廖老师网上千题解答分类十七、大纲二次曲线

100、设抛物线 y=-x^2+4 与直线 y=3x 的交点为 A、B，P 是抛物线上 A、B 之间的动点

（1）求当三角形 ABP 的面积最大时 P 的坐标

（2）若当与 AB 平行的直线与抛物线交于 C、D 两点，求证：线段 CD 始终被平行于 y 轴的定直线平分。

解：（1）联立 y=-x^2+4 与 y=3x 解得 A（-4，-12）、B（1，3）

设 P（x，-x^2+4）是抛物线上是 A、B 之间的动点，$-4<x<1$

则 P 到 AB 的距离 $d=\frac{|3x+x^2-4|}{\sqrt{10}}=\frac{-x^2-3x+4}{\sqrt{10}}=\frac{-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}}{\sqrt{10}}\le\frac{25}{4\sqrt{10}}$

当 x=$-\frac{3}{2}$时 d 最大，即有三角形 ABP 的面积最大此时 P 的坐标是（$-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$）

（2）AB 的斜率是 3，线段 CD 所在的直线方程是 y=3x+b

联立 y=3x+b 与 y=-x^2+4 消 y 得 x^2+3x+b -4＝0

则 x_C+x_D=-3，因此 CD 的中点总在直线 $x=-\frac{3}{2}$ 上

118、椭圆 C：是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个交点是 F_1和F_2，的 P 在 C 上（但不在 y 轴上）。求 $\angle F_1PF_2$ 的取值范围。

解：$a=2$，$c=\sqrt{3}$

设 $|PF_1|=r_1$　　$|PF_2|=r_2$，$r_1+r_2=2a=4$

则 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^2+r_2-(2c)^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-(2c)^2}{2r_1r_2}$

$=\frac{4-2r_1r_2}{2r_1r_2}==\frac{2}{r_1r_2}-1\ge\frac{2}{(\frac{r_1+r_2}{2})^2}-1=-\frac{1}{2}$，故 $0<\angle F_1PF_2\le120°$

127、已知圆 C:x^2+y^2-6x-55=0 若一动圆 M 通过点 P(-3,0)且与圆 C 内切，试求 M 的圆心的轨迹方程

解：$C:(x-3)^2+y^2=64$，圆心为点 C（3，0）

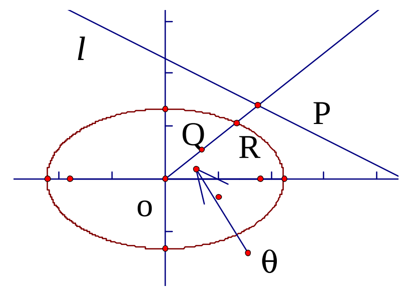
设动圆 M 半径为 r，圆 M 的圆心为 M，则 $|MC|=8-r$，$|MP|=r$

$\therefore|MC|+|MP|=8$

故圆心 M 的轨迹是以 C、P 为焦点的椭圆，其中 $a=4,c=3$，$b^2=7$

所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

178、设已知椭圆$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$，直线$l:\dfrac{x}{24}+\dfrac{y}{8}=1$，P 是$l$上的一点，射线 OP 交椭圆与点 R，有点 Q 在 OP 上，并且满足$|OQ||OP|=|OR|^2$，当点 P 在直线上移动时，求 Q 的轨迹方程



解：设$\angle xOP=q$,$|OQ|=r$， $|OR|=r_1$

$|OP|=r_2$， $Q(x,y)$

则$x=r\cos q$ ① $y=r\sin q$ ② $rr_2=r_1{}^2$③

∵ $R(r_1\cos q,y=r_1\sin q)$

$P(r_2\cos q,y=r_2\sin q)$分别在椭圆和直线上

∴ $\dfrac{r_1{}^2\cos^2 q}{24}+\dfrac{r_1{}^2\sin^2 q}{16}=1$④， $\dfrac{r_2\cos q}{24}+\dfrac{r_2\sin q}{8}=1$⑤

$\dfrac{r_1{}^2\cos^2 q}{24}+\dfrac{r_1{}^2\sin^2 q}{16}=\dfrac{r_2\cos q}{24}+\dfrac{r_2\sin q}{8}$⑥

把③代入⑥，并利用①②得

$\dfrac{rr_2\cos^2 q}{24}+\dfrac{rr_2 in^2 q}{16}=\dfrac{r_2\cos q}{24}+\dfrac{r_2\sin q}{8}$

$\dfrac{r^2\cos^2 q}{24}+\dfrac{r^2\sin^2 q}{16}=\dfrac{r\cos q}{24}+\dfrac{r\sin q}{8}$

$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=\dfrac{x}{24}+\dfrac{y}{8}$（原点除外）为所求的方程

190 、已知$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$内有一点$M(1,-1)$F 为椭圆的右焦点，在椭圆上有一动点 P，求$|PM|+|PF|$ 最值。

解：左焦点为 F_1（-1，0），则

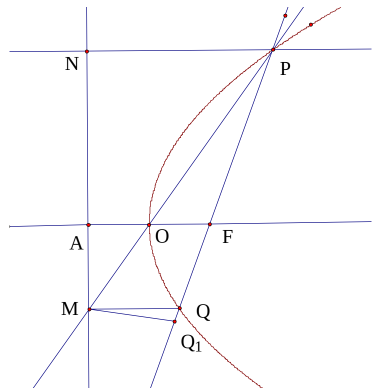
$|PM|+|PF|=$ $|PM|+4-|PF_1|$

当 P、M、F 三点共线时$|PM|-|PF_1|$取到最值

$|PM|-|PF_1|$最大为$|MF_1|=\sqrt{5}$， 最小为$-|MF_1|=-\sqrt{5}$

故$|PM|+|PF|$ 最大为$4+\sqrt{5}$， 最小为$4-\sqrt{5}$

235、过抛物线的焦点的一条直线与抛物线交于两点 P、Q，经过点 P 和抛物线的顶点的直线交准线于点 M，求证 MQ 平行于抛物线的对称轴



证明：用同一法

过 M 点作 MQ_1 // 对称轴 AF 交直线 PQ 于点 Q_1

作 PN // 对称轴 AF 交准线于点 N

则 $\dfrac{OA}{PN}=\dfrac{MO}{MP}=\dfrac{Q_1F}{PQ_1}$， $\dfrac{OF}{MQ_1}=\dfrac{PF}{PQ_1}$，

$\because OA=OF$

$\therefore PN\bullet\dfrac{Q_1F}{PQ_1}=MQ_1\bullet\dfrac{PF}{PQ_1}$， 又 $PN=MQ_1$

故 $Q_1F=MQ_1$，即 Q_1 在抛物线上，因此

点 Q_1 与点 Q 重合，命题得证

272、设定点 P 的坐标为 (x_0,y_0),点 M 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上,求|MP|R 的最小值

答：几何处理作出以定点为圆心的圆与椭圆相切就行了，代数计算不容易。对于特殊的情况可以选择直接消元或三解代换

291、若直线 y=x+m 和 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，当 m 变化时，

（1）求丨AB丨的最大值

（2）求△AOB 面积的最大值（0 为坐标原点）

解：联立 y=x+m 与 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 消去主 y 得

$\dfrac{x^2}{4}+(x+m)^2=1$， 即 $5x^2+8mx+4m^2-4=0$

$\Delta=64m^2-80(m^2-1)=16(5-m^2)>0$， $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$

丨AB丨＝$\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{\Delta}}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{16(5-m^2)}$，当 $m=0$ 时丨AB丨最大＝$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

（2）原点到直线 x-y+m＝0 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$

故 $S=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}\bullet\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{m^2(5-m^2)}\le\dfrac{2}{5}\sqrt{(\dfrac{5}{2})^2}=1$

故当 $m^2=\dfrac{5}{2}$ 即 $m=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时△AOB 面积的最大，最大值为 1

293、若抛物线 $y=ax^2-1$ 上存在 AB 2 点关于直线 x+y=0 对称求实数 a 的取值范围

解 1：假设抛物线 $y=ax^2-1$ 上存两点 A 和 B 满足条件

设 A（m，n）则它关于直线 x+y=0 对称点 B（$-n,-m$）

由于 A，B 在抛物线 $y=ax^2-1$ 上，故

$n=am^2-1$（1）且 $-m=an^2-1$（2）

相减得 $m+n=a(m^2-n^2)$

因 $m\neq n$，$a\neq 0$ 故 $m-n=\frac{1}{a}$，$m=\frac{1}{a}+n$ 代入（2）得

$an^2+n+\frac{1}{a}-1=0$

$\Delta=1-4a\ (\frac{1}{a}-1)>0$，得 $a>\frac{3}{4}$

解 2、假设抛物线 $y=ax^2-1$ 上存两点 A 和 B 满足条件

设直线 A B 的方程为 $y=x+b$，A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)

联立 $y=x+b$，$y=ax^2-1$ 消 y 得

$ax^2-x-b-1=0$

则 $x_1+x_2=\frac{1}{a}$，$\Delta=1+4a(b+1)>0$（1）

设弦 A B 中点 (x_0,y_0)

则 $x_0=\frac{1}{2a}$，$x_0+y_0=0$，$y_0=x_0+b$

消去 x_0,y_0 得 $-\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}+b$ 故 $b=-\frac{1}{a}$ 代入（1）

$1+4a\ (-\frac{1}{a}+1)>0$，得 $a>\frac{3}{4}$

382、双曲线的中心在原点，坐标轴为对称轴，两条渐近线互相垂直且过点（-2，0）的双曲线方程________。

解：设方程为 $x^2-y^2=l$

（-2，0）代入方程求出 l=4，得出方程 x^2 - y^2 = 4

393 、$a \in (0,\frac{p}{2})$，方程 $x^2\sin a + y^2\cos a = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 a 的取值范围是多少？

解：$\dfrac{x^2}{\frac{1}{\sin a}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{\cos a}} = 1$

因，焦点在 y 轴上的椭圆，$a \in (0,\frac{p}{2})$

故 $\dfrac{1}{\sin a} < \dfrac{1}{\cos a}$，$\cos a < \sin a$，$a \in (\frac{p}{4},\frac{p}{2})$

394 、点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ 上的一点，F_1，F_2 是焦点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，则三角形 F_1PF_2 的面积为多少？

解：$S_{\Delta F1PF2} = \frac{1}{2} PF_1 \bullet PF_2 \sin \angle F_1PF_2$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中

$$F_1F_2^{\ 2} = PF_1^{\ 2} + PF_2^{\ 2} - 2PF_1 \bullet PF_2 \cos\angle F_1PF_2$$

$$= (PF_1 + PF_2)^2 - 2PF_1 \bullet PF_2 - 2PF_1 \bullet PF_2 \cos\angle F_1PF_2$$

$$= (PF_1 + PF_2)^2 - 2PF_1 \bullet PF_2 (1 + \cos\angle F_1PF_2)$$

$$PF_1 \bullet PF_2 = [(PF_1 + PF_2)^2 - F_1F_2^{\ 2}] / [2(1 + \cos\angle F_1PF_2)]$$

$$= [(2a)^2 - (2c)^2] / [2(1 + \cos\angle F_1PF_2)] == 2b^2 / (1 + \cos\angle F_1PF_2)$$

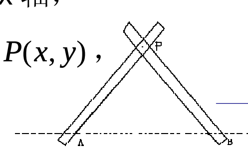
$$S_{\Delta F1PF2} = \frac{1}{2} PF_1 \bullet PF_2 \sin\angle F_1PF_2 = b^2 \sin\angle F_1PF_2 / (1 + \cos\angle F_1PF_2)$$

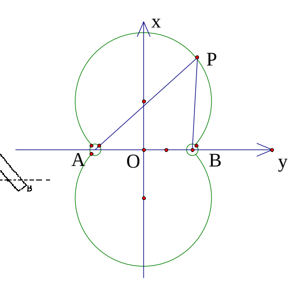
$$= b^2 \tan\frac{1}{2}\angle F_1PF_2 = 64\tan\frac{60°}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$$

399、如图所示,两根带有滑道的铁杆,分别绕着定点 A 和 B(|AB|=2a)在平面内转动,并且转动时两杆保持交角为 45°,求两杆交点 P 的轨迹

解：以 AB 中点为原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，

建立平面直角坐标系则 A(-a,0)，A(a,0)，设 $P(x,y)$，





因 $\angle APB = 45°$，

故 $\left| \dfrac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \bullet \frac{y}{x-a}} \right| = 1$　即 $|x^2 + y^2 - a^2| = |2ay|$

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2 (y > 0) \text{或} x^2 + (y+a)^2 = a^2 (y < 0)$$

401、设 P 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点，∠$F_1PF_2$=30°，则三角形 F_1PF_2 的面积为多少？解：$S_{\Delta F1PF2}=b^2\tan\frac{1}{2}\angle F_1PF_2=16\tan\frac{30°}{2}=16(2-\sqrt{3})$

公式推导见第 394 题

410、椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上有一点 P 使得 $OP \wedge PA$（O 为原点,A 为椭圆长轴的一个端点),试求椭圆离心率的取值范围　(非常好的编题方法)

解：因$OP\perp PA$

故点 P 在圆$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$（$y\neq 0$）(1）上

又点 P 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<x<a)$（2）上

故方程组（1）(2）在$0<x<a$上有解

由（1）(2）消去 y 得

$(x-\frac{a}{2})^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=\frac{a^2}{4}-b^2(a>b>0)$（$0<x<y$）

即$(a^2-b^2)x^2-a^3x+a^2b^2=0$

$x_1=a$（舍去）或$x_2=\frac{ab^2}{a^2-b^2}$

由$\frac{ab^2}{a^2-b^2}<a$得，$2b^2<a^2$，$2(a^2-c^2)<a^2$，$a^2<2c^2$

$e=\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$0<e<1$，故$\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$

413、过定点 A(-2,-1)倾斜角为 45° 的直线与抛物线 $y=ax^2$ 交与 B,C,且|BC|是|AB|.|AC|的比例中项,求抛物线方程

解：直线 BC 的方程是：$y+1=x+2$即$y=x+1$与$y=ax^2$联立消去y得

$ax^2-x-1=0$，设$B(x_1,x_1+1)$，$C(x_2,x_2+1)$

则$x_1+x_2=\frac{1}{a}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a}$，$\Delta=1+4a>0$，$a>-\frac{1}{4}$

则$|BC|^2=2(x_1-x_2)^2=2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=2(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a})$

$|AB||AC|=\sqrt{2(x_1+2)^2}\sqrt{2(x_2+2)^2}=2\sqrt{(x_1x_2+2x_1+2x_2+4)^2}$

$=2\sqrt{(\frac{1}{a}+4)^2}=2|\frac{1}{a}+4|$

因$|BC|^2=|AB||AC|$，故$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a}=|\frac{1}{a}+4|$解得$a_1=-1$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=-\frac{1}{4}$

由于$a>-\frac{1}{4}$故$a=\frac{1}{4}$,因此抛物线方程是$y=\frac{1}{4}x^2$

430、点 P 是以 F_1，F_2 为焦点椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点，$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$，

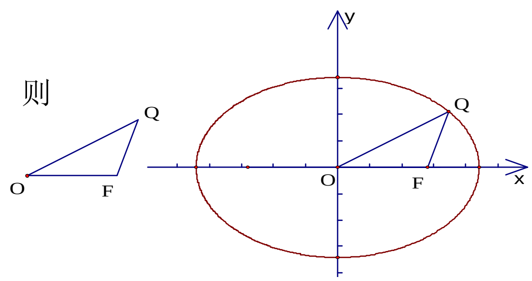
$\tan\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}$，求此椭圆的离心率。

解：$\angle F_1PF_2=90°$，$\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{1}{2}$，可设 $|PF_1|=2t$，$|PF_2|=t$，则 $2c=\sqrt{5}t$

$|PF_1|+|PF_2|=3t=2a$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}t}{3t}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

431、（1）已知 ΔOFQ 面积为 S，且 $\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{FQ}=1$，若 $\dfrac{1}{2}<S<2$，求向量 $\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 的夹角 q 的取值范围。

（2）设 $|\overrightarrow{OF}|=c(c\ge 2)$，$S=\dfrac{3c}{4}$，若以 O 为中心，F 为焦点的椭圆经过 Q 点，当 $\overrightarrow{OQ}$ 取最小值时，求椭圆的方程。



解：（1）设向量 $\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 的夹角为 q，则

$\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{FQ}=|\overrightarrow{OF}|\bullet|\overrightarrow{FQ}|\cos q=1$

$\Rightarrow|\overrightarrow{OF}|\bullet|\overrightarrow{FQ}|=\dfrac{1}{\cos q}$

Δ OFQ 的面积为

S=$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OF}|\bullet|\overrightarrow{FQ}|\sin(p-q)=\dfrac{1}{2}\sin q\bullet\dfrac{1}{\cos q}=\dfrac{1}{2}\tan q$

因 $\dfrac{1}{2}<S<2$ 故 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}\tan q<2$，$1<\tan q<4$，$\dfrac{p}{4}<q<\arctan 4$

（2）如图建立直角坐标系

设 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0、$b$>0），S=$\dfrac{1}{2}\tan q=\dfrac{3}{4}c$，$\tan q=\dfrac{3}{2}c$

S=$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OF}|\bullet|\overrightarrow{FQ}|\sin(p-q)=\dfrac{1}{2}c\bullet|\overrightarrow{FQ}|\sin q=\dfrac{3}{4}c$，$|\overrightarrow{FQ}|=\dfrac{3}{2\sin q}$，

$|\overrightarrow{OQ}|^2=(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FQ})^2=\overrightarrow{OF}^2+\overrightarrow{FQ}^2+2\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{FQ}$

$=c^2+\dfrac{9}{4\sin^2 q}+2=c^2+\dfrac{9}{4}(1+\cot^2 q)+2=c^2+\dfrac{9}{4}(1+\dfrac{4}{9c^2})+2=c^2+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{17}{4}$

由 $c\ge 2$ 得 $c^2\ge 4$，故 $|\overrightarrow{OQ}|^2=c^2+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{17}{4}\ge 4+\dfrac{1}{4}+\dfrac{17}{4}=\dfrac{17}{2}$

当 $c=2$ 时 $|\overrightarrow{OQ}|_{\min}=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$，此时 $\tan q=\dfrac{3}{2}c=3$，$\sin q=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos q=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$|\overrightarrow{FQ}|=\dfrac{3}{2\sin q}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，作 $QM\perp OF$ 交 OF 的延长线于 M

则 $|QM|=|\overrightarrow{FQ}|\sin q=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\bullet\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{2}$

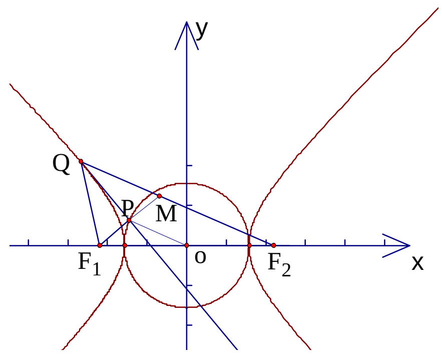
$|FM|=|\overrightarrow{FQ}|\cos q=\frac{\sqrt{10}}{2}\bullet\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}$，$|OM|=\frac{5}{2}$

故 $Q(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $\frac{25}{4a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$①

又 $a^2-b^2=c^2=4$②

由①②解得 $a^2=10,b^2=6$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$

454、设是 F_1，F_2 双曲线 x^2-y^2=4 的两个焦点，Q 是双曲线上任一点，从 F_1 引∠F_1QF_2 的平分线的垂线，垂足为 P，则 P 点的轨迹方程是(圆锥曲线)



解：延长 F_1P 交 QF_2 于点 M

因 F_1M 是∠F1QF2 的平分线的垂线，垂足为 P

故 $|PO|=\frac{1}{2}|MF_2|=\frac{1}{2}||QF_2|-|QM||$

$\frac{1}{2}||QF_2|-|QF_1||=\frac{1}{2}\times 2a=a=2$

故则 P 点的轨迹方程是

$x^2+y^2=4$

455、直线 y=kx+1 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于 A,B 两点，直线 l 过点 P（-2，0）和 AB 中点，求直线 l 在轴上截距 b 的取值范围。(圆锥曲线)

解：联立 $\begin{cases}y=kx+1\\x^2-y^2=1\end{cases}$ 消 y 得 $x^2-(kx+1)^2=1$,即 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$

因直线 y=kx+1 与双曲线 x^2-y^2=1 的左支交于 A,B 两点

$$故\begin{cases}k\neq\pm1\\\Delta=4k^2+8(1-k^2)=8-4k^2>0\\\frac{2k}{1-k^2}<0\\\frac{-2}{1-k^2}>0\end{cases}\Rightarrow 1<k<\sqrt{2}$$

设 AB 的中点为 (x_0,y_0) 则 $x_0=\frac{k}{1-k^2}$，$y_0=\frac{k^2}{1-k^2}+1=\frac{1}{1-k^2}$

因直线 l 过点 P（-2，0）和 AB 中点，故 $y=\frac{\frac{k^2}{1-k^2}}{\frac{k}{1-k^2}+2}(x+2)=\frac{k^2}{2+k-2k^2}(x+2)$

直线 l 在轴上截距 b$=\frac{2k^2}{2+k-2k^2}$

因 $1<k<\sqrt{2}$，故 b$=\frac{2}{2(\frac{1}{k})^2+\frac{1}{k}-2}$ Î (2,+¥) U (-¥,-4+2$\sqrt{2}$)

457、双曲线 x^2-y^2=a^2 的两个焦点分别为 F_1，F_2，P 为双曲线上的任意一点，求证:$|PF_1|$，$|PO|$，$|PF_2|$成等比数列。(圆锥曲线)

证明： 设$P(x,y)$则 x^2-y^2=a^2, y^2= x^2-a^2，$|PO|^2$＝x^2+y^2=2 x^2-a^2

因 x^2-y^2=a^2 的离心率为 $e=\sqrt{2}$，准线为 $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{2}a}=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

故$|PF_1|\bullet|PF_2|=e\left|x+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|\bullet e\left|x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|=2\left|x^2-\dfrac{a^2}{2}\right|=|2x^2-a^2|=2x^2-a^2$

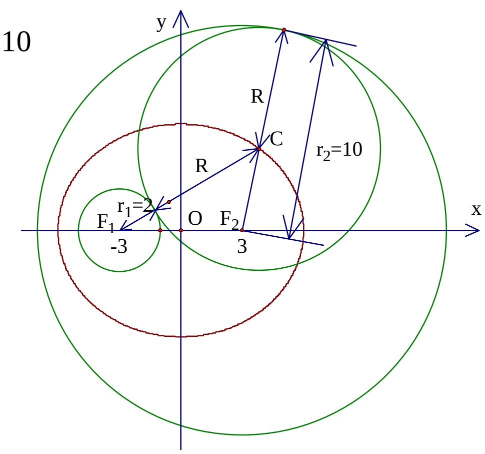
故$|PO|^2$|＝$PF_1|\bullet|PF_2|$，于是$|PF_1|,|PO|,|PF_2|$成等比数列

482、一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$外切,同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切,求动圆圆心的轨迹方程明它是什么曲线(圆锥曲线)

解：两已知圆分别是

$(x+3)^2+y^2=4$　圆心 $F_1(-3,0)$，半径$r_1=2$

$(x-3)^2+y^2=100$ 圆心 $F_2(3,0)$，半径$r_2=10$



设动圆圆心为$C(x,y)$半径是r，则

$|CF_1|=r_1+r=2+r$

$|CF_2|=r_2-r=10-r$

故$|CF_1|+|CF_2|=12$

因此C点的轨迹是一个以F_1和F_2

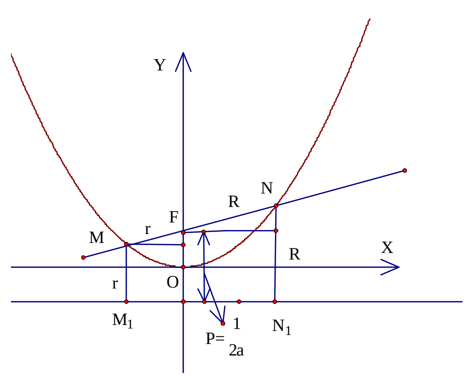
为焦点的椭圆，其中$a=6$，$c=3$

故$b=3\sqrt{3}$

所以所求的方程是：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

489、已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$(a>0)焦点为 F,一直线交抛物线上两点 M.N,设

|MF|=r,|NF|=R,求$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{R}$(圆锥曲线)



如图

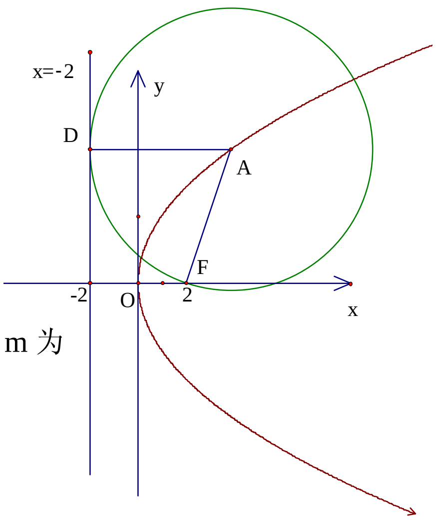
$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\frac{1}{2a}-r}{R-\frac{1}{2a}}$，　$Rr-\dfrac{r}{2a}=\dfrac{R}{2a}-Rr$

$2Rr=\dfrac{r}{2a}+\dfrac{R}{2a}$，　$4a=\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}$

495、动圆的圆心在抛物线 $y^2=8x$ 上，且动圆恒与直线 $x+2=0$ 相切，则动圆必过的定点是_______(圆锥曲线)

提示:看一看图，你就知道了

然后想一想如何证明



答:过动圆必过的定点是焦点 $F(2,0)$

因为动圆的半径是 $r=|AD|$,

而 $|FA|=|AD|=r$

498、已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(a>0,m>b>0)的离心率互为倒数，那么以 a、b、m 为边长的三角形是__________(圆锥曲线)

解：双曲线的离心率 $e_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

椭圆的离心率 $e_2=\frac{\sqrt{m^2-b^2}}{m}$

因 $e_1e_2=1$ 故 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\bullet\frac{\sqrt{m^2-b^2}}{m}=1$

$(a^2+b^2)(m^2-b^2)=a^2m^2$，$a^2m^2-a^2b^2+b^2m^2-b^4=a^2m^2$

$-a^2b^2+b^2m^2-b^4=0$，$a^2+b^2=m^2$

以 a、b、m 为边长的三角形是直角三角形

505、对于抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点 Q,点 P(a,0)都满足|PQ|≥|a|,求 a 的取值范围.

(圆锥曲线)

解：设 $Q(x,y)$，则

$|PQ|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2ax+a^2+4x}=\sqrt{(x-a+2)^2+4a-4}$

由于 $x\in[0,+\infty)$ 因此

（1）当 $a-2\geq0$ 即 $a\geq2$ 时 $|PQ|$ 最小＝ $\sqrt{4a-4}\geq|a|$ 解得 a=2

（2）当 $a-2<0$ 即 $a<2$ 时 $|PQ|$ 最小＝ $\sqrt{a^2}=|a|\geq|a|$ 解得 a< 2

综上 $a\leq2$

506、(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$上有两个动点 A,B 及一个定点 M,F 为焦点,若|AF|,|MF|,|BF|成等差数列,求证:线段 AB 的垂直平分线过定点 Q;
(2)在(1)中若|MF|=4,|OQ|=6(O 为原点),求抛物线方程. (圆锥曲线)

证明：设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(c,d)$， AB中点(x_0,y_0)

抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$,准线 $x=-\frac{p}{2}$

因|AF|,|MF|,|BF|成等差数列
故 2|MF|＝|AF|+|BF|

所以 $2(c+\frac{p}{2})=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})$

$x_1+x_2=2c$， $x_0=c$

因为 $y_1^2=2px_1$， $y_2^2=2px_2$，所以 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$

AB 的斜率＝ $k=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0}$， AB 的垂直平分线斜率 $-\frac{1}{k}=-\frac{y_0}{p}$

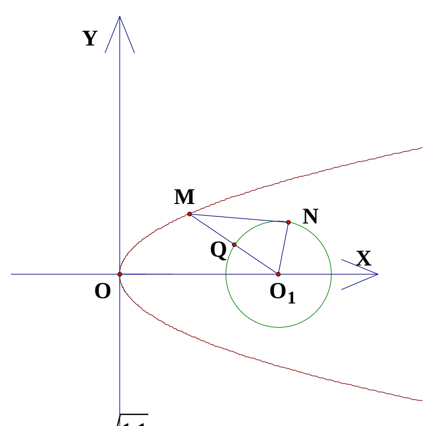
AB 的垂直平分线方程 $y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$

$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-c)$， $y=-\frac{y_0}{p}(x-c+p)$

当 $x=c-p$ 时总有 $y=0$

514、M 是抛物线 $y^2=x$ 上一点，N 是圆$(x+1)^2+(y-4)^2=1$ 关于直线 x-y+1=0 对称曲线 C 上的一点，求|MN|的最小值. (圆锥曲线)
解：圆$(x+1)^2+(y-4)^2=1$ 关于直线 x-y+1=0 对称曲线 C 的方程
$(x-3)^2+y^2=1$ 圆心 O_1（3，0），半径 R=1

$|MN|^2=|MO_1|^2-R^2=|MO_1|^2-1$



可转化为求$|MO_1|$的最小值

设 M（x,y）, $y^2=x$， $x\geq0$

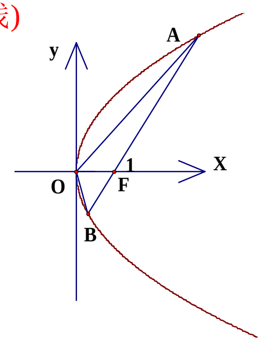
则$|MO_1|^2=(x-3)^2+y^2$

$=(x-3)^2+x=x^2-5x+9$

$=(x-\frac{5}{2})^2+\frac{11}{4}$

故当 $x=\frac{5}{2}$ 时$|MO_1|$最小＝$\frac{\sqrt{11}}{2}$， |MN|的最小值.= $\frac{\sqrt{11}}{2}-1$

515、给定抛物线 C：$y^2=4x$，F 为 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，设 l 的斜率为 1，求向量 $\overrightarrow{OA}$ 和向量 $\overrightarrow{OB}$ (圆锥曲线)



解：因 F（1,0）

故直线 AB： $y=x-1$ 与 $y^2=4x$ 联立求出

A（$1+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}$），B（$1-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2}$）

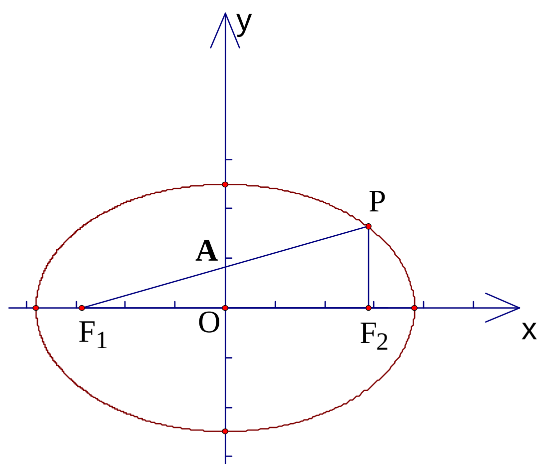
于是 $\overrightarrow{OA}=(1+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$， $\overrightarrow{OB}=(1-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$

516、中心在原点的椭圆的左右焦点为 F_1、F_2 在 x 轴上，点 P 在椭圆上.若线段 PF_1 的中点在 y 轴上那么$|PF_1|$是$|PF_2|$的(　　)

A.7 倍　　　B.5 倍　　　C.4 倍　　　D.3 倍(圆锥曲线)

解：因段 PF_1 的中点 A 在 y 轴上

故 $PF_2 \perp X$轴



$$|PF_2|=\frac{b^2}{a}$$

$$|PF_1|=2a-\frac{b^2}{a}=\frac{2a^2-b^2}{a}$$

于是 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{2a^2-b^2}{b^2}=2(\frac{a^2}{b^2})-1$

若 $\frac{a^2}{b^2}=2$ 选 D。若 $\frac{a^2}{b^2}=4$ 选 A

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{2a^2-b^2}{b^2}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{1+e^2}{1-e^2}$$

若 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 选 B。若 $e=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 选 C。

529、已知抛物线 $y=x^2$ 上三点 A、B、C，且 A(-1，1)，AB⊥BC，当点 B 在抛物线上移动时,求点 C 的横坐标的取值范围. (圆锥曲线)

解：设 $B(b,b^2)$， $C(c,c^2)$， $b\neq c$， $b\neq -1$， $c\neq -1$

因为 $AB\perp BC$, $\overrightarrow{AB}=(b+1,b^2-1)$， $\overrightarrow{BC}=(c-b,c^2-b^2)$

所以 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=(b+1)(c-b)+(b^2-1)(c^2-b^2)=0$

$1+(b+1)(c+b)=0$， $b^2+(c+1)b+1=0$

$\Delta=(c+1)^2-4\geq 0$， $c\leq -3或c\geq 1$

530、已知正方形一条边 AB 在直线 y=x+4 上，顶点 C、D 在抛物线 $y^2=x$ 上，求正方形边长。(圆锥曲线)

解：设正方形的边长为 d

则直线 CD 与直线 AB： x-y+4=0 上平行且距离为 d

可设直线 CD 的方程为 x-y+m=0，则 $\frac{|m-4|}{\sqrt{2}}=d$（1）

联立 x-y+m=0 与 y^2=x，设交点 $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$

消 x 得 y^2-y+m=0， $y_1+y_2=1, y_1y_2=m$， $1-4m>0$

$d=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})(y_1-y_2)^2}$ $\sqrt{2[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{2(1-4m)}$（2）

联立（1）（2）解得 $\begin{cases} m=-2 \\ d=3\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-6 \\ d=5\sqrt{2} \end{cases}$

正方形边长为 $3\sqrt{2}$ 或 $5\sqrt{2}$

552、已知三角形 ABC，B(-1,-1)，C(2,1).若点 A 在抛物线 y=x^2 -6 上移动,求三角形的重心 G 的轨迹方程. (圆锥曲线)

解：设 G（x,y）A(m,n)

则 $x=\frac{m+1}{3}$， $y=\frac{n}{3}$， $n=m^2-6$

故 $m=3x-1$， $n=3y$

代入 $n=m^2-6$ 得 $3y=(3x-1)^2-6$， $(x-\frac{1}{3})^2=y+2$（ $x\neq\pm\sqrt{77}/2$ ）

560、设双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的焦点为 F_1,F_2， 点 P 在双曲线上，且 $\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$，

求 $|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|$ (圆锥曲线)

解： $a=2,b=1,c=\sqrt{5}$

因为 $\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$

于是 $|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2=(2c)^2$， $(|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|)^2+2|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|=(2c)^2$

因为 $(|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|)^2=(2a)^2$，所以 $2|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|=(2c)^2-(2a)^2=4b^2=4$

于是 $|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|=2$

564、已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，求斜率为 2 的平行弦的中点轨迹方程(圆锥曲线)

解：设斜率为 2 的弦的两个端点为 (x_1,y_1)， (x_1,y_1)，弦中点为 (x,y)

则 $\dfrac{{x_1}^2}{2}+{y_1}^2=1$， $\dfrac{{x_2}^2}{2}+{y_2}^2=1$，相减得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$$

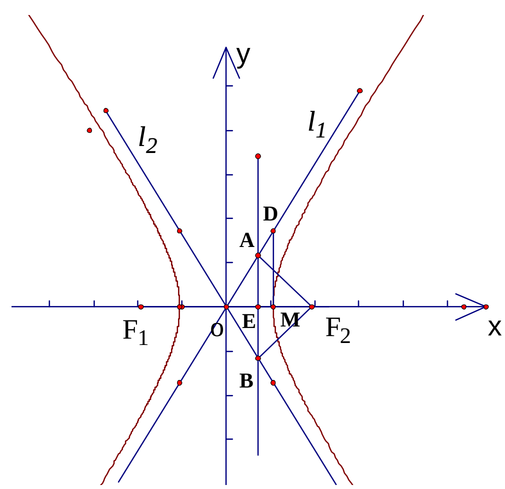
$$\frac{(x_1+x_2)}{2}+(y_1+y_2)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$$

因为 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$， $x_1+x_2=2x$， $y_1+y_2=2y$

故 $x+4y=0$ 于是所求的轨迹是直线 $x+4y=0$ 的椭圆内部的一条无端点的线段

571、 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右焦点为 F，右准线与两条渐近线交于 A、B 两点，那么双曲线的离心率为_________(圆锥曲线)

解：如图渐近线 l_1： $y=\dfrac{b}{a}x$



准线 AB： $x=\dfrac{a^2}{c}$

故 $|AE|=y_A=\dfrac{b}{a}\bullet\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{ab}{c}$，

$|EF_2|=c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{b^2}{c}$

由 $F_2A\perp F_2B$ 得， $|AE|=|EF_2|$

故 $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{b^2}{c}$， $a=b$， 于是 $e=\sqrt{2}$

594、设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 F_1,F_2，P 是椭圆上任意一点，$\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{2p}{3}$。设斜率为 k 的直线 l 交椭圆于 M、N 两点，l 与以原点为圆心，短半轴长为半径的圆相切。若 MN 长度的最大值为 4，求椭圆的方程(圆锥曲线)

解：设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$ 则 $r_1+r_2=2a$

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^2+r_2^2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{4a^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{4b^2-2r_1r_2}{2r_1r_2}=\frac{4b^2}{2r_1r_2}-1\geq\frac{4b^2}{2(\frac{r_1+r_2}{2})^2}-1=\frac{2b^2}{a^2}-1=\cos\frac{2p}{3}=-\frac{1}{2}$$

于是 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，$a^2=2b^2$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $x^2+2y^2=2b^2$

直线 $y=kx+m$ 与 $x^2+y^2=b^2$ 相切，于是 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=b$，$|m|=b\sqrt{1+k^2}$

由 $y=kx+m$ 与 $x^2+2y^2=2b^2$ 消 y 得，$x^2+2(kx+m)^2=2b^2$

即 $(2k^2+1)x^2+4mkx+2m^2-2b^2=0$

$$|MN|=\frac{\sqrt{16m^2k^2-4(2k^2+1)(2m^2-2b^2)}}{|2k^2+1|}=\frac{\sqrt{-4(-4b^2k^2+2m^2-2b^2)}}{|2k^2+1|}$$

$$=\frac{2\sqrt{4b^2k^2-2m^2+2b^2}}{|2k^2+1|}=\frac{2\sqrt{4b^2k^2-2b^2(1+k^2)+2b^2}}{|2k^2+1|}$$

$$=\frac{2\sqrt{2b^2k^2}}{2k^2+1}=\frac{2\sqrt{2}b|k|}{2k^2+1}$$ 当 $k=0$ 时 $|MN|=0$

当 $k\neq 0$ 时 $|MN|=\frac{2\sqrt{2}b}{2|k|+\frac{1}{|k|}}\leq\frac{2\sqrt{2}b}{2\sqrt{2}}=b=4$

故 $b=4$，$b^2=16$，$a^2=2b^2=32$，因此所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$

597、已知抛物线 $y^2=2px$(p>0)的一条焦点弦 AB 被焦点 F 分成 m,n 两部分

（1）若 m=n，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

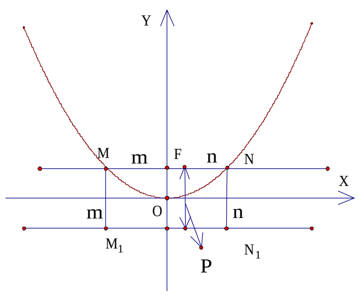
（2）若 m 不等于 n，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ (圆锥曲线)

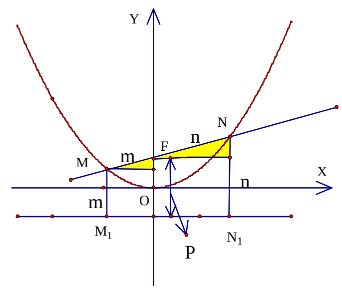
解（1）若 m=n 则 m=n＝P，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$

（2）若 m≠n 则如图 $\frac{m}{n}=\frac{p-m}{n-p}$，　$mn-mp=np-mn$，

$2mn=mp+np$，　$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$

此题给我们的启发是：从特殊情况入手可能可以发现一般的规律





600、已知直线 l:x=m,(m＜-2)与 x 轴交于点 A，动圆 M 与直线 l 相切，并且于圆 O：$x^2+y^2=4$ 相外切，（1）求动圆的圆心 M 的轨迹 C 的轨迹方程；（2）若过原点且倾角为 60° 的直线与曲线 C 交于 M，N 两点，问是否存在以 MN 为直径的圆经过点 A？若存在，求出 m 的值，若不存在，说明理由。(圆锥曲线)

解：动圆 M 的圆心为(x,y)，半径为 R，则

$R=|x-m|$，　$R+4=\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $|x-m|+4=\sqrt{x^2+y^2}$

当 m＜-2 时，$x\geq m$，$x^2+y^2=(x-m+4)^2$，$y^2=(4-m)(x-\frac{1}{2}m+2)$ 为所求的曲线 C 轨迹方程

（2）过原点倾角为 60° 的直线为 $y=\sqrt{3}x$ 代入曲线 C 的方程，则

$3x^2-(4-m)x+(4-m)(\frac{1}{2}m-2)=0$

$3x^2-(4-m)x+\frac{1}{2}(4-m)^2=0$，设 $M(x_1,\sqrt{3}x_1)$，$N(x_2,\sqrt{3}x_2)$

则 $x_1+x_2=\frac{4-m}{3}$，　$x_1x_2=\frac{(4-m)^2}{6}$

因为 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AN}=(x_1-m,\sqrt{3}x_1)\bullet(x_2-m,\sqrt{3}x_2)=(x_1-m)(x_2-m)+3x_1x_2$

$=4x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=0$，所以 $\frac{2(4-m)^2}{3}-\frac{m(4-m)}{3}+m^2=0$，$m^2-3m+8=0$

无实根，因此不存在 m 适合条件，注：第 2 小题用几何法更容易

611、$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的短轴的一个端点B(0,1)为直角的顶点，作椭圆的内接等腰ΔABC问这样的三角形是否存在？如果存在最多有几个？(圆锥曲线)

解：假设存在，设腰长为d，一腰所在的直线方程为$y=kx+1$（$k>0$），另一腰所在的直线方程为 $y=-\frac{1}{k}x+1$

联立$y=kx+1$与$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$消y得，$\frac{x^2}{a^2}+k^2x^2+2kx=0$

$x[(1+a^2k^2)x+2a^2k]=0$，$x_1=0,\ x_2=-\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}$

此腰长$=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}$

另一腰长$=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\bullet\frac{2a^2\bullet\frac{1}{k}}{1+\frac{a^2}{k^2}}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2a^2}{k^2+a^2}$

于是$\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2a^2}{k^2+a^2}$

即$\frac{k}{1+a^2k^2}=\frac{1`}{k^2+a^2}$，$k^3-1+a^2(1-k^2)=0$

$(k-1)(k^2+k+1-ka^2)=0$

故$k=1,或k^2+(1-a^2)k+1=0$（1）

（1）判别式$\Delta=(a^2-1)^2-4=(a^2-3)(a^2+1)$

因为$a>1$

故当$a>\sqrt{3}$时（1）有两个不等实根，且不为1，此时这样的三角形有三个

当$a=\sqrt{3}$时（1）有两个相等实根，且不为1，此时这样的三角形有两个

当$1<a<\sqrt{3}$时（1）有无实实根，此时这样的三角形只有一个

629、两抛物线准线相互垂直，两抛物线相交于A，B，C，D四点，问A，B，C，D四点的关系(圆锥曲线)

解：设其中一条为$y^2=2px$，则另一条为$(x-h)^2=2p_1(y-h)$

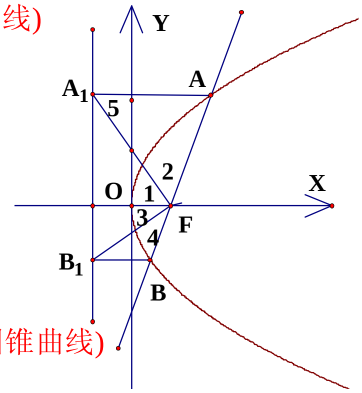
即$y^2-2px=0$，$(x-h)^2-2p_1(y-h)=0$

若这两条曲线有四个交点

则圆：$y^2-2px+(x-h)^2-2p_1(y-h)=0$必过四个交点

于是四个交点共圆

631、过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A,B 两点，若 A,B 在抛物线的准线上的射影分别为 A_1,B_1，则 $\angle A_1FB_1=$ ______(圆锥曲线)



A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

解：$|AA_1|=|AF| \Rightarrow \angle 2=\angle 5$

AA_1 // X 轴 $\Rightarrow \angle 1=\angle 5$

因此 $\angle 1=\angle 2$

同理 $\angle 3=\angle 4$

于是 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$, $\angle A_1FB_1=90^\circ$

632、过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条倾斜角为 a 的弦 AB，若 $AB \le 8$，则 a 的取值范围是？(圆锥曲线)

解：如图 $AB=8$

取 AB 中点 C,作 AA_1,BB_1,CD 垂准线

则 $|CD|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)=\frac{1}{2}|AB|=4$

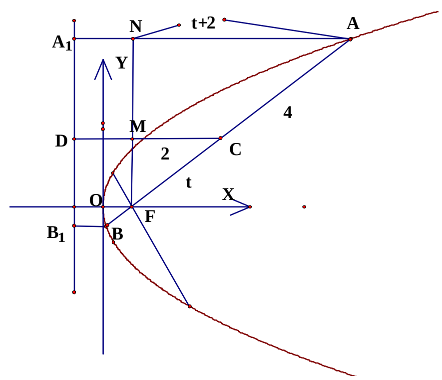
作 $FM\perp CD$ 于 M ,因|MD|=P=2

于是|CM|=2，设|CF|=t,则|AF|=t+4

|AN|=t+2

由相似成比例得

$\frac{2}{t+2}=\frac{t}{t+4}$，$t^2=8$，于是 $t=2\sqrt{2}$



因此 $\angle MCF=45^\circ$,此时 $a=45^\circ$

由于|AB|≤8,于是 $a\in[\frac{p}{4},\frac{3p}{4}]$

634、有两直线 l_1,l_2 ,倾斜角分别为 150°，和 30°，且 l_1 上有一点 A，l_2 上有一点 B，AB 间的距离为 $2\sqrt{3}$，M 为 AB 的中点，求 M 点的轨迹方程。

解：不妨设 l_1,l_2 的方程分别为 $x=\pm\sqrt{3}y$，合在一起为 $x^2=3y^2$ (圆锥曲线)

$x_A=-\sqrt{3}y_A, x_B=\sqrt{3}y_B$

设 $M(x,y)$，则 $x_A+x_B=2x$，$y_A+y_B=2y$

$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=12$（1）

因 $x_A=-\sqrt{3}y_A, x_B=\sqrt{3}y_B$

故 $x_B-x_A=\sqrt{3}(y_B+y_A)=2\sqrt{3}y$,

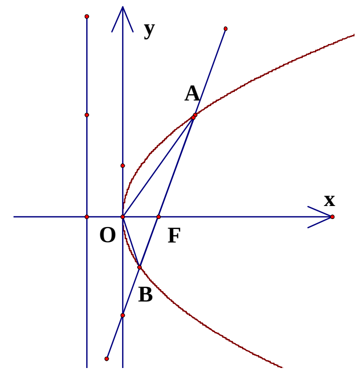
$y_B-y_A=\frac{1}{\sqrt{3}}(x_B+x_A)=\frac{2x}{\sqrt{3}}$ 代入（1）得 $12y^2+\frac{4x^2}{3}=12$，$\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 为所求

648、给定抛物线 C:y^2=4x，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点(1)设 l 的斜率为 1，求向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角

(2)设向量$\overrightarrow{FB}$ =q$\overrightarrow{AF}$，若 4≤q≤9，求 l 在 y 轴上截距的范围(圆锥曲线)

解：（1）焦点 F（1，0），直线 l： $y=x-1$

联立 $y=x-1$， y^2=4x 消 x 得



$y^2-4y-4=0$，设 $A(\frac{y_1{}^2}{4},y_1)$， $B(\frac{y_2{}^2}{4},y_2)$，

$y_1+y_2=4$， $y_1y_2=-4$， $\frac{y_1{}^2}{4}\bullet\frac{y_2{}^2}{4}=1$

故有

$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\frac{y_1{}^2}{4}\bullet\frac{y_2{}^2}{4}+y_1y_2=-3$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(y_1^4/16)+y_1^2}\cdot\sqrt{(y_2^4/16)+y_2^2}=\frac{1}{16}\sqrt{y_1{}^2y_2{}^2(y_1{}^2+16)(y_2{}^2+16)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{y_1{}^2y_2{}^2+16(y_1{}^2+y_2{}^2)+16^2}=\sqrt{1+y_1{}^2+y_2{}^2+16}=\sqrt{41}.$

于是$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|OA||OB|}=-\frac{3\sqrt{41}}{41}$，所以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为$p-\arccos\frac{3\sqrt{41}}{41}.$

（2）设 $A(\frac{y_1{}^2}{4},y_1)$， $B(\frac{y_2{}^2}{4},y_2)$ 因 $\overrightarrow{FB}=q\overrightarrow{AF}$ 故 $(\frac{y_2{}^2}{4}-1,y_2)=q(1-\frac{y_1{}^2}{4},-y_1),$

即$\begin{cases}\frac{y_2{}^2}{4}-1=q(1-\frac{y_1{}^2}{4}),\\ y_2=-qy_{1.}\end{cases}$解得 $y_1^2=\frac{4}{q}$ $y_2^2=4q$， $y_2=\pm2\sqrt{q}$

因此 $B(q,2\sqrt{q})$,或$B(q,-2\sqrt{q})$, 直线 l 方程为 $y=\frac{2\sqrt{q}}{q-1}(x-1)$或$y=\frac{-2\sqrt{q}}{q-1}(x-1),$

l 在 y 轴上截距的 $b=-\frac{2\sqrt{q}}{q-1}$或$b=\frac{2\sqrt{q}}{q-1}$

当 $l\in[4,9]$时， $b=\frac{2\sqrt{q}}{q-1}=\frac{2}{\sqrt{q}-\frac{1}{\sqrt{q}}}$在[4，9]上是递减的，故 $\frac{3}{4}\le b\le\frac{4}{3}$

或$b=-\frac{2\sqrt{q}}{q-1}=-\frac{2}{\sqrt{q}-\frac{1}{\sqrt{q}}}$在[4，9]上是递增$-\frac{4}{3}\le b\le-\frac{3}{4}$

综上 l 在 y 轴上截距的的范围是$[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$

658、动直线 y+2=k(x-5)交抛物线 y^2=4x 于 M、N，问抛物线上是否存在一点 P，使得向量 MP 垂直 NP。(圆锥曲线)

解：设 M（x_1，y_1）,N（x_1，y_1），

联立 y+2=k(x-5) 与 y^2=4x 消 x 得

$$\frac{k}{4}y^2-y-5k-2=0$$

$$y_1+y_2=\frac{4}{k}，\quad y_1y_2=-\frac{4(5k+2)}{k}$$

$$k(x_1+x_2-10)=y_1+y_2+4=\frac{4k+4}{k}，\quad x_1+x_2=\frac{10k^2+4k+4}{k^2}$$

$$x_1x_2=\frac{{y_1}^2{y_2}^2}{16}=\frac{(5k+2)^2}{k^2}$$

假设存在 $P(x_0,y_0)$ 使 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}$ 恒成立

因 $\overrightarrow{MP}=(x_0-x_1,y_0-y_1)$， $\overrightarrow{NP}=(x_0-x_2,y_0-y_2)$

故 $(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0$

$${x_0}^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2+{y_0}^2-(y_1+y_2)\ y_0+y_1y_2=0$$

$${x_0}^2-\frac{10k^2+4k+4}{k^2}x_0+\frac{(5k+2)^2}{k^2}+{y_0}^2-\frac{4}{k}y_0-\frac{4(5k+2)}{k}=0$$

$${x_0}^2k^2-(10x_0k^2+4x_0k+4x_0)+(25k^2+20k+4)+{y_0}^2k^2-4\ y_0k-(20k^2+8k)=0$$

$({x_0}^2-10x_0+5+{y_0}^2)k^2+(-4x_0+12-4y_0)k+(-4x_0+4)=0$ 对 $k\in R$ 恒成立

因此，${x_0}^2-10x_0+5+{y_0}^2=0$ 且 $-4x_0+12-4y_0$=0 且 $-4x_0+4=0$

解得 x_0=1， y_0=2，综上存在一点 P(1,2) 使 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{NP}$ 恒成立

666、若动点(x,y)在曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$上变化,则 x^2+2y 的最大值是多少?

(圆锥曲线) (函数)

解：因为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$

所以， $x^2=4-\frac{4y^2}{b^2}$， $-b\le y\le b$

$x^2+2y=4-\frac{4y^2}{b^2}+2y=-\frac{4}{b^2}(y^2-\frac{b^2}{2}y)+4=-\frac{4}{b^2}(y-\frac{b^2}{4})^2+4+\frac{b^2}{4}$

当$0<\frac{b^2}{4}\le b$，即$0<b\le 4$时，在$y=\frac{b^2}{4}$上，x^2+2y 取最大值$4+\frac{b^2}{4}$

当$\frac{b^2}{4}>b$，即$b>4$时，在$y=b$上，x^2+2y 取最大值 $2b$

668、直线$y=-x+1$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于两点且线段 AB 的中点在直线$l$：$x=2y$上（1）求椭圆的离心率（2）若椭圆的右焦点关于直线l的对称点在圆$x^2+y^2=4$上，求椭圆方程(圆锥曲线)

解：设AB中点为 $M(x_0,y_0)$，则$\frac{y_0}{x_0}(-1)=-\frac{b^2}{a^2}$且$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$

于是$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$， $a^2=2b^2$， $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{2b^2-b^2}{2b^2}=\frac{1}{2}$ ， $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）右焦点$(c,0)$关于$x=2y$的对称点$(\frac{3}{5}c,\frac{4}{5}c)$

在圆$x^2+y^2=4$上，故$c^2=4$，于是$b^2=4$， $a^2=8$，椭圆方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

669、椭圆 E 的中心在原点 O，焦点在 x 轴上，离心率为$\sqrt{\frac{2}{3}}$，过$C(-1,0)$的直线 l 交椭圆于 AB 两点且满足$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$

(1) 试用直线l的斜率表示DOAB的面积

(2) 当DOAB的面积取得最大值时求椭圆 E 的方程(圆锥曲线)

解：（1）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，可设$c=\sqrt{2}m$，$a=\sqrt{3}m$，则$b=m$

于是椭圆方程为$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即$x^2+3y^2=3b^2$①

设l的方程为$y=k(x+1)$（$k\neq 0$）②，

联立①②消 x 得即$(3k^2+1)y^2-2ky+k^2-3b^2k^2=0$

设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，($y_1>y_2$)

则$y_1+y_2=\frac{2k}{3k^2+1}$③，$y_1y_2=\frac{k^2-3b^2k^2}{3k^2+1}$④

当点 C 在椭圆内部时$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$，$(x_1+1,y_1)=2(-1-x_2,-y_2)$，故$y_1=-2y_2$⑤

③④⑤$y_1=\frac{4k}{3k^2+1}$，$y_2=-\frac{2k}{3k^2+1}$，$b^2=\frac{3k^2+9}{3(3k^2+1)}$

于是$|y_1-y_2|=\frac{6|k|}{3k^2+1}$　$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{3|k|}{3k^2+1}$

（2）$S_{\Delta OAB}=\frac{3|k|}{3k^2+1}=\frac{3}{\frac{3}{|k|}+|k|}\leq\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当且仅当$k=\pm\sqrt{3}$时上式取等号，此时$b^2=\frac{3k^2+9}{3(3k^2+1)}=\frac{3}{5}$

$a^2=3m^2=3b^2=\frac{9}{5}$，$\frac{5x^2}{9}+\frac{5y^2}{3}=1$

673、圆心在抛物线 y2=2x,且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是（　　）

A、$x^2+y^2-x-2y-\frac{1}{4}=0$　　　　B、$x^2+y^2-x-2y+1=0$ x2+y2-x-2y+1=0

C、$x^2+y^2+x-2y+1=0$　　　　D、$x^2+y^2-x-2y+\frac{1}{4}=0$ (圆锥曲线)

解：圆心在抛物线 y2=2x 上与准线相切得：过焦点（$\frac{1}{2}$，0）

圆心在抛物线 y2=2x 上与 x 轴相切得：配方后有 $(y\pm r)^2$

680、已知椭圆的中心为坐标原点，焦点在 x 轴上，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点，向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{m}=(3,-1)$ 共线，求椭圆的离心率 (圆锥曲线)

解：设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

直线 AB 斜率为 1，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，

向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ 与 $\overrightarrow{m}=(3,-1)$ 共线，$-(x_1+x_2)=3(y_1+y_2)$

由 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ 得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，得 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=0$

于是 $\frac{b^2}{a^2}+1\times(-\frac{1}{3})=0\Rightarrow a^2=3b^2,c^2=a^2-b^2=2b^2,e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3},e=\frac{\sqrt{6}}{3}$

688、已知椭圆的中心在原点，焦点在坐标轴上，直线 $x+y=1$，与椭圆交于 A、B 两点，且|AB|=$2\sqrt{2}$，AB 的中点 C 与椭圆的中心 D 的连线的的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 求椭圆的方程。(圆锥曲线)

解：设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

则 $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)=-\frac{b^2}{a^2}$（可由代点相减得出），$a^2=\sqrt{2}b^2$，

椭圆的方程为 $\frac{x^2}{\sqrt{2}b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$x^2+\sqrt{2}y^2=\sqrt{2}b^2$ 与 $x+y=1$ 联立消 y 得

$(\sqrt{2}+1)x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}-\sqrt{2}b^2=0$

$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$，$x_1x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}b^2}{\sqrt{2}+1}$

$|AB|^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=2[(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1})^2+\frac{4\sqrt{2}(b^2-1)}{\sqrt{2}+1}]=8,$

$\frac{4\sqrt{2}(b^2-1)}{\sqrt{2}+1}=4-\frac{8}{(\sqrt{2}+1)^2}$，　$\sqrt{2}(b^2-1)(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}+2$，$b^2=\sqrt{2}+1$

$a^2=2+\sqrt{2}$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2}+1}=1$

689、如果椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上一点 M 到此椭圆的一个焦点 F_1 的距离为 2，N 是 MF_1 的中点，O 是椭圆中心，则线段 ON 的长为_______(圆锥曲线)

解：线段 ON 是 ΔMF_1F_2 的中位线，于是$|ON|=\dfrac{1}{2}|MF_2|=\dfrac{1}{2}(2a-|MF_1|)=4$

691、直线 $y-kx-1=0(k\in R)$ 与椭圆$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{b}=1(b>0)$恒有公共点，则 b 的取值范围(圆锥曲线)

解：y-kx-1=0 就是 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$

因此直线 y-kx-1=0(k∈R)与椭圆$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{b}=1(b>0)$恒有公共点的充要条件是

定点 $(0,1)$ 在椭圆上或内部。即

$\dfrac{0^2}{5}+\dfrac{1^2}{b}\le 1$ 解得，$b\ge 1$

693、设 F_1、F_2 是椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的两个焦点，过 F_2 做倾斜角为$\dfrac{p}{4}$的弦 AB，则△F_1AB 的面积为_______(圆锥曲线)

解 1：联立$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$与 $y=x-1$，解得 $(0,1)$，$(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$

故$|AB|=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$，$S_{\Delta F_1AB}=\dfrac{1}{2}|AB||F_1F_2|\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{3}$

解 2：注若交点数据较大，可按下面做法

椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点 $(1,0)$，右准线 $x=2$，$e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

联立$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$与 $y=x-1$ 消 y 得 $3x^2-4x=0$

$x_1+x_2=\dfrac{4}{3}$ $|AB|=e[4-(x_1+x_2)]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[4-\dfrac{4}{3}]=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

$S_{\Delta F_1AB}=\dfrac{1}{2}|AB||F_1F_2|\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{3}$

695、如何证明双曲线的一个焦点到渐进线的距离为b？(圆锥曲线)

证明：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$，即$bx\pm ay=0$

右焦点$F(c,0)$到$bx\pm ay=0$的距离

$d=\dfrac{|bc\pm 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{bc}{c}=b$，同理可证左焦点$F(c,0)$到$bx\pm ay=0$的距离$d=b$

700、$y^2=4x$过$(1,2)$的两条倾斜角互补的直线，与抛物线交于 A、B，求x_A+x_B (圆锥曲线)

解：(1)$\dfrac{y_A-2}{x_A-1}+\dfrac{y_B-2}{x_B-1}=\dfrac{y_A-2}{\frac{y_A{}^2}{4}-1}+\dfrac{y_B-2}{\frac{y_B{}^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_A+2}+\dfrac{4}{y_B+2}$

$=\dfrac{4(y_A+y_B+4)}{(y_A+2)(y_B+2)}=0$，$y_A+y_B=-4$

解：(1)$\dfrac{y_A-2}{x_A-1}+\dfrac{y_B-2}{x_B-1}=\dfrac{y_A-2}{\frac{y_A{}^2}{4}-1}+\dfrac{y_B-2}{\frac{y_B{}^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_A+2}+\dfrac{4}{y_B+2}$

$=\dfrac{4(y_A+y_B+4)}{(y_A+2)(y_B+2)}=0$，$y_A+y_B=-4$

708、若抛物线 $y=ax^2-1$ 上总存在两点关于直线 x+y=0 对称,则实数 a 的取值范围是(　　).

A.($\frac{1}{4}$,+∞) B.($\frac{3}{4}$,+∞) C.(0, $\frac{1}{4}$) D.($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$)(圆锥曲线)

做这道题最快的方法是什么?如果用常规方法又该怎么做?

解 1(常规方法)设抛物线上 A(x_1,y_1)两点 B(x_2,y_2)于直线 x+y=0 对称

直线 AB 的方程为 $y=x+b$

联立 $y=x+b$ 与 $y=ax^2-1$ 消 y 得

$ax^2-x-b-1=0$

于是$\Delta=1+4a(b+1)=1+4ab+4a>0$（1）

设弦 AB 中点坐标为 (x_0, y_0)

$x_0 = \frac{1}{2a}, y_0 = x_0 + b = \frac{1}{2a} + b$

因 (x_0, y_0) 在对称 x+y=0 上

$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + b$ =0，$b = -\frac{1}{a}$ 代入（1）得

$1 - 4 + 4a > 0$，$a > \frac{3}{4}$

解 2(解本选择的方法)

由选支的共性知，$a > 0$

设抛物线上 A(x_1, y_1)两点 B(x_2, y_2)于直线 x+y=0 对称，则 $k_{AB} = 1$

$y_1 = ax_1^{\ 2} - 1$，$y_2 = ax_2^{\ 2} - 1$

相减得 $y_1 - y_2 = a(x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2})$，$k_{AB} = a(x_1 + x_2)$，$x_1 + x_2 = \frac{1}{a}$

设弦 AB 中点坐标为 (x_0, y_0)，$x_0 = \frac{1}{2a}, y_0 = -x_0 = -\frac{1}{2a}$

点 (x_0, y_0) 在抛物线内部，由于 $a > 0$，于是 $y_0 < ax_0^{\ 2} - 1$

$-\frac{1}{2a} < \frac{1}{4a} - 1$，所以 $a > \frac{3}{4}$

709、设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (0＜b＜a)的半焦距为 c，直线 l 过点（a,0)和(0,b)，已知原点到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率。(圆锥曲线)

解：已知原点到 l 的距离＝$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$

$\frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$，$4ab = \sqrt{3}c^2 = \sqrt{3}(a^2 + b^2)$，$\sqrt{3}a^2 - 4ab + \sqrt{3}b^2 = 0$

$(\sqrt{3}a - b)(a - \sqrt{3}b) = 0$，$\sqrt{3}a = b$ 或 $a = \sqrt{3}b$

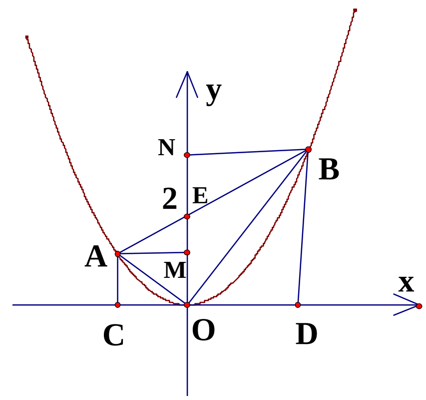
因 0＜b＜a

故 $a = \sqrt{3}b$，$c = 2b$，$e = \frac{c}{a} = \frac{2b}{\sqrt{3}b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

717、已知:在平面直角坐标系 xOy 中,过点 P(0,2)任作一条与抛物线 $y=ax^2(a>0)$交于两点的直线,设交点分别为 A,B,若∠AOB=90°
(1)判断 A,B 两点纵坐标的乘积是否为一个确定的值,并说明理由
(2)确定抛物线 $y=ax^2(a>0)$的解析式
(3)当三角形 ABO 面积为 $4\sqrt{2}$ 时,求直线 AB 的解析式(圆锥曲线)

解:（1）设过点 P(0,2)的直线的解析式为 $y=kx+2$，设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)

$y=kx+2$ 与 $y=ax^2$ 联立消 y 得，$ax^2-kx-2=0$



则 $x_1x_2=-\dfrac{2}{a}$，

因为 $y_1=ax_1^{\ 2},y_2=ax_2^{\ 2}$，

所以 $y_1y_2=a^2(x_1x_2)^2=a^2(-\dfrac{2}{a})^2=4$＝定值

（2）设 A 点在左边

作 $AC\perp x$轴于C, $BD\perp x$轴于D

因为∠AOB=90°，所以∠AOC+∠BOD =90°，
又因为∠AOC+∠OAC =90°，所以∠BOD=∠OAC

所以△AOC∽△OBD，所以 $\dfrac{AC}{OD}=\dfrac{OC}{DB}$，即 $\dfrac{y_1}{x_2}=\dfrac{-x_1}{y_2}$

于是 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$-\dfrac{2}{a}+4=0$，$a=\dfrac{1}{2}$，抛物线的解析式是 $y=\dfrac{1}{2}x^2$

（3）作 $AM\perp y$轴于M, $BN\perp y$轴于N

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOE}+S_{\Delta BOE}=\frac{1}{2}\times 2\bullet(-x_1)+\frac{1}{2}\times 2\bullet x_2 \ =x_2-x_1=4\sqrt{2}$$

因为 $x_1+x_2=\dfrac{k}{a}=2k$，$x_1x_2=-\dfrac{2}{a}=-4$

所以 $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=4k^2+16=32$，$k^2=4$，$k=\pm 2$

于是直线 AB 的解析式是 $y=\pm 2x+2$

722、抛物线 $y^2=-2px(p>0)$上一点 M（x0,y0)和焦点的连线叫做点 M 处的焦半径，它的值是用 x_0，p 表示(圆锥曲线)

解：抛物线 $y^2=-2px(p>0)$的准线为 $l: x=-\dfrac{p}{2}$

作 $MM_1\perp l$于M_1

由抛物线的定义知：焦半径$|MF|=|MM_1|=x_0-(-\dfrac{p}{2})=x_0+\dfrac{p}{2}$

723、设 P 为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$上一动点，O 为坐标原点，M 为线段 OP 的中点，则 M 点的轨迹方程是________

解：设$P(x_0,y_0)$，$M(x,y)$，则$x=\frac{x_0}{2}$，$y=\frac{y_0}{2}$，$\frac{{x_0}^2}{4}-{y_0}^2=1$

故$\frac{(2x)^2}{4}-(2y)^2=1$，即$x^2-4y^2=1$为所求

设 P 为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$上一动点，O 为坐标原点，M 为线段 OP 的中点，则 M 点的轨迹方程是________(圆锥曲线)

解：设$P(x_0,y_0)$，$M(x,y)$，则$x=\frac{x_0}{2}$，$y=\frac{y_0}{2}$，$\frac{{x_0}^2}{4}-{y_0}^2=1$

故$\frac{(2x)^2}{4}-(2y)^2=1$，即$x^2-4y^2=1$为所求

731、已知 A(0,7)，B(0,-7)，C(12,2)，以 C 为一个焦点作过 AB 的椭圆，椭圆另一个焦点的轨迹方程是______(圆锥曲线)

解：设另一个焦点 D(x,y)

$|AC|+|AD|=|BC|+|BD|$

即$13+|AD|=15+|BD|$，$|AD|-|BD|=2$

于是另一个焦点 D(x,y)的轨迹是以 A,B 为焦点的双曲线的下支

这里$a=1,c=7,b^2=48$

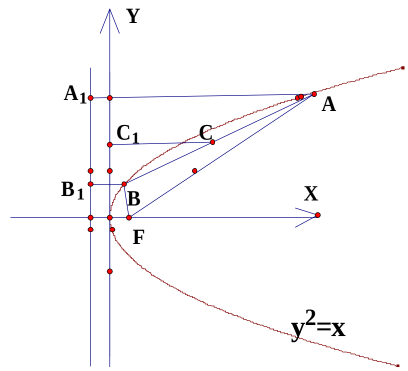
其方程是$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{48}=0(y\le -1)$

738、定长为 3 的线段 AB 的端点的抛物线 $y^2=x$ 上移动，求 AB 中点到 y 轴最短距离及中点 M 的坐标(圆锥曲线)

解：看图 1，弦 AB 的中点 C (x_0,y_0) 到 y 轴的距离

$$|CC_1|=|AA_1|+|BB_1|-P=|AF|+|BF|-P\geq|AB|-P=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

当且仅当 AB 过焦点时等号成立（看图 2）



于是 $|CC_1|$ 最小 $=\frac{5}{2}$，此时，$x_0=\frac{5}{2}$

$y_A{}^2=x_A$，$y_B{}^2=x_B$ 相减得，$y_A{}^2-y_B{}^2=x_A-x_B$

$K_{AB}=\dfrac{1}{2y_0}$，又 $K_{AB}=K_{FC}=\dfrac{y_0}{x_0-\frac{1}{4}}=\dfrac{y_0}{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}=\dfrac{4y_0}{9}$

于是 $\dfrac{4y_0}{9}=\dfrac{1}{2y_0},y_0{}^2=\dfrac{9}{8},y_0=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$，C $(\dfrac{5}{2},\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{2})$

741、求双曲线 $2x^2-3y^2-4x+6y=0$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的曲线方程(圆锥曲线)

解：设 (x_0,y_0) 是已知曲线上的点，它关于直线 $x-y+1=0$ 的对称点为 (x,y)

则 $2x_0{}^2-3y_0{}^2-4x_0+6y_0=0$（1），$x_0-y+1=0$（2），$x-y_0+1=0$（3）

由（2）（3）得 $x_0=y-1$，$y_0=x+1$ 代入（1）得

$2(y-1)^2-3(x+1)^2-4(y-1)+6(x+1)=0$ 化简后为所求

742、以 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$ 为焦点的双曲线与直线 $y=x-3$ 有公共点，求实轴长的范围(圆锥曲线)

解：设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{25-a^2}=1$

与 $y=x-3$ 联立消 y 得 $(25-2a^2)x^2+6a^2x+a^4-34a^2=0$

（1）当 $25-2a^2=0$ 时方程有解，此时 $a=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

（2）当 $25-2a^2\neq0$ 时

由 $\Delta\geq0$ 得 $(a^2-25)(a^2-17)\geq0$，解得 $a^2\geq25$ 或 $a^2\leq17$

$a\geq5$ 或 $0<a\leq\sqrt{17}$ 且 $a\neq\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，综上 $a\geq5$ 或 $0<a\leq\sqrt{17}$

744、定点 A（4，0）到双曲线上的点的$x^2-y^2=a^2(a>0)$上的点的最近距离为$\sqrt{5}$，求双曲线方程，并求出此点的坐标。(圆锥曲线)

设双曲线上的点为$P(x,y)$，则

$|PA|^2=(x-4)^2+y^2=(x-4)^2+x^2-a^2=2x^2-8x+16-a^2$

$=2(x-2)^2+8-a^2$

对称轴是$x=2$， $x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$

当$a\le 2$时，在$x=2$上，$|PA|^2$ 最小$=8-a^2=5$， $a=\sqrt{3}$

当$a>2$时，在$x=a$上，$|PA|^2$ 最小$=a^2-8a+16=5$，得 $a=4+\sqrt{5}$

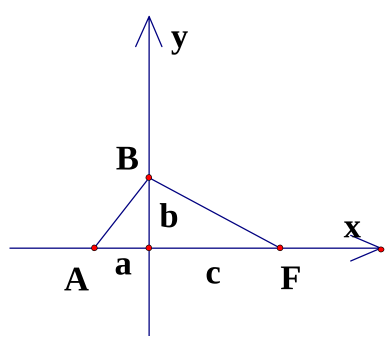
或$a=4-\sqrt{5}$（舍）

于是双曲线方程是$x^2-y^2=3$，或$x^2-y^2=(4+\sqrt{5})^2$

最近的点分别是$(2,\pm1)$和$(4+\sqrt{5},0)$

746、双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率$e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，A、F 分别是它的左顶点和右焦点，设 B$(0.b)$，则$\angle ABF=$________(圆锥曲线)

解：$e=\frac{c}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



于是$\frac{c}{a}$是方程$x^2-x+1=0$的根

$(\frac{c}{a})^2-(\frac{c}{a})-1=0$

$c^2-ac-a^2=0$

即$b^2=ac$， 故$\angle ABF=90°$

747、双曲线的交点问题

(1) $y=kx-5$与双曲线$x^2-y^2=1$的右支交于不同的两点，则k的取值范围是____

(2)已知双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$，则过 A(3，1)且与双曲线有唯一交点的直线有（　）

A、1 条　B、2 条　C、3 条　D、4 条　(圆锥曲线)

答：

(1) k的范围是（1，正数 m），其中 1 渐近线的斜率，正数 m 由判别式

(2)双曲线把平面分成三个部分，双曲线上，双曲线内部（焦点所在的区域），双曲线外部。

当点在双曲线上时可作 1 条切线，当点在双曲线内部时不能作切线

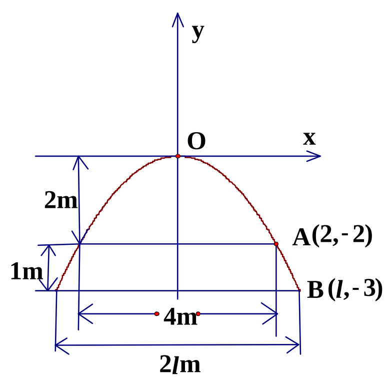
当点在双曲线外部时：

①不在渐近线上可作 2 条切线②只在渐近线上可作 1 条切线③在两条渐近线的交点上不能作切线

本题$A(3,1)$在双曲线外部,且不在渐近线上因此可作 2 条切线，再作两条与渐近线平行的直线，这四条线与双曲线都是仅有唯一的公共点，于是选 D

748、一抛物线型拱桥水面离桥顶 2 米水面宽 4M,若水面下降 1 米,则水面宽?(圆锥曲线)

解：如图建立坐标系



设抛物线方程为$x^2=-2py(p>0)$

下降 1 米,则水面宽为$2l$

$A(2,-2)$, $B(l,-3)$在抛物线上

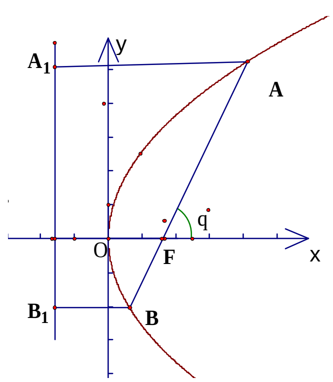
故$4=4p$，$l^2=6p$

解得$p=1$，$l=\sqrt{6}$

故水面下降 1 米,则水面宽为$2\sqrt{6}$

774、求证抛物线$y^2=2px$的焦点弦长|AB|=$\dfrac{2p}{\sin^2 q}$ (直线与圆)

证明：设焦点弦方程为$y=\tan q\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$



与$y^2=2px$联立消 y 得

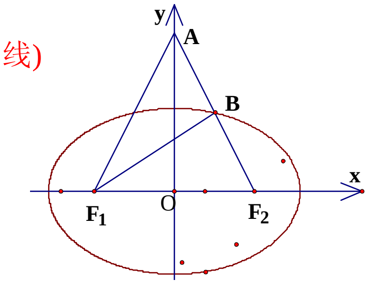
$$(\tan^2 q)x^2-p(\tan^2 q+2)x+\frac{p^2}{4}\tan^2 q=0$$

$$|AB|=|AF|+|BF|=|AA_1|+|BB_1|$$

$$=x_A+x_B+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=\frac{p(\tan^2 q+2)}{\tan^2 q}+p$$

$$=\frac{p(2\tan^2 q+2)}{\tan^2 q}=\frac{2p\sec^2 q}{\tan^2 q}=\frac{2p}{\sin^2 q}$$

779、椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2，以 F_1, F_2 为边作正三角形，若椭圆恰好正三角形的两边，求椭圆的离心率(圆锥曲线)



解：如图 $|F_1F_2|=2c$，$|F_2B|=c$，$|F_1B|=\sqrt{3}c$

$$2a=|F_1B|+|F_2B|=\sqrt{3}c+c=(\sqrt{3}+1)c$$

于是 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

781、P 是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆上的一点，过 F_2 作角 F_1PF_2 的外角平分线的垂线，垂足为 M，M 的轨迹是圆，为什么？(圆锥曲线)

解：如图设椭圆长半轴为 a

延长 F_2M 交 F_1P 的延长线于点 B

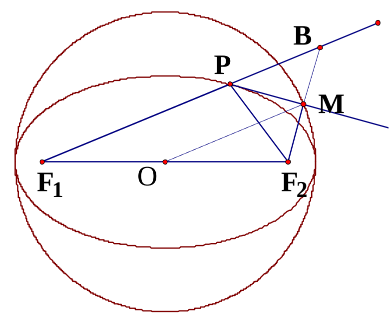
则 M 是 F_2B 的中点

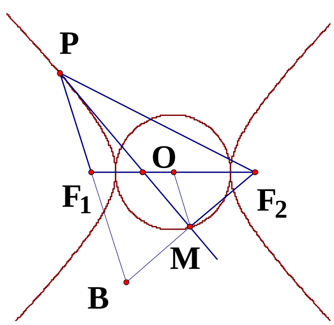
连 OM，因 O 是 F_1F_2 的中点

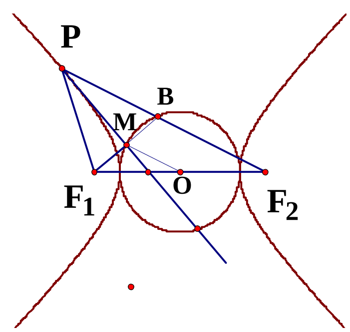
故 $MO=\frac{1}{2}BF_1=\frac{1}{2}(PF_1+PB)=\frac{1}{2}(PF_1+PF_2)=a$

于是 M 的轨迹是以 O 为圆心以 a 为半径的圆

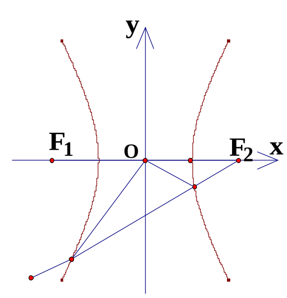
评注：双曲线也有类似的结论,如下图







805、双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 X 轴上，过双曲线的右焦点且斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 的直线与双曲线与 P、Q，OP 垂直与 OQ，PQ 长为 4，求双曲线的方程？



解：设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(x-c)\end{cases}$$

消 y 得 $(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0$． $x_1x_2=-\dfrac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}$

消 x 得 $(5b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{15}b^2cx+3b^2c^2-3a^2b^2=0$． $y_1y_2=\dfrac{3b^2c^2-3a^2b^2}{5b^2-3a^2}$

由$OP\perp OQ$得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，$-\dfrac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}+\dfrac{3b^2c^2-3a^2b^2}{5b^2-3a^2}=0$

$3c^2(b^2-a^2)-8a^2b^2=0$，$3b^4-8a^2b^2-3a^4=0$

$(3b^2+a^2)(b^2-3a^2)=0$，故 $b=\sqrt{3}a$， $c=2a$， $e=2$

于是 $x_1+x_2=-\dfrac{6a^2c}{5b^2-3a^2}=-a$， $x_1x_2=-\dfrac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}=-\dfrac{9}{4}a$

由$|PQ|=4$，及 $k_{PO}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}<\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{b}{a}$ （注不能得$|PQ|=e(x_1+x_2)-2a=4$）

只能得$|PQ|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(1+\dfrac{3}{5})[a^2+9a^2]=16a^2=4$

故 $a=1$，于是 $b=\sqrt{3}$，所求双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

832、渐近线为 y=±2x，并且直线 x-y-3=0 所截的弦长为 8，求此双曲线。

解：设双曲线方程 $4x^2-y^2=l\,(l\neq 0)$

与 $x-y-3=0$ 联立消 y 得， $3x^2+6x-9-l=0$

依题意得 $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{36+12(9+l)}}{3}=8$，解得 $l=12$

835、已知直角坐标平面上点 Q（2，0）和圆 C： $x^2+y^2=1$，动点 M 到圆的切线长与|MQ|的比值分别为 1 或 2 时，分别求出点 M 的轨迹方程

解：设 $M(x,y)$，设切点 N

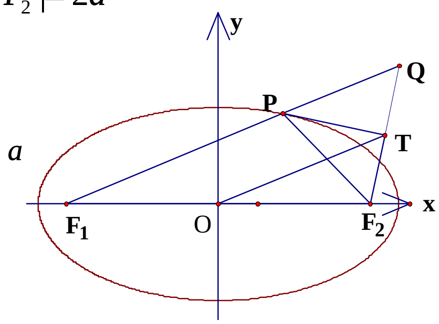
(1)当 $\dfrac{|MN|}{|MQ|}=1$ 时 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=1$ 化简后是一次方程表示直线

(2)当 $\dfrac{|MN|}{|MQ|}=2$ 时 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=2$ 化简后表示圆

847、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左，右焦点为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$。Q 是椭圆外的动点，满足 $|F_1Q|=2a$，点 P 是线段 F_1Q 与椭圆的交点，T 是 F_2Q 上的点，满足 $\overrightarrow{PT}\bullet\overrightarrow{TF_2}=0$，$\overrightarrow{TF_2}\neq\vec{0}$

(1) 求 T 的轨迹

(2) 在点 T 的轨迹上是否存在点 M，让△F_1F_2M 的面积 $S=b^2$，若存在求∠F_1MF_2 的正切(解几)



解：（1）$|F_1Q|=|PF_1|+|PQ|=2a$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$

故 $|PQ|=|PF_2|$，因 $\overrightarrow{PT}\bullet\overrightarrow{TF_2}=0$ 即 $\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$

故 T 是 QF_2 的中点，连 TO，则 $|TO|=\frac{1}{2}|QF_1|=a$

故 T 的轨迹是以 O 为圆心以 a 为半径的圆

其方程是 $x^2+y^2=a^2$

（2）假设 T 的轨迹上的点 $M(x_0,y_0)$ 适合条件

则 $c|y_0|=b^2$①，$x_0{}^2+y_0{}^2=a^2$②

由①得 $|y_0|=\frac{b^2}{c}$ 当 $|y_0|=\frac{b^2}{c}\le a$ 时存在符合条件的点 M

此时 $a^2-c^2\le ac$，$1-e^2\le e$（e 是离心率）解得 $e\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，又 $0<e<1$ 故

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le e<1$　代入②得 $x_0{}^2=a^2-\frac{b^4}{c^2}=\frac{a^2c^2-b^4}{c^2}$，$M(\pm\frac{\sqrt{a^2c^2-b^4}}{c},\pm\frac{b^2}{c})$

取 $M(\frac{\sqrt{a^2c^2-b^4}}{c},\frac{b^2}{c})$ 则 $,k_{MF_1}=\frac{y_0}{x_0+c},k_{MF_2}=\frac{y_0}{x_0-c}$

$$\tan\angle F_1MF_2=\frac{\frac{y_0}{x_0-c}-\frac{y_0}{x_0+c}}{1+\frac{y_0}{x_0+c}\frac{y_0}{x_0-c}}=\frac{2cy_0}{x_0{}^2-c^2+y_0{}^2}=\frac{2c\bullet\frac{b^2}{c}}{a^2-c^2}=2$$

当 $0<e<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 不存在 M 适合条件

851、(直线与圆)

已知点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点，过点 P 分别作渐近线，

垂足为 E、F， 求证：（1）$|PE|\cdot|PF|$ 为常数，

（2）过点 P 分别引两条渐近线的平行线交渐近线于点 A 和 B，求证：平行四边形 QAPB 的面积等于常数

证明：（1）渐近线方程是 $bx\pm ay=0$，设 $P(x_0,y_0)$，则

$$|PE|\bullet|PF|=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\bullet\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_0{}^2-a^2y_0{}^2|}{a^2+b^2}=\frac{|a^2b^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

（2）渐近线 $bx-ay=0$ 的倾斜角为 a，则 $\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}=\frac{2\bullet\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

所求面积为 $S=|PA|\bullet|PB|\sin 2a=\frac{|PE|}{\sin 2a}\bullet\frac{|PF|}{\sin 2a}\bullet\sin 2a=\frac{|PE|\bullet|PF|}{\sin 2a}$

$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\bullet\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{1}{2}ab$

854、(圆锥曲线)

问题：双曲线相切的条数

答：双曲线把平面分成三部分

（1）过双曲线内部的点（含双曲线焦点的区域）与中心作 0 条

（2）过双曲线线上的点，渐近线上的点(除中心) 作 1 条

（3）过双曲线外部的点（除渐近线上的点与中心）作 2 条

855、(圆锥曲线)

过 A（0，2）的直线与抛物线 $y^2=4x$ 相交于两点 P，Q，求以 OP、OQ 为邻边的平行四边形的第四个顶点 M 的轨迹方程

解：设过 A（0，2）的直线方程为 $y=kx+2$ 与 $y^2=4x$ 联立

消 y 得 $k^2x^2+(4k-4)x+4=0$ 则

$$\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=16(k-1)^2-16k^2=16-32k>0\end{cases}\Rightarrow k<\frac{1}{2}\text{且}k\neq 0$$

$x_Q+x_Q=\frac{4-4k}{k^2}$，$y_P+y_Q=\frac{4-4k}{k}+4=\frac{4}{k}$

设平行四边形的第四个顶点 M(x,y)

则 $x=x_Q+x_Q=\frac{4-4k}{k^2}=\frac{4}{k^2}-\frac{4}{k}$，$y=y_P+y_Q=\frac{4-4k}{k}+4=\frac{4}{k}$

消 k 得 $4x=y^2-4y$，即 $(y-2)^2=4(x+1)$ 为所求

（注 x,y 的范围自已求）

873、(圆锥曲线)
是否存在同时满足下列三个条件的双曲线??

(1)渐近线方程为 $y=\pm\frac{x}{2}$

(2)焦点在 X 轴上

(3)双曲线上动点 P 与点 A(5,0)的最短距离为 3

解：假设存在同时满足下列三个条件的双曲线

由（1）（2）两个条件可设双曲线方程为

$\frac{x^2}{4}-y^2=l$ （ $l>0$ ）

设 $P(x_0,y_0)$ 则 $\frac{{x_0}^2}{4}-{y_0}^2=l$， ${y_0}^2=\frac{{x_0}^2}{4}-l$， $x_0\le -2\sqrt{l}$ 或 $x_0\ge 2\sqrt{l}$

$|PA|^2=(x_0-5)^2+{y_0}^2={x_0}^2-10x_0+25+\frac{{x_0}^2}{4}-l=\frac{5}{4}{x_0}^2-10x_0+25-l$

$=\frac{5}{4}(x_0-4)^2+5-l$

当 $4\ge 2\sqrt{l}$ 即 $0<l\le 4$ 时，$|PA|$ 最小＝$\sqrt{5-l}$＝3， l＝－4（舍去）

当 $4<2\sqrt{l}$ 即 $l>4$ 时，则当 $x_0=2\sqrt{l}$ 时

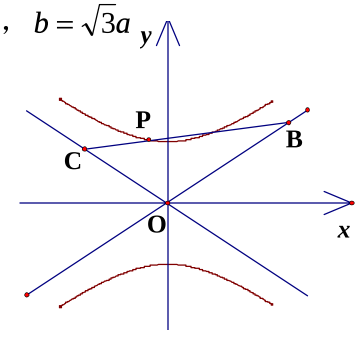
$|PA|^2$ 最小＝$4l-20\sqrt{l}+25=9$， l＝16 或 l＝1（舍去）

综上存在同时满足下列三个条件的双曲线，其方程是 $\frac{x^2}{4}-y^2=16$

879、(圆锥曲线)

如图，已知 ΔOBC 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$，双曲线 C 的对称轴是坐标轴，离心率为 2，以直线 OA、OB 为渐近线，点 P 在双曲线上，且 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$， 求双曲线的方程

.解：设双曲线方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 则 $c=2a$， $b=\sqrt{3}a$



$\therefore$双曲线方程化为 $3y^2-x^2=3a^2$，渐近线 $y=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$

(2)设 B（$\sqrt{3}$m, m）、$P_2(-\sqrt{3}$n,n) (m>0,n>0)

则|OB|=2m , |OC|=2n

∵tan∠xOB=$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴∠xOB= 30°，∠AOB=120°

$S_{\Delta P_1OP_2}=\frac{1}{2}|\mathrm{OA}||\mathrm{OB}|\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{3}mn=\frac{9\sqrt{3}}{8}$，于是 $mn=\frac{9}{8}$ ①

∵P 分$\overrightarrow{BC}$所成的比是 2　∴P$(\frac{\sqrt{3}m-2\sqrt{3}n}{3},\frac{m+2n}{3})$代入双曲线方程得

$\frac{3(m+2n)^2}{9}-\frac{3(m-2n)^2}{9}=3a^2$　化简得 $a^2=\frac{8}{9}mn$ ②

①代入②得 $a^2=1$，∴双曲线方程为 $3y^2-x^2=3$

883、(圆锥曲线)

椭圆 $a^2x^2+y^2=a^2(0<a<1)$ 上离顶点 A$(0,a)$距离最远的点恰好是另一个顶点

$A'(0,-a)$ 则 a 的取值范围是______

解：不设 P$(x,y)(x\geq 0)$，则 $x=\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}$，于是

$|AP|^2=1-\frac{y^2}{a^2}+(y-a)^2=\frac{a^2-1}{a^2}y^2-2ay+a^2+1$，由于 $0<a<1$ 于是 $\frac{a^2-1}{a^2}<0$

这个二次函数开口向下，对称轴 $y=\frac{a^3}{a^2-1}$，定义域 $y\in[-a,a]$

使这个二次函数在 $y=-a$ 上取最大值的条件是

对称轴 $y=\frac{a^3}{a^2-1}$ 在定义域 $y\in[-a,a]$ 的左边

即 $\frac{a^3}{a^2-1}\leq -a$，解得 $a\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ 又 $0<a<1$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a<1$

解法 2：以 A$(0,a)$，过 $A'(0,-a)$ 的圆是 $x^2+(y-a)^2=4a^2$

依题意方程组 $\begin{cases}x^2+(y-a)^2=4a^2\\ a^2x^2+y^2=a^2\end{cases}$ 只能有一解 $A'(0,-a)$

消 x 得 $(a^2-1)y^2-2a^3y-3a^4+a^2=0$

因一根为 $-a$，设另一根为 y_2，则 $-ay_2=\dfrac{-3a^4+a^2}{a^2-1}$， $y_2=\dfrac{3a^3-a}{a^2-1}$

因圆与椭圆只有一个公共点，于是 $\dfrac{3a^3-a}{a^2-1}\le -a$ 又 $0<a<1$，解得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le a<1$

与解法 2 是同一个本质，把两曲线交点个数问题转化为方程的解的个数问题。我们已经知道了一元二次方程有两个实根的情况下去考虑二元二次方程组的解，Δ 不起作了，这一下我们要关注的是实根的范围，这一点可由曲线方程可是界定了 x,y 的范围进行思考。从 99 年起由两个二元二次方程的交点个数与方程组的解的联系与讨论高考不作要求了，就目前的高考要求而言，本题以及参考题用解法 1 会更好一一点

893、(圆锥曲线)

已知抛物线 $y^2=2px$ 上的两动点 A、B 及一定点 M（x_0,y_0），F 为抛物线的焦点，且|AF|、|MF|、|BF|成等差数列。

（1）求证：线段 AB 的垂直平分线经过定点 Q

（2）|MF|=4，|OQ|=8，求抛物线方程。

（3）对于（2）中的抛物线，问：A、B 两点的距离为何值时，ΔAQB 面积最大？试说明理由

解：（1）设 $A(x_1,y_1)$、 $B(x_2,y_2)$、线段 AB 的中点 $E(m,n)$

因|AF|、|MF|、|BF|成等差数列。

故 2|MF|=|AF|+|BF|，于是 $2(x_0+\dfrac{p}{2})=(x_1+\dfrac{p}{2})+(x_2+\dfrac{p}{2})$，

$2x_0=x_1+x_2$，故 $m=\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$

因 ${y_1}^2=2px_1$， ${y_2}^2=2px_2$ 故 ${y_1}^2-{y_2}^2=2p(x_1-x_2)$， $k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{2p}{2n}=\dfrac{p}{n}$

线段 AB 的垂直平分线方程是 $y-n=-\dfrac{n}{p}(x-x_0)$

即 $y=-\dfrac{n}{p}(x-x_0-p)$，当 $x=x_0+p$ 时， $y=0$

于是线段 AB 的垂直平分线过定点 $Q(x_0+p,0)$

（2）因|MF|=4，|OQ|=6，故 $x_0+\dfrac{p}{2}=4$， $x_0+p=6$

解得 $x_0=2, p=4$，于是求抛物线方程是 $y^2=8x$。

（3）由（2）$x_0=2$ ，设直线 AB 的方程是 $y-n=\dfrac{p}{n}(x-x_0)$ 即 $y-n=\dfrac{4}{n}(x-2)$

与 $y^2=8x$ 联立消 y 得 $y^2-2ny+2n^2-16=0$，于是 $y_1+y_2=2n$， $y_1y_2=2n^2-16$

$$|AB|=\sqrt{(1+\frac{1}{{k_{AB}}^2})(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+\frac{n^2}{16})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{n^2}{16})[4n^2-4(2n^2-16)]}=\frac{1}{2}\sqrt{(16+n^2)(16-n^2)}$$

$Q(6,0)$到 AB 的距离是$\sqrt{(6-2)^2+n^2}=\sqrt{16+n^2}$

$S_{\Delta ABQ}=\frac{1}{4}\sqrt{(16+n^2)(16-n^2)}\sqrt{16+n^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(16+n^2)(16+n^2)(32-2n^2)}$

$\le\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{[\frac{(16+n^2)+(16+n^2)+(32-2n^2)}{3}]^3}=\frac{64}{9}\sqrt{3}$

当且仅当$16+n^2=32-2n^2$即$n^2=\frac{16}{3}$时上式取等号

此时$|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(16+n^2)(16-n^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{16^2-(\frac{16}{3})^2}=\frac{16}{3}\sqrt{2}$

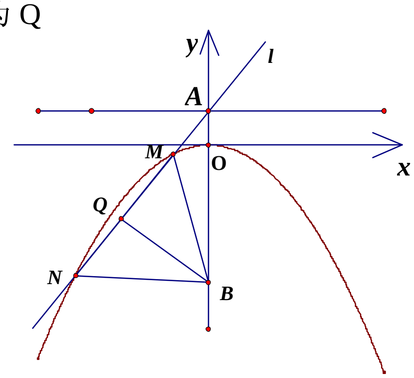
894、(圆锥曲线)

已知抛物线$x^2=-8y$的焦点为 F，其准线与 y 轴交于点 A，过点 A 作直线l交抛物线于 M、N 两点，点 B 在抛物线的对称轴上，且$(\overrightarrow{BM}+\frac{\overrightarrow{MN}}{2})\bullet\overrightarrow{MN}=0$

（1）求 B 点的纵坐标的取值范围;

（2） 是否存在 B 点，使△BMN 成为以∠B 为直角的等腰三角形？若存在求出 B 点的坐标，若不存在说明理由。

解:（1）依题题意$A(0,2)$，设线段 MN 的中点为 Q



于是$\overrightarrow{BM}+\frac{\overrightarrow{MN}}{2}=\overrightarrow{BQ}$，

因$(\overrightarrow{BM}+\frac{\overrightarrow{MN}}{2})\bullet\overrightarrow{MN}=0$，故$\overrightarrow{BQ}\perp\overrightarrow{MN}$

设$l:y=kx+2,$由$\begin{cases}y=kx+2\\x^2=-8y\end{cases}$得$x^2+8kx+16=0$

令$\Delta=(8k)^2-64=64(k^2-1)>0$得$k^2>1$

设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$、$Q(m,n)$，$B(0,y_0)$

则$m=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-8k}{2}=-4k$，$n=-4k^2+2$

∴MN 的垂直平分线的方程为

$y+4k^2-2=-\frac{1}{k}(x+4k)$即$y=-\frac{1}{k}x-4k^2-2$

令$y_0=-4k^2-2$ $\because k^2>1$ $\therefore y_0<-6$

（2）ΔBMN是以∠B 为直角的等腰三角形的充要条件是

$|MN|=2|BQ|$　　①

因$x_1+x_2=-8k$，$x_1x_2=16$

$|MN|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)(64k^2-64)}=8\sqrt{(k^2+1)(k^2-1)}$　　②

因$Q(-4k,-4k^2+2)$，$B(0,-4k^2-2)$

故$|QB|=\sqrt{16k^2+4^2}=4\sqrt{k^2+1}$　　③

由①②③得$8\sqrt{(k^2+1)(k^2-1)}=8\sqrt{k^2+1}$，$k=\pm\sqrt{2}$，因此存在

895、设e_1、e_2分别为具有公共端点F_1、F_2的椭圆和双曲线，P 为两曲线的一个公共点，且满足$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\dfrac{e_1^{\ 2}+e_2^{\ 2}}{e_1^{\ 2}e_2^{\ 2}}$的值为(　　)

A、1　B、$\dfrac{1}{2}$　C、2　D、不确定

解：因$\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=0$故$\angle F_1PF_2=90°$

设$|\overrightarrow{PF_1}|=m,|\overrightarrow{PF_2}|=n$，于是$m+n=2a_{椭}$（1），$|m-n|=2a_{双}$（2）

（1）^{2}+（2）^{2}得$2(m^2+n^2)=4(a_{椭}^{\ 2}+a_{双}^{\ 2})$，$m^2+n^2=(2c)^2$

于是$a_{椭}^{\ 2}+a_{双}^{\ 2}=\dfrac{m^2+n^2}{2}=\dfrac{4c^2}{2}=2c^2$

$e_1=\dfrac{c}{a_{椭}}$，$e_2=\dfrac{c}{a_{双}}$，故$\dfrac{e_1^{\ 2}+e_2^{\ 2}}{e_1^{\ 2}e_2^{\ 2}}=\dfrac{1}{e_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{e_2^{\ 2}}=\dfrac{a_{椭}^{\ 2}}{c^2}+\dfrac{a_{双}^{\ 2}}{c^2}=\dfrac{a_{椭}^{\ 2}+a_{双}^{\ 2}}{c^2}$

$=\dfrac{a_{椭}^{\ 2}+a_{双}^{\ 2}}{c^2}=\dfrac{2c^2}{c^2}=2$

898、(圆锥曲线)

已知：A 点在 x 轴上，过 A 点的直线与抛物线$y^2=2px$交于 P、Q 的两点，试问：在 x 轴上是否存在定点 A 使$\dfrac{1}{|AP|^2}+\dfrac{1}{|AQ|^2}$为定值。

证明：假设存在$A(a,0)$，使$\dfrac{1}{|AP|^2}+\dfrac{1}{|AQ|^2}$为定值$c$。

可设直线$x=my+a$，与$y^2=2px$联立消x得

$y^2-2pmy-2pa=0$,设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$（$y_1>0,y_2<0$）

则$y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-2pa$

$|AP|=\sqrt{1+m^2}y_1,|AQ|=-\sqrt{1+m^2}y_2$

则$\dfrac{1}{|AP|^2}+\dfrac{1}{|AQ|^2}=\dfrac{1}{(1+m^2)y_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{(1+m^2)y_2^{\ 2}}=\dfrac{y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}}{(1+m^2)y_1^{\ 2}y_2^{\ 2}}$

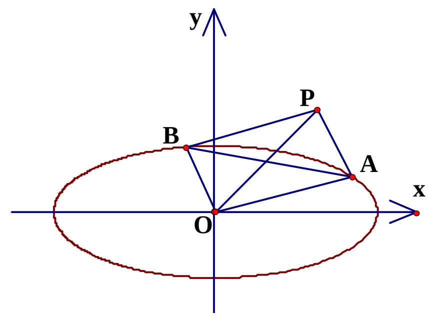
$=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(1+m^2)y_1^{\ 2}y_2^{\ 2}}=\dfrac{4p^2m^2+4pa}{4p^2a^2(1+m^2)}=\dfrac{pm^2+a}{pa^2(1+m^2)}=c$

$cpa^2+cpa^2m^2=pm^2+a$，$cpa^2-a+(cpa^2-p)m^2=0$

对m恒成立，故$cpa^2-a=0且cpa^2-p=0$

$a=p$，$c=\dfrac{1}{p^2}$，故存在定点 A（p,0）使$\dfrac{1}{|AP|^2}+\dfrac{1}{|AQ|^2}$为定值$\dfrac{1}{p^2}$

921、已知直线 l：$y=mx+1$ 与椭圆 C：$ax^2+y^2=2$ 相交于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ，问：当 a,m 满足 $a+2m^2=1$ 时，求平行四边形 OAPB 的面积 $S(a)$ 的值域。



解：$\begin{cases} y=mx+1 \\ ax^2+y^2=2 \end{cases}$ 消 y 得 $(a+m^2)x^2+2mx-1=0$（1）

因 $a+2m^2=1$，故 $a+m^2=1-m^2$

于是（1）化为

$(1-m^2)x^2+2mx-1=0$（2）

因为直线 l 与椭圆 C 交于两点

所以 $4m^2+4(1-m^2)>0$ 且 $1-m^2\neq 0$（3）

因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$，所以

$1-2m^2>0$ 且 $1-2m^2\neq 1$（4）

由（3）（4）解得 $0<m^2<\dfrac{1}{2}$

设 A (x_1,y_1)，B (x_2,y_2)

则 $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2-1}$， $x_1x_2=\dfrac{1}{m^2-1}$

$|AB|=\sqrt{(1+m^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+m^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+m^2)[(\dfrac{2m}{m^2-1})^2-\dfrac{4}{m^2-1}]}=\dfrac{2\sqrt{1+m^2}}{1-m^2}$

O 到 AB 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$, $S(a)=|AB|\,d=\dfrac{2}{1-m^2}\in(2,4)$

935、(圆锥曲线)

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过椭圆的右焦点 $F(c,o)$ 的直线 l 与椭圆交于 A、B 两点且与圆 $(x-3c)^2+y^2=2c^2$ 相切，若 AB 的中点为 P，DPOF 面积为 2,求椭圆方程。

解： $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$， $\dfrac{x^2}{2c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$， \ $x^2+2y^2=2c^2$①

过椭圆的右焦点 $F(c,o)$ 的直线 l 与圆 $(x-3c)^2+y^2=2c^2$ 相切，于是 l 的斜率为 ± 1，

故方程为 $y=\pm(x-c)$②，联立①②消去 x 得 $3y^2\pm 2cy-c^2=0$

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，AB 的中点 $P(x_0,y_0)$，则 $|y_0|=|\dfrac{y_1+y_2}{2}|=\dfrac{c}{3}$，

于是DPOF的面积$=\dfrac{c^2}{6}=2$， \ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{12}=1$

938、(圆锥曲线)

已知点 A(1，2),过点（5，-2）且斜率为 k 的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于 B、C，那么三角形 ABC 的形状是

解：设 $B(\frac{y_1^{\ 2}}{4},y_1)$ ， $C(\frac{y_2^{\ 2}}{4},y_2)$

$$k_{AB}\bullet k_{AC}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^{\ 2}}{4}-1}\bullet\frac{y_2-2}{\frac{y_2^{\ 2}}{4}-1}=\frac{16}{(y_1+2)(y_2+2)}$$

B、C 与点（5，-2）三点共线，于是

$\dfrac{y_1+2}{\frac{y_1^{\ 2}}{4}-5}=\dfrac{y_2+2}{\frac{y_2^{\ 2}}{4}-5}$， $(y_1+2)(y_2^{\ 2}-20)=(y_2+2)(y_1^{\ 2}-20)$

$y_1y_2^{\ 2}-20y_1+2y_2^{\ 2}=y_2y_1^{\ 2}-20y_2+2y_1^{\ 2}$

$(y_2-y_1)(y_1y_2+2y_1+2y_2+20)=0$

因 $y_2\neq y_1$ 故 $(y_1+2)(y_2+2)=-16$，于是 $k_{AB}\bullet k_{AC}=-1$， $\angle A=90°$

955、(圆锥曲线)

设中心在原点,焦点在 x 轴上且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆交圆 $x^2+y^2-4x-2y+\frac{5}{2}=0$ 于 A、B 两点、若线段 AB 是圆的直径.求(1)AB 的斜率.(2)椭圆的方程

解：（1）圆方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

因线段 AB 是圆的直径，故圆心 (2,1) 线段 AB 的中点， $|AB|=2\sqrt{\frac{5}{2}}$

设设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4,y_1+y_2=2$

依题意设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 故 $a^2=2b^2$，于是椭圆 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$， $x^2+2y^2=2b^2$

$x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2}=2b^2$， $x_2^{\ 2}+2y_2^{\ 2}=2b^2$

相减得 $x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+2(y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2})=0$,于是 $4+4k_{AB}=0$， $k_{AB}=-1$

（2）由（1）得直线 AB 的方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $y=3-x$

与 $x^2+2y^2=2b^2$ 联立消去 y 得， $3x^2-12x+18-2b^2=0$

于是 $x_1+x_2=4,x_1x_2=\frac{18-2b^2}{3}$

$|AB|^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=2(16-4\times\frac{18-2b^2}{3})=10$， $b^2=\frac{39}{8},a^2=\frac{39}{4}$,故椭圆方程是 $\frac{x^2}{\frac{39}{4}}+\frac{y^2}{\frac{39}{8}}=1$

956、(圆锥曲线)

双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$右顶点为A，P是双曲线上异于顶点的动点，从A引双曲线的两渐近线的平行线与直线OP分别交于 Q、R 两点

（1）无论P在什么位置总有$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OR}|$

（2）设C为QR的中点，求其轨迹方程

解：双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的右顶点为$A(2,0)$

两渐近线为$\frac{x^2}{4}-y^2=0$，过$A(2,0)$点与渐近线两平行的两直线为

$\frac{(x-2)^2}{4}-y^2=0$　　①

设$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$　则直线OP的方程是$y=\frac{y_0}{x_0}x$②

且$\frac{x_0^{\ 2}}{4}-y_0^{\ 2}=1$　即　$x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2}=4$　③

联立①②消y得$(x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2})x^2-4x_0^{\ 2}x+4x_0^{\ 2}=0$

设$Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$，则$x_1x_2=\frac{4x_0^{\ 2}}{x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2}}=\frac{4x_0^{\ 2}}{4}=x_0^{\ 2}$

于是$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OR}|$

(2)设QR的中点坐标是$C(x,y)$

则$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2x_0^{\ 2}}{x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2}}=\frac{2x_0^{\ 2}}{4}=\frac{x_0^{\ 2}}{2}$④，$\frac{y}{x}=\frac{y_0}{x_0}$⑤

由④得$x_0^{\ 2}=2x$，代入⑤得$y_0^{\ 2}=\frac{x_0^{\ 2}y^2}{x^2}=\frac{2xy^2}{x^2}=\frac{2y^2}{x}$

代入③得$2x-\frac{8y^2}{x}=4$即$(x-1)^2-4y^2=1$

由④得$x=\frac{x_0^{\ 2}}{2}>1$，于是所求方程是$(x-1)^2-4y^2=1\ (x>1)$

980、(圆锥曲线)

已知点 p 在以坐标轴为对称轴的椭圆上，点 p 到两焦点的距离分别为$\frac{4}{3}\sqrt{5}$和$\frac{2}{3}\sqrt{5}$，过 p 作长轴的垂线经过椭圆的一个焦点，求椭圆的方程。

解：　$2a=\frac{4}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，$a=\sqrt{5}$

因过 p 作长轴的垂线经过椭圆的一个焦点

故半通径$\frac{b^2}{a}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$，$b^2=\frac{10}{3}$，当焦点在$x$轴时椭圆的方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{10}{3}}=1$

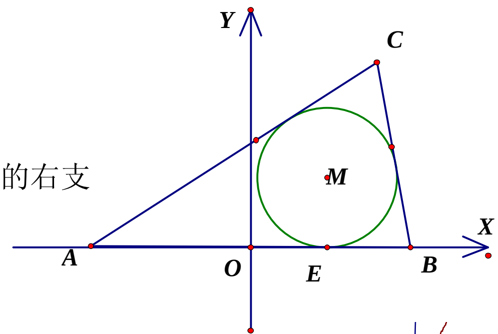
998、三角形 ABC 一边 AB 长为 4，其内切圆 M 与 AB 切于点 E，满足 $\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{BE}=\vec{0}$

（1）求动点 C 的轨迹 H

（2）若直线 CB 与曲线 H 的另一交点是 D，三角形 ABD 的内心是 N，当|*MN*|=*2* 时，求 BC 的长度

解：(1) 以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AB 中点为原点建立坐标系

$\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{BE}=\vec{0}$，$|AB|=4$



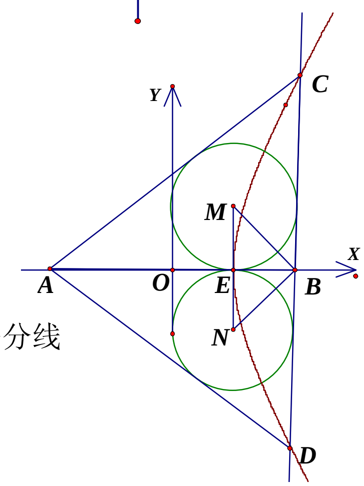
$|\overrightarrow{AE}|=3, |\overrightarrow{BE}|=1$，

故 $|CA|-|CB|=|AE|-|BE|=2$

故 C 点的轨迹是以 A、C 为焦点的双曲线的右支

其 $2a=2,\ 2c=4$，于是 $a^2=1, b^2=3$

轨迹 H 的方程是 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x>1)$



（2）ΔABC 的内切圆 M 与 AB 切于点 E(1，0)
ΔABD 的内切圆 N 与 AB 切于点 E(1，0)

于是 $MN\perp x$轴

连 BM、BN，则它们分别是 $\angle ABC$和$\angle ABD$ 的角平分线

于是 $\angle MBN=90°$，因为 $|\mathrm{MN}|=2$，$|\mathrm{EB}|=1$

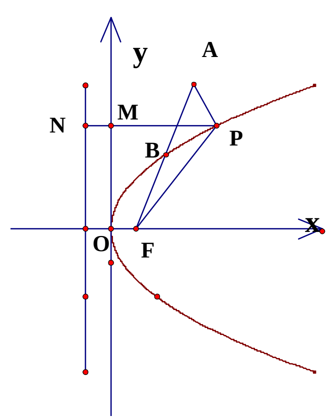
所以 ΔMBN 是等腰直角三角形，因此，$CB\perp x$轴

于是 $|\mathrm{BC}|=\dfrac{b^2}{a}=3$

1004、(圆锥曲线)

已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，点 P 在 y 轴上的射影是 M，

点 A($\frac{7}{2}$,4)，则 $|PA|+|PM|$ 的最小值是______



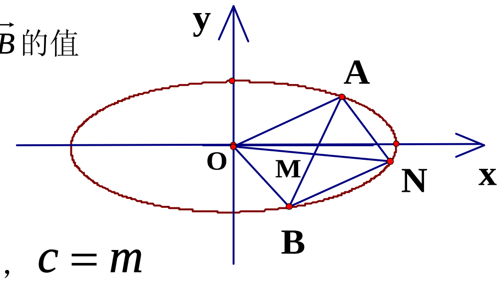
解：作图，$F(\frac{1}{2},0)$，准线 $x=-\frac{1}{2}$

注意 A($\frac{7}{2}$,4)在抛物线外面

$|PA|+|PM|=|PA|+|PN|-\dfrac{1}{2}=|PA|+|PF|-\dfrac{1}{2}$

$\geq|AF|-\dfrac{1}{2}=\sqrt{3^2+4^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

1064、已知，椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=\frac{m^2}{2}(m>0)$，经过其右焦点 F 且以 $\vec{e}=(1,1)$ 为方向向量的直线 l 交椭圆 C 于 A、B 两点，M 为线段 AB 的中点，设 O 的椭圆的中心，射线 OM 交椭圆 C 于 N 点，



（1）证明：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}$　　（2）求 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$ 的值

解：椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=\frac{m^2}{2}(m>0)$ 中

$\frac{x^2}{\frac{5m^2}{2}}+\frac{y^2}{\frac{3m^2}{2}}=1$，$c^2=\frac{5m^2}{2}-\frac{3m^2}{2}=m^2$，$c=m$

因 $\vec{e}=(1,1)$ 为直线 l 的方向向量，故 l 的斜率为 1

因此 l 方程为 $y=x-m$ 代入椭圆 $6x^2+10y^2=15m^2$

得 $16x^2-20mx-5m^2=0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{5m}{4}$，$x_1x_2=-\frac{5m^2}{16}$

$y_1+y_2=x_1-m+x_2-m=-\frac{3m}{4}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\frac{5m}{4},\frac{-3m}{4})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=(\frac{5m}{8},\frac{-3m}{8})$

于是 $k_{ON}=\frac{\frac{-3m}{8}}{\frac{5m}{8}}=-\frac{3}{5}$

射线 ON 为 $y=-\frac{3}{5}x(x>0)$，代入椭圆 $6x^2+10y^2=15m^2$ 得

$x_N=\frac{5m}{4},y_N=-\frac{3m}{4}$，故 $\overrightarrow{ON}=(\frac{5m}{8},\frac{-3m}{8})$,于是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}$

（2）$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)$

$=2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2=-\frac{5m^2}{8}-\frac{5m^2}{4}+m^2=-\frac{7m^2}{8}$

1127、已知 P 是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点，若 $|\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}|=0$

$\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}$，则椭圆的离心率＝_______

提示：设 $|\overrightarrow{PF_1}|=r_1$，$|\overrightarrow{PF_2}|=r_2$ 则

$r_1+r_1=2a$，$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{2}$，　$r_1{}^2+r_2{}^2=(2c)^2$

1203、连结抛物线上任意四点组成的四边形可能是____________（填写所有正确选项的序号）

①菱形　②有 3 条边相等的四边形　③梯形　④平行四边形

⑤有一组对角相等的四边形

答：②③⑤

⑤的构造：先在抛物线上取两点，作其中垂线与抛物线交于另两点，得筝形

1229、双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的实轴左顶点为 A 右焦点为 F，在第一象限内任取双曲线上一点 P，问是否存在常数 m，使得 $\angle PFA=m\angle PAF$，证明你的结论

解：设 $P(x_0,y_0)$

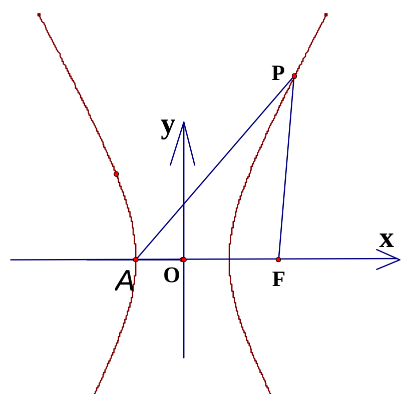
则 $y_0{}^2=3(x_0{}^2-1)$，$\tan\angle PAF=\frac{y_0}{x_0+1}$，$\tan\angle PFA=-\frac{y_0}{x_0-2}$，

$$\tan 2\angle PAF=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{1-(\frac{y_0}{x_0+1})^2}=\frac{2y_0(x_0+1)}{(x_0+1)^2-y_0{}^2}$$

$$=\frac{2y_0(x_0+1)}{(x_0+1)^2-3(x_0{}^2-1)}=\frac{2y_0}{(x_0+1)-3(x_0-1)}$$

$$=-\frac{y_0}{x_0-2}=\tan\angle PFA$$

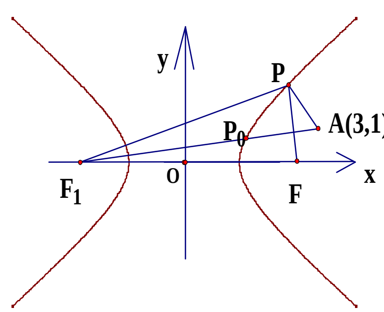
于是 $\angle PFA=2\angle PAF$，故存在 m=2



1245、设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右支上的一个动点，F 是双曲线的右焦点，

A(3，1)，

则 $|PA|+|PF|$ 的最小值是_________



解：$|PA|+|PF|=|PA|+|PF_1|-2a$

$\geq|AF_1|-2a=\sqrt{(3+2)^2+1^2}-2\sqrt{3}=\sqrt{26}-2\sqrt{3}$

当且仅当 P 与 P_0 重合时取等号

1254、(圆锥曲线)

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点分别是 F_1、F_2，在左支上的弦 AB 过 F_1，若$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$

求证： |AB|的长度为 4a

证明： $2|AB|=|AF_2|+|BF_2|=2a+|AF_1|+2a+|BF_1|=4a+|AB|$

于是|AB|=4a

1272、(圆锥曲线) (竞赛)

底面半径 r=1 的圆柱，被过 A，D 两点的倾斜平面所截，截面是离心率 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆，若圆柱母线截后最短处 AB=1,则截面以下部分的几何体积是______

提示：离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 可得 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$，b=r=1，$a=\sqrt{2}$，

$h_{上}=\sqrt{(2a)^2-(2b)^2}=\sqrt{8-4}=2$，$v_{上}=p$，$v_{全}=3p$，$v_{下}=3p$

1386

http://bbs.pep.com.cn/thread-286235-1-1.html

已知抛物线 C: $y^2=2px(p>0)$，直线 l 过点 $P(4,0)$ 且与 C 交于 A,B 两点，且对任意直线 l 均有 $OA\perp OB$

(1)求抛物线的方程(2)已知 $\overrightarrow{AP}=l\,\overrightarrow{PB}$，则当 $\dfrac{1}{3}\le l\le 3$ 时，求 $|AB|$ 的最小值

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $F(\dfrac{p}{2},0)$

设设焦点弦方程为 $x=ty+4$

由 $OA\perp OB$ 得，$x_1x_2+y_1y_2=0$，$\dfrac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+y_1y_2=0$

于是 $y_1y_2=0$（舍）或 $y_1y_2=-4p^2$

$x=ty+4$ 与 $y^2=2px$ 联立消 x 得

$y^2-2pty-8p=0$,故,$y_1y_2=-8p$

于是 $-4p^2=-8p$， $p=2$， $y^2=4x$

（2）设 $A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$， $B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$ 因 $\overrightarrow{AP}=l\,\overrightarrow{PB}$ 故 $(4-\dfrac{y_1^2}{4},-y_1)=l(\dfrac{y_2^2}{4}-4,y_2)$,

即 $\begin{cases}4-\dfrac{y_1^2}{4}=l(\dfrac{y_2^2}{4}-4)\\ -y_1=ly_2.\end{cases}$ 解得 $y_2^2=\dfrac{16}{l}$ $\quad y_1^2=16l$，

$$|AB|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(\frac{y_1^{\ 2}}{4}-\frac{y_2^{\ 2}}{4})^2+y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}-2y_1y_2$$

$$=(4l-\frac{4}{l})^2+16l+\frac{16}{l}+8p=16(\frac{1}{l}-l)^2+16(\frac{1}{l}+l)+16$$

$$=16[(\frac{1}{l}+l)^2+(\frac{1}{l}+l)-3]$$

因$\frac{1}{3}\le l\le 3$，故$2\le\frac{1}{l}+l\le\frac{10}{3}$

故当$\frac{1}{l}+l=2$即$l=1$时$|AB|^2$最小=16×3，$|AB|$最小=$4\sqrt{3}$

1393

http://bbs.pep.com.cn/thread-285152-1-1.html

已知F_1、F_2为椭圆的两个焦点，P为椭圆上一点，∠F1PF2=60°，求椭圆离心率的范围。

解1：解：设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$则$r_1+r_2=2a$

$$\cos 60°=\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^{\ 2}+r_2^{\ 2}-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{4a^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{4b^2-2r_1r_2}{2r_1r_2}=\frac{4b^2}{2r_1r_2}-1\ge\frac{4b^2}{2(\frac{r_1+r_2}{2})^2}-1=\frac{2b^2}{a^2}-1$$

故$\frac{1}{2}\ge\frac{2b^2}{a^2}-1$，$e\ge\frac{1}{2}$又因为$e<1$，因此$\frac{1}{2}\le e<1$

解2：$\frac{|PF_1|}{\sin a}=\frac{|PF_2|}{\sin(120°-a)}=\frac{2c}{\sin 60°}\Rightarrow\frac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin a+\sin(120°-a)}=\frac{2c}{\sin 60°}$

这里$0\le a<120°$

故$e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sin 60°}{\sin a+\sin(120°-a)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}\sin a+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin(a+30°)}\in[\frac{1}{2},1)$

1424、
http://bbs.pep.com.cn/thread-290520-1-3.html
如图，点 F 为双曲线 C 的左焦点，左准线l交 x 轴于点 Q，点 P 是l上一点，已知$|PQ|=|FQ|=1$,且线段 PF 的中点 M 在双曲线 C 的左支上

（1）求双曲线 C 的标准方程

（2）若过点 F 的直线l与双曲线 C 的左右两支分别交于 A、B 两点，设$\overrightarrow{FB}=l\overrightarrow{FA}$，当$l\in[6,+\infty)$时，求直线的斜率的范围。

解（1）$x^2-y^2=2$

（2）解 1：点$F(-2,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

直线AB的方程为：$x=ty-2$与$x^2-y^2=2$联立消 y 得

$(t^2-1)y^2-4ty+2=0$

于是$y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{t^2-1}$

若$\overrightarrow{MA}=l\overrightarrow{MB}$则$y_2=ly_1$，于是得$y_1=\dfrac{4t}{(t^2-1)(1+l)}$，$y_2=\dfrac{4lt}{(t^2-1)(1+l)}$

代入（2）得，$\dfrac{16lt^2}{(t^2-1)^2(1+l)^2}=\dfrac{2}{t^2-1}$

于是$\dfrac{8t^2}{t^2-1^2}=\dfrac{1+2l+l^2}{l}=l+\dfrac{1}{l}+2$

因为$l\geq 6$，故$l+\dfrac{1}{l}+2\geq\dfrac{49}{6}$，$\dfrac{8t^2}{t^2-1}\geq\dfrac{49}{6}$，$0<1-\dfrac{1}{t^2}\leq\dfrac{48}{49},\dfrac{1}{49}\leq\dfrac{1}{t^2}<1$，于是斜率$k=\dfrac{1}{t}\in(-1,-\dfrac{1}{7}]\cup[\dfrac{1}{7},1)$

解 2：设焦点$F(-2,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

设$\overrightarrow{MA}=l\overrightarrow{MB}$，故$\begin{cases}x_2+2=l(x_1+2)\\y_2=ly_1\end{cases}$ 代入$x^2-y^2=2$得

$(lx_1+2l-2)^2-l^2y_1^2=2$ (1) 又$x_1^2-y_1^2=2$ (2)

由$(1)-l^2(2)$得 $2(l-1)(2lx_1+2(l-1)]=2(1-l^2)$

$2lx_1+2(l-1)=-1-l$，$x_1=\dfrac{-3l+1}{2l}$，

设$y=k(x+2)$则$y_1=k(x_1+2)=k\bullet\dfrac{l+1}{2l}$

$(\dfrac{-3l+1}{2l})^2-k^2(\dfrac{l+1}{2l})^2=2$，

$k^2=\dfrac{l^2-6l+1}{(l+1)^2}=1-\dfrac{8}{l+1}+\dfrac{8}{(l+1)^2}=8(\dfrac{1}{l+1}-\dfrac{1}{2})^2-1$

因$l\in[6,+\infty)$故$0<\dfrac{1}{l+1}\leq\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{49}\leq k^2<1$，$k\in(-1,-\dfrac{1}{7}]\cup[\dfrac{1}{7},1)$

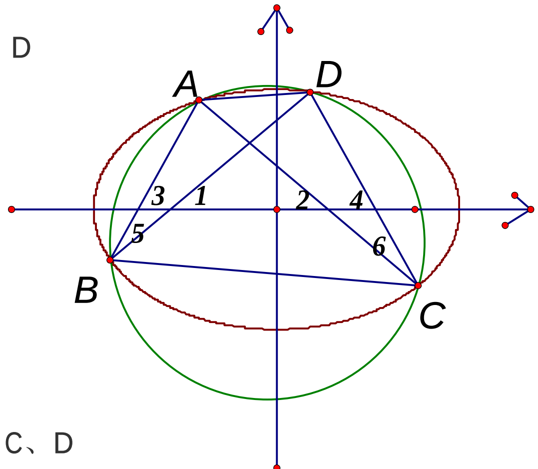
以上两种解法计算量相当若这个题目如果直接让你求 l 的范围

可由解 2 中的$|x_1|=|\dfrac{-3l+1}{2l}|\geq\sqrt{2}$，解得$l\leq 3-2\sqrt{2}$或$l\geq 3+2\sqrt{2}$，而用算法 1 就不容易了，可见要多掌握一些运算手段才能得心应手

1438

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292188&extra=&page=1

已知 AB 与 CD 是椭圆的两条割线,且 AB 与 CD 的斜率互为相反数,求证 AC 与 BD 的斜率也互为相反数



证明：设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的四点 A、B、C、D

因 AB 与 CD 的斜率互为相反数
故可设直线 AB 与 CD 的方程分别为

$kx-y+m=0$ 和 $kx+y+n=0$

这两条直线方程可合为方程

$(kx-y+m)(kx+y+n)=0$

于是过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$
与两条直线直线 AB 与 CD 的四个交点 A、B、C、D
的曲线系方程是 $(kx-y+m)(kx+y+n)+l(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0$
$(lb^2+k^2)x^2+(la^2-1)y^2+(kn+km)x+(m-n)y+mn-la^2b^2)=0$（1）

由 $lb^2+k^2=la^2-1$ 解得 $l=\frac{k^2+1}{a^2-b^2}$ 这时

$lb^2+k^2=la^2-1=\frac{a^2k^2+b^2}{a^2-b^2}\neq 0$

此时（1）是圆的方程，于是 A、B、C、D 四点共圆，于是 $\angle 5=\angle 6$
因 AB 与 CD 的斜率互为相反数，故 $\angle 3=\angle 4$
所以 $\angle 3+\angle 5=\angle 6+\angle 4$，故 $\angle 1=\angle 2$，故 AC 与 BD 的斜率也互为相反数
1458、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=284475&extra=&page=1

已知椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一点 $C(\sqrt{3},\sqrt{3})$，若椭圆上存在两点 P,Q 使 $\angle PCQ$ 的平分线总垂直于 x 轴，证明 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\vec{a}=(3,1)$ 平行
证明： 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

因 $\angle PCQ$ 的平分线总垂直于 x 轴，故 $k_{CP}+k_{CQ}=0$ 总成立，$\frac{y_1-\sqrt{3}}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{y_2-\sqrt{3}}{x_2-\sqrt{3}}=0$①

设 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，整理并化简得：

$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$ ，$\therefore x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2},x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2}$

①可化为 $\frac{kx_1+m-\sqrt{3}}{x_1-\sqrt{3}}+\frac{kx_2+m-\sqrt{3}}{x_2-\sqrt{3}}=0,$

$(x_2-\sqrt{3})(kx_1+m-\sqrt{3})+(x_1-\sqrt{3})(kx_2+m-\sqrt{3})=0$
$2kx_1x_2+(m-\sqrt{3}-\sqrt{3}k)(x_1+x_2)-2\sqrt{3}(m-\sqrt{3})=0$
$\dfrac{2k(3m^2-12)}{1+3k^2}-\dfrac{6km(m-\sqrt{3}-\sqrt{3}k)}{1+3k^2}-2\sqrt{3}(m-\sqrt{3})=0$
$6(3\mathrm{k}^2-4\mathrm{k}+1)+3\sqrt{3}km-\sqrt{3}m=0$
$6(3\mathrm{k}-1)(\mathrm{k}-1)+\sqrt{3}m(3k-1)=0$对$m$总成立
于是$3k-1=0$，$k=\dfrac{1}{3}$，又向量$\vec{a}=(3,1)$的斜率为$\dfrac{1}{3}$
因此$\overrightarrow{PQ}//\vec{a}$

此题的一般情况

椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上的三点$A(x_0,y_0),B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$,若 A 是定点，且 AB 与 AC 的斜率互为相反数，求证 BC 的斜率一定

证明：$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1\cdots$①，$\dfrac{x_2{}^2}{a^2}+\dfrac{y_2{}^2}{b^2}=1\cdots$②，$\dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}=1\cdots$③

由①-②得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}\cdots$④

同理$\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\dfrac{b^2(x_1+x_0)}{a^2(y_1+y_0)}\cdots$⑤　$\dfrac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=-\dfrac{b^2(x_2+x_0)}{a^2(y_2+y_0)}\cdots$⑥

因为 AB 与 AC 的斜率互为相反数

于是$\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\dfrac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=0\cdots$⑦　$\dfrac{x_1+x_0}{y_1+y_0}+\dfrac{x_2+x_0}{y_2+y_0}=0\cdots$⑧

由⑦得，$x_2y_1-y_0x_2-x_0y_1+x_0y_0+x_1y_2-y_0x_1-x_0y_2+x_0y_0=0$

由⑧得，$x_2y_1+x_0y_2+y_0x_1+x_0y_0+x_1y_2+x_0y_1+y_0x_2+x_0y_0=0$

相减得$2x_0(y_1+y_2)+2y_0(x_1+x_2)=0,\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{y_0}{x_0}$代入④得

$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=(-\dfrac{b^2}{a^2})(-\dfrac{x_0}{y_0})=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$一定

1459、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=284686&page=1#pid2961689

已知一条斜率为定值 k 的动直线与两抛物线 $y=x^2, y=2x^2-3x+3$ 各有两个交点，交点顺序是 A,B,C,D，求证：|AB|—|CD|为定值

证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4),x_1<x_2<x_3<x_4$，

于是 $|AB|=\sqrt{1+k^2}(x_2-x_1),|CD|=\sqrt{1+k^2}(x_4-x_3),$

$|AB|-|CD|=\sqrt{1+k^2}[(x_2+x_3)-(x_1+x_4)],$ 设动直线为 $y=kx+b$

由 $y=kx+b$ 和 $y=x^2$ 得， $x^2-kx-b=0$， 于是 $x_1+x_4=k$

由 $y=kx+b$ 和 $y=2x^2-3x+3$ 得， $2x^2-(k+3)x+3-b=0$， 于是 $x_2+x_3=\dfrac{k+3}{2}$

于是 $|AB|-|CD|=\sqrt{1+k^2}[\dfrac{k+3}{2}-k]$ 为定值

1463、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=283841&extra=&page=1

已知椭圆(标准方程)的两个焦点在 x 轴上，A，B 是椭圆上两动点,分别以 A，B 为切点作椭圆的切线 l_1,l_2， 当 l_1,l_2 的夹角为定值时，求 l_1,l_2 两直线交点 S 的轨迹，并说明轨迹的形状

解：设过 $S(x_0,y_0)$ 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的切线为 $y=kx+m$，

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases}$ 消 y 得

$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$

$D=4a^4k^2m^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)=0$

$-(-a^4b^2k^2+a^2b^2m^2-a^2b^4)=0, m^2=a^2k^2+b^2$①

由于 $S(x_0,y_0)$ 在 $y=kx+m$ 上， 于是 $m=y_0-kx_0$②

②代入①得 $({x_0}^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+{y_0}^2-b^2=0$， 以下同解 1

设切线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,

于是 $k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{{x_0}^2-a^2}, k_1k_2=\dfrac{{y_0}^2-b^2}{{x_0}^2-a^2}$

(1)当 $q=90°$ 时， $k_1k_2=\dfrac{{y_0}^2-b^2}{{x_0}^2-a^2}=-1$， 所求的方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$

(1)当 $q\neq 90°$ 时， $\tan^2 q=|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|^2=\dfrac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(1+k_1k_2)^2}=\dfrac{(\dfrac{2x_0y_0}{{x_0}^2-a^2})^2-\dfrac{4({y_0}^2-b^2)}{{x_0}^2-a^2}}{(1+\dfrac{{y_0}^2-b^2}{{x_0}^2-a^2})^2}$，

$\dfrac{4a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2-4a^2b^2}{({x_0}^2+{y_0}^2-a^2-b^2)^2}$， 所求的方程为

$\tan^2({x_0}^2+{y_0}^2-a^2-b^2)^2=4a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2-4a^2b^2$

1464、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=286761&page=1#pid2982676

已知抛物线 $y^2=4x, A\left(1,2\right)$ 是抛物线上一点，过点 $N(5,-2)$ 做直线交抛物线于 B、C 两点，试判断三角形 ABC 的形状。

解：设直线 **BC** 的方程为 $m(\mathrm{x}-1)+n(y-2)=1$①

直线 **BC** 过 $N(5,-2)$，于是 $4m-4n=1$

抛物线 $y^2=4x$可化为$(y-2)^2+4(y-2)=4(x-1)$ ②

把$1=m(\mathrm{x}-1)+n(y-2)$ 代入②

$$(y-2)^2+4(y-2)[m(\mathrm{x}-1)+n(y-2)]=4(x-1)[m(\mathrm{x}-1)+n(y-2)]$$

两边除以 $(x-1)^2$ 得，$(\frac{y-2}{x-1})^2+\frac{4(y-2)}{x-1}[m+\frac{n(y-1)}{x-1}]=4[m+\frac{n(y-1)}{x-1}]$③

设 $\frac{y-2}{x-1}=k$ 代入③得 $k^2+4k(m+nk)=4(m+nk)$

即 $(1+4n)k^2+(4m-4n)k-4m=0$④

由于 **B**，**C** 是①与②的交点，于是 **B**，**C** 的坐标是③的解

设 **AB,AC** 的斜率分别为 k_1,k_2,则 k_1,k_2是④的两根

故 $k_1k_2=\frac{-4m}{1+4n}=\frac{-4m}{4m}=-1$，故 $AB\perp AC$， $DABC$ 的是直角三角形

以上的解法是为了玩味此题而想出来的

1466、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=287704&page=1#pid2989789

已知抛物线 $y^2=2px$，过焦点 F 任做两互相垂直的直线与抛物线分别相交于两点 A， B 和 C， D，问四点能否共圆?若可以，求出圆方程

解：设一弦所在的直线为 $x=ty+\frac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px$ 得 $y^2-2ptx-p^2=0$

于是 $y_1y_2=-p^2$

故 $|FA||F\mathrm{B}|=(1+k^2)|y_1y_2|=(1+\frac{1}{t^2})p^2$，同理 $|FC||F\mathrm{D}|=(1+t^2)p^2$

A， B，C， D 四点共圆的充要条件是 $|FA||F\mathrm{B}|=|FC||F\mathrm{D}|$

即 $1+\frac{1}{t^2}=1+t^2$，解得 t=±1