 = a_1 b_{i1} + a_k b_{ik} - a_1 b_{ik} - a_k b_{i1} = a_1 (b_{i1} - b_{ik}) + a_k (b_{ik} - b_{i1})$

$= (a_1 - a_k)(b_{i1} - b_{ik})$

因为 $a_1 \le a_k, b_{i1} \ge b_1 = b_{ik}$， 所以 $T_1 \le T_2$

由此可见中按上面的方法，把 b_1 调到与 a_1 相乘，调后的式子变大（或不变），接着把把 b_2 调到与 a_2 相乘，一样有调后的式子变大（或不变），如此调整下去，直到调整成 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n$ 为最大。

于是 $a_1 b_{i1} + a_2 b_{i2} + a_3 b_{i3} \mathbf{L} + a_n b_{in} \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \mathbf{L} + a_n b_n$

同理可证：$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \mathbf{L} + a_n b_1 \le a_1 b_{i1} + a_2 b_{i2} + a_3 b_{i3} \mathbf{L} + a_n b_{in}$

1348
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23526&start=12&show=0

若$|a|+|b|<1$，证明方程$x^2+ax+b=0$的两个实根的绝对值小于1

证明： 设$x^2+ax+b=0$的两根为x_1,x_2，则

$x_1+x_2=-a$， $x_1x_2=b$

因$|a|+|b|<1$，故$1>|x_1+x_2|+|x_1x_2|$（1）

故$(x_1-1)(x_2-1)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2>|x_1+x_2|+|x_1x_2|-(x_1+x_2)+x_1x_2\geq 0$

即$(x_1-1)(x_2-1)>0$故$\begin{cases}x_1-1>0\\x_2-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}x_1-1<0\\x_2-1<0\end{cases}$

因$x_1>1且x_2>1$，则（1）不成立

故$x_1<1且x_2<1$

因$(x_1+1)(x_2+1)=1+(x_1+x_2)+x_1x_2>|x_1+x_2|+|x_1x_2|+(x_1+x_2)+x_1x_2\geq 0$

即$(x_1+1)(x_2+1)>0$故$\begin{cases}x_1+1>0\\x_2+1>0\end{cases}$或$\begin{cases}x_1+1<0\\x_2+1<0\end{cases}$

因$x_1<-1且x_2<-1$，则（1）不成立

故$x_1>-1且x_2>-1$

综上，$-1<x_1<1$且$-1<x_2<1$

故$|x_1|<1且|x_2|<1$

1349
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0

a、b、c 属于有理数 且满足|a|<1 |b|<1 |c|<1 求证：ab+bc+ca+1>0

证：

（1）当 a、b、c 至少一个为零时，显然成立

（2）当 a,b,c 同号，则 ab,bc,ac 都为正数，不等式成立

（3）当 a、b、c 两正一负时，不妨设 a>0、b>0、c<0，则
ab+bc+ca+1=ab+c(a+b)+1> ab-(a+b)+1=(a-1)(b-1)>0

（4）当 a、b、c 两负一正时，不妨设 a<0、b<0、c>0 则，
ab+bc+ca+1=ab+c(a+b)+1> ab+(a+b)+1=(a+1)(b+1)>0

综上所述，原式成立

1350
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0

a、b、c、d 都是正数 求证下列不等式中至少有一个不正确。

（1） a+b<c+d（2）.(a+b)(c+d)<ab+cd（3）.(a+b)cd<ab(c+d)

证明：假设（1）（2）（3）都成立

由（3）.(a+b)cd<ab(c+d)≤$\frac{(a+b)^2}{4}(c+d)$，得$(a+b)(c+d)>4cd$

又有（2）.(a+b)(c+d)<ab+cd

故$ab+cd>4cd$，即$cd<\frac{1}{3}ab$（4）

由（1） a+b<c+d 和（2）.(a+b)(c+d)<ab+cd，

得$(a+b)^2<ab+cd$， $4ab<ab+cd$， $cd>3ab$ ，（5）

由（4）（5）得$\frac{1}{3}ab>3ab$，故$ab<0$，与已知矛盾

1367
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=24081&start=0&show=0

已知：$0<a,b,c<1$， $ab+bc+ac=1$

求$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}$的最小值，并给出证明

解：$ab+bc+ac\le\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2+c^2}{2}=a^2+b^2+c^2$

即$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

于是$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\ge 3(ab+bc+ac)=3$

所以$a+b+c\ge\sqrt{3}$

又$0<a,b,c<1$，于是$\sqrt{3}\le a+b+c<3$

$$(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c})[(1-a)+(1-b)+(1-b)]$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1-a)(1-a)(1-a)}}\bullet 3\sqrt[3]{(1-a)(1-a)(1-a)}=9$$

于是$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}\ge\dfrac{9}{3-(a+b+c)}\ge\dfrac{9}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$

等号成立的条件是$\begin{cases}a=b=c\\a+b+c=\sqrt{3}\end{cases}$解得$a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

于是当$a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1-c}$最小值$=\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$

1368
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=24194&start=12&show=0

已知$a>0.b>0,a+b=1$，求证$(a+\dfrac{1}{a^2})(b+\dfrac{1}{b^2})\ge\dfrac{81}{4}$

证法 1：$(a+\dfrac{1}{a^2})(b+\dfrac{1}{b^2})=ab+\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\ ab+\dfrac{1}{ab}+2$

$$ab+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{a(a+b)}{b^2}+\frac{b(a+b)}{a^2}=ab+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge ab+\frac{1}{a^2b^2}+4$$

设$x=ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，则$ab+\dfrac{1}{a^2b^2}=f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

因 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^3}<0$，故 $f(x)$ 在（0，$\dfrac{1}{4}$]上递减，

故 $f(x)\ge f(\dfrac{1}{4})=\dfrac{65}{4}$，即 $ab+\dfrac{1}{a^2b^2}\ge\dfrac{65}{4}$

$(a+\dfrac{1}{a^2})(b+\dfrac{1}{b^2})\ge\dfrac{65}{4}+4=\dfrac{81}{4}$

证法 2: $(a+\dfrac{1}{a^2})(b+\dfrac{1}{b^2})=ab+\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\ ab+\dfrac{1}{ab}+2$

$ab+\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{a(a+b)}{b^2}+\dfrac{b(a+b)}{a^2}=ab+\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge ab+\dfrac{1}{a^2b^2}+4$

因 $ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2=\dfrac{1}{4}$

故 $ab+\dfrac{1}{a^2b^2}-\dfrac{65}{4}=\dfrac{4a^3b^3-65a^2b^2+4}{4a^2b^2}=\dfrac{(4ab-1)(a^2b^2-4ab-4)}{a^2b^2}\ge 0$

于是 $ab+\dfrac{1}{a^2b^2}\ge\dfrac{65}{4}$

所以 $(a+\dfrac{1}{a^2})(b+\dfrac{1}{b^2})\ge\dfrac{65}{4}+4=\dfrac{81}{4}$

1410、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=288583&page=1#pid2998125

已知正实数，a,b,c 满足 $a+b+c=1$

求证：$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\le\dfrac{27}{10}$

证明：

$$\frac{1}{a^2+1}-\frac{9}{10}+\frac{9}{50}(3a-1)=\frac{5(1+3a)(1-3a)+9(3a-1)(a^2+1)}{50(a^2+1)}=\frac{5(1-3a)^2(3a=4)}{50(a^2+1)}\le 0$$

即 $\dfrac{1}{a^2+1}\le\dfrac{9}{10}-\dfrac{9}{50}(3a-1)$，同理 $\dfrac{1}{b^2+1}\le\dfrac{9}{10}-\dfrac{9}{50}(3b-1)$，$\dfrac{1}{c^2+1}\le\dfrac{9}{10}-\dfrac{9}{50}(3c-1)$

于是三式相加得：$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}\le\dfrac{27}{10}$

注：之所以能找出 $-\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{50}(3a-1)$ 是通过待定系数法得到的

再举一个例子：设正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求证：$\dfrac{3+a}{a^2+1}+\dfrac{3+b}{b^2+1}+\dfrac{3+c}{c^2+1}\le 9$

分析：由于当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时原式取等号，且 $\dfrac{3+a}{a^2+1}=3$

于是设 $\dfrac{3+a}{a^2+1}-3=m(a-\dfrac{1}{3})$ 其中 m 为待定系数，令 $a=\dfrac{1}{3}$ 得，$m=-\dfrac{9}{10}$

可以证明 $\dfrac{3+a}{a^2+1}-3\le-\dfrac{9}{10}(a-\dfrac{1}{3})$，

同理证明 $\dfrac{3+b}{b^2+1}-3\le-\dfrac{9}{10}(b-\dfrac{1}{3})$，$\dfrac{3+c}{c^2+1}-3\le-\dfrac{9}{10}(c-\dfrac{1}{3})$

三式相加就证明了原不等式

1417、
赫尔德不等式

若 $a_i \in R_+, b_i \in R_+ (i=1,2,\cdots,n)$， $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$， $p>0, q>0$

则 $(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}} \ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

证明：令 $x_1=\frac{a_1}{(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}}, y_1=\frac{b_1}{(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}}}$

由 $\frac{x_1{}^p}{p}+\frac{y_1{}^q}{q} \ge x_1y_1$ 得

$$\frac{a_1{}^p}{p(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)}+\frac{b_1{}^q}{q(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)} \ge \frac{a_1}{(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}} \bullet \frac{b_1}{(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}}}$$

同理

$$\frac{a_2{}^p}{p(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)}+\frac{b_2{}^q}{q(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)} \ge \frac{a_2}{a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p} \bullet \frac{b_2}{b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q}$$

……

$$\frac{a_n{}^p}{p(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)}+\frac{b_n{}^q}{q(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)} \ge \frac{a_n}{(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}} \bullet \frac{b_n}{(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}}}$$

于是 $1=\frac{1}{p}(\frac{a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p}{a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p})+\frac{1}{q}(\frac{b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q}{b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q})$

$$\ge \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}}}$$

于是 $(a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}} \ge a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

a 次幂平均数，设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 n 个正数， $a \ne 0$，

称 $\mathrm{M}(a)=(\frac{b_1{}^a+b_2{}^a+\cdots+b_n{}^a}{n})^{\frac{1}{a}}$ 为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的 a 次幂平均数，

1418、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=289921&page=1#pid3010918

幂平均不等式怎么证啊?

幂平均数不等式:

设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的 a，b 次幂平均数分别为 $\mathrm{M}(a)$ 和 $\mathrm{M}(b)$，则当 $a < b$ 时 $\mathrm{M}(a) \le \mathrm{M}(b)$，当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时取到等号。

要证 $\left(\dfrac{b_1{}^a + b_2{}^a + \cdots + b_n{}^a}{n}\right)^{\frac{1}{a}} \ge \left(\dfrac{b_1{}^b + b_2{}^b + \cdots + b_n{}^b}{n}\right)^{\frac{1}{b}} \ (a > b)$

只要证 $\left(\dfrac{b_1{}^a + b_2{}^a + \cdots + b_n{}^a}{n}\right)^{\frac{b}{a}} \ge \dfrac{b_1{}^b + b_2{}^b + \cdots + b_n{}^b}{n}$

由 $(b_1{}^a + b_2{}^a + \cdots + b_n{}^a)^{\frac{1}{\frac{a}{b}}} (1 + 1 + \cdots 1)^{1 - \frac{1}{\frac{a}{b}}} \ge b_1{}^b + b_2{}^b + \cdots + b_n{}^b$

$(b_1{}^a + b_2{}^a + \cdots + b_n{}^a)^{\frac{b}{a}} n^{1 - \frac{b}{a}} \ge b_1{}^b + b_2{}^b + \cdots + b_n{}^b$

1419、平均数不等式

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个正数，则，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，当且仅当

$a_1=a_2=\cdots=a_n$时上式取“＝”号

这个定理的证法很多，每一种证法都是不等式证明的精典，我认为高中生最好理解的证法是

先证引理：若$b_i\in R_+(i=1,2,\cdots,n)$，$b_1b_2\cdots b_n=1$，则$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge n$，当且仅当$b_1=b_2=\cdots=b_n=1$时“＝”成立

证明：当$n=1$时显然

假设当$n=k$时若$b_1b_2\cdots b_k=1$时，都有$b_1+b_2+\cdots+b_k\ge k$，当且仅当$b_1=b_2=\cdots=b_k=1$时“＝”成立

则当$n=k+1$时，因$b_1b_2b_3\cdots b_kb_{k+1}=1$于是在$b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1}$不可能全大于 1，也不可能全小于 1

于是总有一个大于或等于 1，另一个小于或等于 1

不妨设$b_1\ge1,b_2\le1$

因为$(b_1b_2)b_3\cdots b_kb_{k+1}=b_1b_2b_3\cdots b_kb_{k+1}=1$

由归纳法假设$b_1b_2+b_3\cdots+b_{k+1}\ge k$

故$b_1+b_2+b_3\cdots+b_k+b_{k+1}=b_1b_2+b_3\cdots+b_k+b_{k+1}+b_1+b_2-b_1b_2$

$\ge k+b_1(1-b_2)+b_2=k+1+b_1(1-b_2)+b_2-1=k+1+(1-b_2)(b_1-1)\ge k+1$

当且仅当$b_1=b_2=b_1b_2=b_3\cdots=b_{k+1}=1$时“＝”成立，故引理成立

再证定理

设$b_i=\dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$，则$b_1b_2\cdots b_n=1$，由引理得

$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge n$，即$\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\dfrac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\cdots+\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ge n$

故$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$