廖老师网上千题解答分类十八、超纲二次曲线

92、已知某椭圆的焦点是 F_1（-4，0）,F_2（4，0）,过点 F_2 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B，｜F_1B｜+｜F_2B｜=10,椭圆上不同两点 A、C 满足条件：｜F_2A｜、｜F_2B｜、｜F_2C｜成等差数列（高考不要求）

（1）求该椭圆的方程（2）求弦 AC 中点的横坐标。

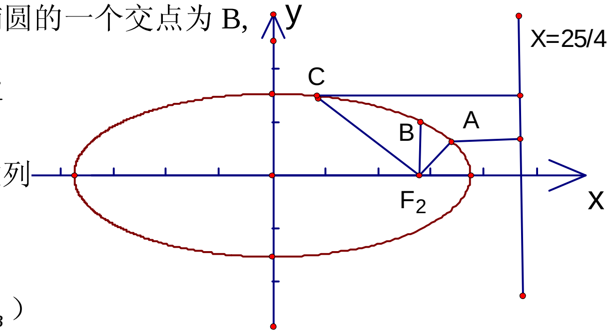
解：设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

由｜F_1B｜+｜F_2B｜=10,得 $a=5$

由 F_1（-4，0）,F_2（4，0）得 $c=4$，$b=3$

故椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

（2）由过点 F_2 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B,



得｜F_2B｜$=\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{5}=\frac{9}{5}$，离心率 $e=\frac{4}{5}$

由｜F_2A｜、｜F_2B｜、｜F_2C｜成等差数列

得｜F_2A｜+｜F_2C｜=2｜F_2B｜$=\frac{18}{5}$

｜F_2A｜+｜F_2C｜$=\frac{4}{5}$（$\frac{25}{4}-x_A+\frac{25}{4}-x_B$）

$\frac{4}{5}$（$\frac{25}{4}-x_A+\frac{25}{4}-x_B$）$=\frac{18}{5}$

$\frac{25}{2}-x_A-x_B=\frac{9}{2}$，$x_A+x_B=8$

弦 AC 中点的横坐标是 4

286、已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（a>b>0）,过中心 O 作互相垂直的两条铉 AC、BD，设点 A、B 的离心角分别为 θ_1 θ_2，求｜$\cos(\theta_1-\theta_2)$｜的取值范围。

解：点 A、B 的离心角分别为 θ_1和 θ_2

$A(a\cos q_1, b\sin q_1)$，$B(a\cos q_2, b\sin q_2)$，

因 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,故 $a^2\cos q_1\cos q_2+b^2\sin q_1\sin q_2=0$

设 $t=\cos q_1\cos q_2+\sin q_1\sin q_2=\cos(q_1-q_2)$

$\sin q_1\sin q_2=t-\cos q_1\cos q_2$代入得

$a^2\cos q_1\cos q_2+b^2(t-\cos q_1\cos q_2)=0$

$\cos q_1 \cos q_2 = -\dfrac{tb^2}{a^2-b^2}$

$\sin q_1 \sin q_2 = t - \cos q_1 \cos q_2 = t + \dfrac{tb^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ta^2}{a^2-b^2}$

$|\cos(q_1+q_2)| = |\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2| = |-\dfrac{tb^2}{a^2-b^2} - \dfrac{ta^2}{a^2-b^2}|$

$= |\dfrac{t(a^2+b^2)}{a^2-b^2}| \le 1$，故$|t| \le \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

292、圆 $x^2+y^2=1$ 和抛物线 $y=x^2-2$ 上三个不同点 ABC 若 AB 和 AC 和圆相切

求证：BC 也和圆相切

证明：设抛物线 y=x^2-2 上三个不同点 A$(x_1, x_1^{\ 2}-2)$，B$(x_2, x_2^{\ 2}-2)$

C$(x_3, x_3^{\ 2}-2)$ 则

直线 AB： $y - x_1^{\ 2} + 2 = (x_1+x_2)(x-x_1)$

即 $(x_1+x_2)x - y - x_1x_2 - 2 = 0$

与圆相切，则 $\dfrac{|x_1x_2+2|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+1}} = 1$

故 $(x_1^{\ 2}-1)x_2^{\ 2} + 2x_1x_2 + 3 - x_1^{\ 2} = 0$

同理 $(x_1^{\ 2}-1)x_3^{\ 2} + 2x_1x_3 + 3 - x_1^{\ 2} = 0$

故 x_2和x_3 是方程 $(x_1^{\ 2}-1)x^2 + 2x_1x + 3 - x_1^{\ 2} = 0$ 的两根

故有 $x_2 + x_3 = -\dfrac{2x_1}{x_1^{\ 2}-1}$， $x_2x_3 = \dfrac{3-x_1^{\ 2}}{x_1^{\ 2}-1}$

直线 BC： $(x_2+x_3)x - y - x_2x_3 - 2 = 0$

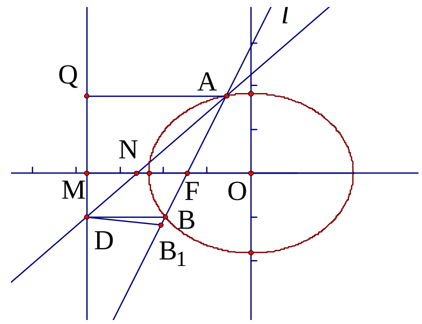
圆心到直线 BC 的距离 $d = \dfrac{|x_2x_3+2|}{\sqrt{(x_2+x_3)^2+1}} = \dfrac{|\dfrac{3-x_1^{\ 2}}{x_1^{\ 2}-1}+2|}{\sqrt{\dfrac{4x_1^{\ 2}}{(x_1^{\ 2}-1)^2}+1}} = \dfrac{|\dfrac{x_1^{\ 2}-1}{x_1^{\ 2}-1}|}{\sqrt{\dfrac{(x_1^{\ 2}+1)^2}{(x_1^{\ 2}-1)^2}}} = 1$

故直线 BC 与圆 $x^2+y^2=1$ 也相切

325、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ l 过左焦点交椭圆于 AB ， 左准线与 x 轴交于 M 点，M 与左焦点 F 的连线的中点为 N。

直线 AN 交准线于 D，求证 BD 平行于 x 轴(高考不要求)

证明：用同一法



过 D 点作 DB_1 // x 轴交直线 l 于点 B_1

作 AQ // x 轴交准线于点 Q

则 $\frac{MN}{AQ}=\frac{DN}{DA}=\frac{B_1F}{AB_1}$， $\frac{NF}{DB_1}=\frac{AF}{AB_1}$，

$\because MN=NF$

$\therefore AQ\bullet\frac{B_1F}{AB_1}=DB_1\bullet\frac{AF}{AB_1}$， 又 $AF=e\bullet AQ$

$\therefore AQ\bullet\frac{B_1F}{AB_1}=DB_1\bullet\frac{e\bullet AQ}{AB_1}$

故 $B_1F=e\bullet DB_1$， 即 B_1 在椭圆上， 因此

点 B_1 与点 B 重合，命题得证

335、已知椭圆过 M(1,2),以 y 轴为准线,e=0.5

求其上顶点和左顶点的轨迹方程（高考不要求）

解:（1）设左焦点为（x,y）

则 $\frac{\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}}{1}=\frac{1}{2}$

即 $(x-1)^2+(y-2)^2=(\frac{1}{2})^2$ 为左焦的轨迹方程

（2）设左顶点为（x,y)，左焦点为（m,n）

则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$①， $\frac{b^2}{c}=m$②

把 $b^2=a^2-c^2=3c^2$ 代入②得 $c=\frac{m}{3},a=\frac{2m}{3}$， $b=\frac{\sqrt{3}}{3}m$

$m-x=a-c=\frac{m}{3}\Rightarrow m=\frac{3}{2}x$， 又 $n=y$ 代入左焦的轨迹方程得

$(\frac{3}{2}x-1)^2+(y-2)^2=(\frac{1}{2})^2$ 为左顶点轨迹方程

（3）设上顶点为（x,y），左焦点为（m,n）则

$x-m=c=\frac{m}{3}\Rightarrow m=\frac{3}{4}x$， $y=n+b=n+\frac{\sqrt{3}}{3}m=n+\frac{\sqrt{3}}{4}x\Rightarrow n=y-\frac{\sqrt{3}}{4}x$

代入左焦的轨迹方程得$(\frac{3}{4}x-1)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{4}x-2)^2=(\frac{1}{2})^2$为上顶点轨迹方程

346、已知点 P 在圆$x^2+y^2+3x-4y=0$上，点 Q 在射线 OP 上，且|OP||OQ|=6，求点 Q 的轨迹方程。

解：设$\angle xOP=q$,$OP=r_1$， $OQ=r$， $Q(x,y)$

则$x=r\cos q$ ① $y=r\sin q$ ② $rr_1=16$③

∵ $Q(r_1\cos q,r_1\sin q)$在圆$x^2+y^2+3x-4y=0$上

∴ $r_1{}^2\cos^2 q+r_1{}^2\sin^2 q++3r_1\cos q-4r_1\sin q=0$

即$r_1{}^2+3r_1\cos q-4r_1\sin q=0$

两边乘以r^2得

$(rr_1)^2+3(r_1r)(r\cos q)-4(r_1r)(r\sin q)=0$

把①　②　③代入上式得

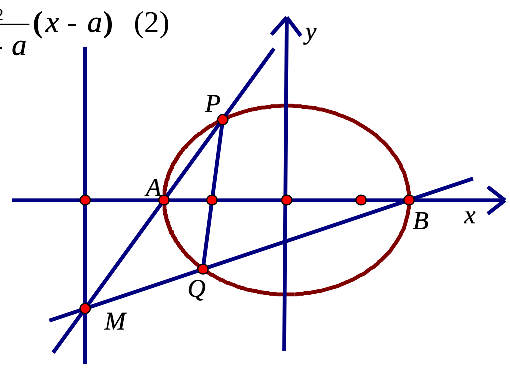
$(16)^2+3(16x)-4(16y)=0$

即$3x-4y+16=0$为所求

358、已知直线 l 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点 F 交椭圆于 P、Q， A、B 是椭圆的左右顶点，求证：直线 PA 与 QB 交于点 M 在左准线上(高考不要求)

证：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$， $F(-c,0)$，直线 PQ： $x=ty-c$，

直线$PA: y=\frac{y_1}{x_1+a}(x+a)$ (1)　直线$QB: y=\frac{y_2}{x_2-a}(x-a)$ (2)



左准线$x=-\frac{a^2}{c}$ (3)

(3) 代入(1)得$y=\frac{y_1}{x_1+a}(-\frac{a^2}{c}+a)=\frac{a(c-a)y_1}{c(x_1+a)}$

(3) 代入(2)得$y=\frac{y_2}{x_2-a}(-\frac{a^2}{c}-a)=\frac{-a(c+a)y_2}{c(x_2-a)}$

要证直线 PA 与 QB 交于点 M 在左准线上

只要证：$\dfrac{a(c-a)y_1}{c(x_1+a)}=\dfrac{-a(c+a)y_2}{c(x_2-a)}$ Û $\dfrac{(c-a)y_1}{ty_1-c+a}=\dfrac{-(c+a)y_2}{ty_2-c-a}$

Û $2cty_1y_2+b^2(y_1+y_2)=0\,(*)$

$x=ty-c$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 联立消 x 得

$b^2(ty-c)^2+a^2y^2=a^2b^2$

$(b^2t^2+a^2)y^2-2b^2cty-b^4=0$

故 $2cty_1y_2+b^2(y_1+y_2)=2ct(-\dfrac{b^4}{b^2t^2+a^2})+b^2(\dfrac{2b^2ct}{b^2t^2+a^2})=0$

于是(*)成立

377、已知双曲线过点 $M(-2,4)$，$N(4,4)$，它的一个焦点为 $F(1,0)$，则另一个焦点的轨迹方程为（　　）

A、$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1(y\neq 0)$或$x=1(y\neq 0)$

B、$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1(x\neq 0)$或$x=1(y\neq 0)$

C、$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1(x\neq 0)$或$y=1(x\neq 0)$

B、$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1(x\neq 0)$或$y=1(x\neq 0)$

解：设另一个焦点是 (x,y) 则 (x,y) ≠（1，0）

$$\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(1+2)^2+(0-4)^2}\right|=\left|\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}\right|$$

$$\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5\right|=\left|\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-5\right|$$

$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5=-\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}+5$ 或

$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}-5=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}-5$

故 $\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$ 或 $\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}=10$

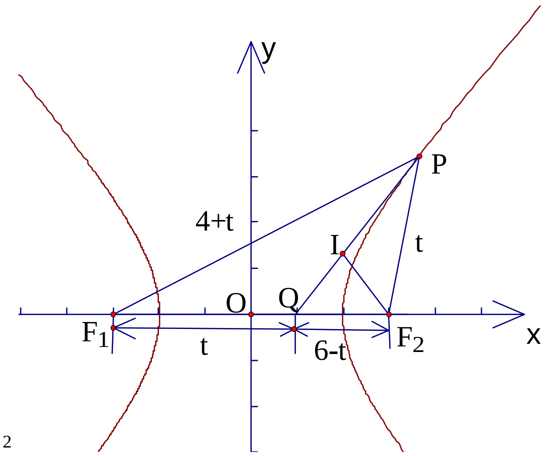
注意到几何意义化简得

$x=1$（y≠0）或 $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$ (y≠1）

故选 A

437、双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，P 是双曲线右支上一点，$I$为$\Delta PF_1F_2$的内心，PI 交 x 轴于点 Q，若$|F_1Q|=|PF_2|$，求 I 分$PQ$的比

解：设$|F_1Q|=|PF_2|=t$



则$|F_2Q|=6-t$，$|PF_1|=t+4$

由$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|}$

得$\frac{t+4}{t}=\frac{t}{6-t}$，解得$t=4$

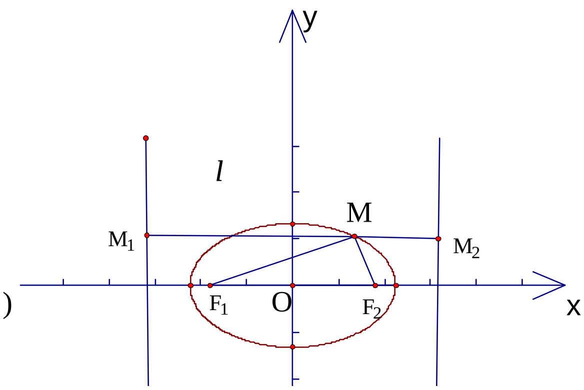
故 I 分 PQ 的比

$l=\frac{PI}{IQ}=\frac{t}{6-t}=2$

443、设 M(x_o,y_o) 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ (a>b>0)是一点，r_1 和 r_2 分别是点 M 与焦点 F_1(-c,0)，F_2(c,0)的距离，.求证：r_1=a+ex_o，r_2=a-eX_o

其中 e 是离心率. (高考不要求)

.证明：



$r_1=|MF_1|=e|MM_1|=e[x_0-(-\frac{a^2}{c})]$

$=ex_0+\frac{c}{a}\bullet\frac{a^2}{c}=a+ex_0$

同理$r_2=|MF_2|=e|MM_2|=e(\frac{a^2}{c}-x_0)$

$=\frac{c}{a}\bullet\frac{a^2}{c}-ex_0=a-ex_0$

462、$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b\in N)$的两个焦点$F_1$、$F_2$，$P$是双曲线上一点，且满足$|PF_1|\bullet|PF_2|=|F_1F_2|^2$，$|PF_2|<4$，求双曲线方程。(圆锥曲线) (高考不要求)

解：设$P(x_0,y_0)$，双曲线的准线是$x=\pm\frac{4}{\sqrt{b^2+4}}$，离心率$e=\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}$

因$|PF_2|=<4$故P在右支上

$|PF_2|=e\,(x_0-\frac{4}{\sqrt{b^2+4}})=\frac{\sqrt{b^2+4}}{2}\,x_0-2<4$

$(b^2+4){x_0}^2<144$（1） 因$|PF_1|\bullet|PF_2|=|F_1F_2|^2$

故$e^2\ (x_0+\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}})\ (x_0-\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}})=(2\sqrt{b^2+4})^2$

故$x_0{}^2-\dfrac{16}{b^2+4}=16$，$x_0{}^2=\dfrac{16}{b^2+4}+16$（2）

把（2）代入（1）得(b^2+4)（$\dfrac{16}{b^2+4}+16$）<144

$1+(b^2+4)<9$，$-2<b<2$，因$b\in N^+$,故$b=1$

471、设$A(a,0)$（$a>0$)），B、C分别是 x 轴 y 轴上的点，非零向量$\overrightarrow{BP}$满足，

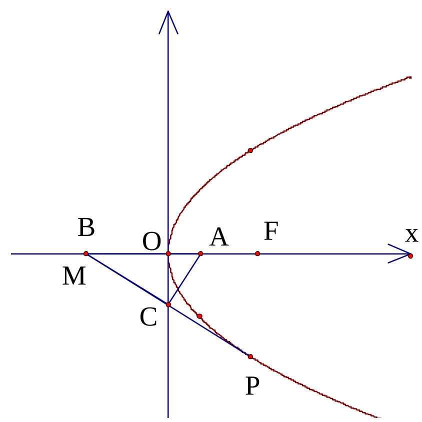
$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$(圆锥曲线)

（1）当B在 x 轴上运动时，求 P 的坐标（x,y）满足的关系式

（2）设l是点 P 的坐标所满足的方程的曲线 E 在 P 点处的切线，与 x 轴交于 M，F 是曲线 E 的焦点，求证：ΔPFM 是等腰三角形

（3）设 Q 是曲线 E 上异于 P 的点，且$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$，求证直线 PQ 过定点

（注：改为$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$）



解：（1）

设$B(b,0)$，$C(0,c)$，$P(x,y)$

因$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BP}=(x-b,y),\overrightarrow{BC}=(-b,c)$

则$(x-b,y)=2(-b,c)$

$x-b=-2b$且$y=2c$

即$b=-x$（1），$c=\dfrac{y}{2}$（2）

又$\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BP}=(x-b,y),\overrightarrow{AC}=(-a,c)$

$-a(x-b)+cy=0$（3）

把（1）（2）代入（3）得$-2ax+\dfrac{y^2}{2}=0$

为所求的关系，$y^2=4ax\ (x>0)$

（2）设$P(x_0,y_0)$，过P点 曲线 E: $y^2=4ax$的切线l的方程是

$y_0y=2a(x+x_0)$它与 x 轴的交点 M(-x0,0)

曲线 E: $y^2=4ax$的焦点 F$(a,0)$

则$|PF|=P$到准线$x=-a$的距离$=x_0+a$

$|MF|=a-(-x_0)=x_0+a$

故$|PF|=|MF|$，因此ΔPFM 是等腰三角形

（3）设$Q\ (x_1,y_1)$因$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=0$，

故$x_0x_1+y_0y_1=0$，$\dfrac{1}{16a^2}y_0{}^2y_1{}^2+y_0y_1=0$，$y_0y_1=-16a^2$

设直线 PQ 的方程为：$y=kx+m$

与 $y^2=4ax$ 联立消 x 得 $\frac{k}{4a}y^2-y+m=0$

则 $y_0y_1=\frac{4am}{k}=-16a^2 \Rightarrow m=-4ak$

故 $y=kx-4ak=k(x-4a)$

当 $x=4a$ 时 $y=0$，因此直线 PQ 总过定点 $(4a,0)$

569、 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点,F_1、F_2 是椭圆的焦点,

⊙C 是△PF_1F_2 的旁切圆,N 为⊙C 与 F_1F_2 的切点,则 N 的位置在(　　) (圆锥曲线)

A、焦点与顶点之间　　B、顶点

C.在椭圆外　D、不确定.

解：选 D

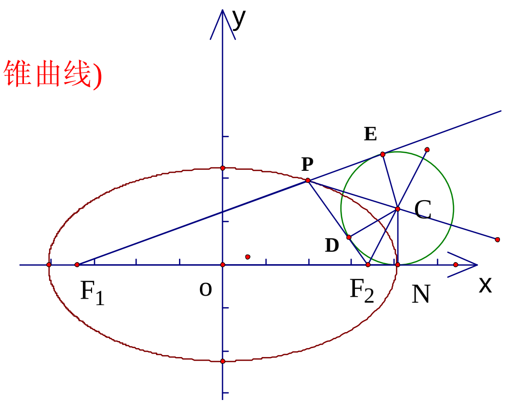
因为 $NF_2=F_1D=PF_2-PD$

$NF_1=F_1E=PF_1+PD$

相加得 $NF_1+NF_2= PF1+ PF2=2a$

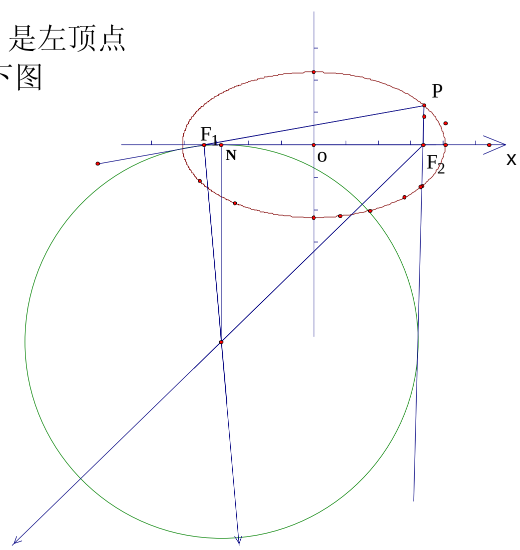
于是 NO=a

故图中 N 是右顶点



若为左边的△PF_1F_2 的旁切圆，则 N 是左顶点

若是下面的旁切圆，N 可以变动如下图



注此题改为：P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点,F_1、F_2 是椭圆的焦点,

⊙C 是△PF_1F_2 是与边 PF_2 相切的旁切圆，N 为⊙C 与 F_1F_2 的切点,则 N 的位置在(　)

A、焦点与顶点之间　　B、顶点　　C.在椭圆外　D、不确定.

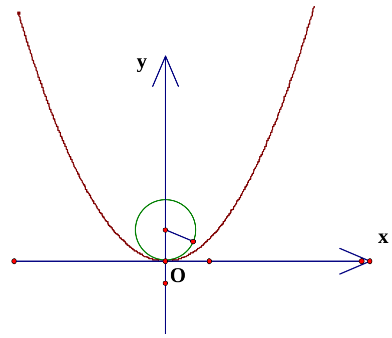
就选 B

570、已知一杯子的轴截面是抛物线 $x^2=2y$ (0≤y≤20). 今有一球放入杯中,球的半径为 r ，且球与杯底相切,则 r 的取值范围是 ( ) (圆锥曲线)

A.1≤r≤2 B.1/2≤r≤2 C.0≤r≤1 D.这样的球不存在

解：

设圆的方程为 $x^2+(y-r)^2=r^2$（1）



依题意此圆与抛物线 $x^2=2y$（2）

只有一个公共点原点

于是方程组（1）（2）只能有一个解（0，0）

（2）代入（1）得

$2y+(y-r)^2=r^2$

$y^2+(2-2r)y=0$， $y(y+2-2r)=0$

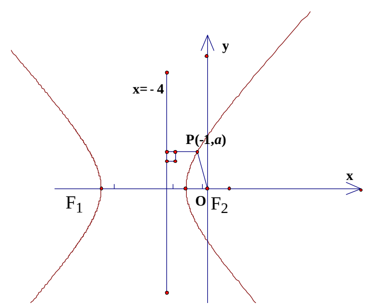
$y_1=0$， $y_2=2r-2$，考虑到 $x^2=2y$ 中 $y\ge 0$

要使方程组（1）（2）只能有一个解，于是

$y_2=2r-2\le 0$ 故 $r\le 1$，因此 $0<r\le 1$

572、 设双曲线 C 的一个焦点为原点 O，对应的准线为直线 $x=-4$，若点 $P(-1,a)$ 在双曲线 C 上，则实数 a 的取值范围是_________(圆锥曲线) (高考不要求)

解：$\dfrac{|PO|}{|PP_1|}=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{-1-(-4)}=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{3}=e>1$



由此得 $a>2\sqrt{2}$ 或 $a<-2\sqrt{2}$

573、已知双曲线的焦点 $F_1(0,2)$,相应的准线方程是 x+y=1,离心率 e= $\sqrt{2}$,则此双曲线的方程是

A. xy= $\sqrt{2}$　　B. x^2-y^2= $\sqrt{2}$,　C. (x+1)(y+1)= $\frac{1}{2}$　D.(x+1)(y-1)= $\frac{1}{2}$

(圆锥曲线) (高考不要求)

解 1：设 $P(x,y)$ 为双曲线上任意一点则

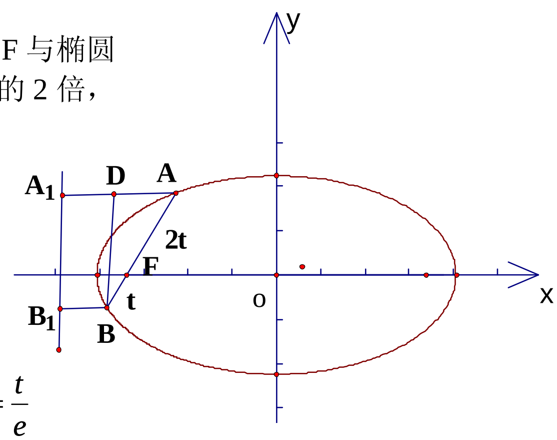
$$\frac{|PF_1|}{P到x+y=1的距离}=\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}}=e=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|x+y-1|,x^2+(y-2)^2=(x+y-1)^2$$

$$x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2+1+2xy-2x-2y,2xy-2x+2y-3=0$$

$xy-x+y-1=\frac{1}{2},(x+1)(y-1)=\frac{1}{2}$，选 D

623、一条倾斜角为 $60°$ 的直线过椭圆左焦点 F 与椭圆交于 A、B 两点，若 FA 的长度是 FB 的长度的 2 倍，求椭圆的离心率。(圆锥曲线) (高考不要求)



解 1：设离心率为 e

因 $|FA|=2|FB|$

可设 $|FB|=t$，$|FA|=2t$

作 $AA_1\perp$ 左准线，$BB_1\perp$ 左准线

$BD_1\perp AA_1$

则 $|AA_1|=\frac{2t}{e}$，$|BB_1|=\frac{t}{e}$,于是 $|AD|=\frac{2t}{e}-\frac{t}{e}=\frac{t}{e}$

因 $\angle A=\angle AFO=60°$,故 $|AB|=2|AD|$

于是 $3t=\frac{2t}{e}$，$e=\frac{2}{3}$

解 2：设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ (1)

FA 的长度是 FB 的长度的 2 倍

于是 $\overrightarrow{FA}=-2\overrightarrow{FB}$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,又 $F(-c,0)$

于是 $\overrightarrow{FA}=(x_1+c,y_1),\overrightarrow{FB}=(x_2+c,-y_2),y_1=-2y_2$

设直线 AB 的方程为 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}y-c$ 代入 (1)计算量大，可见几何法常常可绕过复杂的计算

674、椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 上有动点 A 和一定点 $B(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，求|AB|的最大值

(圆锥曲线) (不等式) (高考不要求)

尝试 1：用参数方程

设　$x=\sqrt{3}\cos q$，　$y=\sqrt{2}\sin q$，　$|AB|^2=x=(\sqrt{3}\cos q-\frac{3}{2})^2+(\sqrt{2}\sin q-\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$=\cos^2 q-3\sqrt{3}\cos q-2\sin q+\frac{15}{4}$ 失败

尝试 2：用圆与椭圆相切

设以 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 为圆心，以 r 为半径的圆为 $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2$

与椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立，消元受阻

尝试 3：尝试 2 由想到当圆与圆椭圆相切时，椭圆有公切线，只要求出切点可解决问题

于是设出切点（x_0,y_0），椭圆在（x_0,y_0）处的切线为 $\frac{x_0x}{3}+\frac{y_0y}{2}=1$ 斜率为 $k=-\frac{2x_0}{3y_0}$，

切点（x_0,y_0）与圆心 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 连线的斜率为 $\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0-\frac{3}{2}}$

于是 $\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0-\frac{3}{2}}=\frac{3y_0}{2x_0}$ 与 $\frac{{x_0}^2}{3}+\frac{{y_0}^2}{2}=1$ 联立，化为 4 次方程，算不下去

尝试 4：由尝试 3 有一点希望只是方程不好解于是想到 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 也在椭圆上

于是写出 $\frac{{x_0}^2}{3}+\frac{{y_0}^2}{2}=1$，　$\frac{(\frac{3}{2})^2}{3}+\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2}=1$

相减得，　$\frac{(x_0+\frac{3}{2})(x_0-\frac{3}{2})}{3}+\frac{(y_0+\frac{\sqrt{2}}{2})(y_0-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2}=0$，

$$\frac{(x_0+\frac{3}{2})}{3}+\frac{(y_0+\frac{\sqrt{2}}{2})(y_0-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2(x_0-\frac{3}{2})}=0$$ （2），把 $\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0-\frac{3}{2}}=\frac{3y_0}{2x_0}$ （1）代入（2）

与（1）或与 $\frac{{x_0}^2}{3}+\frac{{y_0}^2}{2}=1$ 合作解切点（x_0,y_0）还是失败

尝试 5：设直线 AB 的方程 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=k(x-\frac{3}{2})$

代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 消 y 得

$$(3k^2+2)x^2+3k(\sqrt{2}-3k)x+3(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}k)^2=0$$

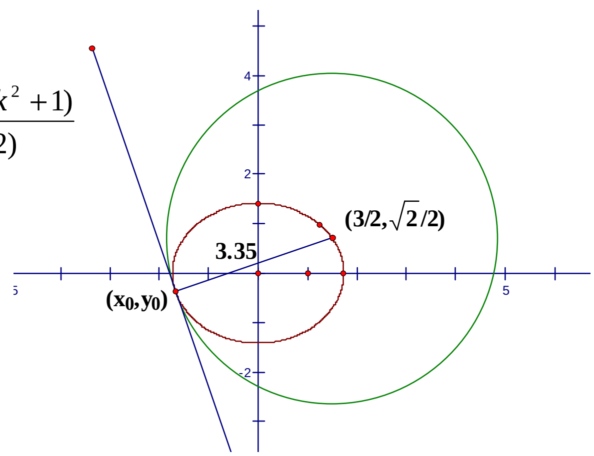
有一根 $\frac{3}{2}$，另一根 x_1， $\frac{3}{2}+x_1=\frac{3k(3k-\sqrt{2})}{3k^2+2}$

故 $x_1-\frac{3}{2}=\frac{3k(3k-\sqrt{2})}{3k^2+2}-3=\frac{-3\sqrt{2}k-6}{3k^2+2}$，（）

故 $|AB|^2=(1+k^2)(x_1-\frac{3}{2})^2=\frac{(3\sqrt{2}k+6)(k^2+1)}{(3k^2+2)}$

极值难求（求导遇复杂 4 次方程）

原始尝试：用几何画板



683、设点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}=1$ 上的动点，点 Q 的坐标为 $(6,10)$，求 $|PQ|$ 的最小值(圆锥曲线) (不等式) (高考不要求)

解：设 $P(5\cos q,\frac{5}{2}\sin q)$，于是

$$|PA|^2=(6-5\cos q)^2+(10-\frac{5}{2}\sin q)^2$$

$$=\frac{1}{73}(3^2+8^2)[(6-5\cos q)^2+(10-\frac{5}{2}\sin q)^2]\ {}^{3}\ \frac{1}{73}[3(6-5\cos q)+8(10-\frac{5}{2}\sin q)]^2,$$

{取＝条件 $\frac{6-5\cos q}{3}=\frac{10-\frac{5}{2}\sin q}{8}$，即 $\sin q=\frac{4}{5},\cos q=\frac{3}{5}$}(1)

$$=\frac{1}{73}(98-15\cos q-20\sin q)^2=\frac{1}{73}[98-25\sin(q+f)]^2$$

${}^{3}\ \frac{1}{73}(98-25)^2=73$ {取＝条件 $\sin(q+f)=1$, 即 $\sin q=\frac{4}{5},\cos q=\frac{3}{5}$}(2)

由于取＝条件(1)与(2)是一致的，因此 $|PQ|$ 最小＝73

评注：这种题目的编法容易，解答只能碰运气。

下面讲一讲为什么是这样

一、我先编一个这样的题目

设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点，求 P 到定点 A $(\frac{134}{65},2)$ 的距离的最小值

解：设 $P(2\cos q,\sin q)$，

$$|PA|^2=x=(\frac{134}{65}-2\cos q)^2+(2-\sin q)^2$$

$$=\frac{1}{6^2+5^2}(6^2+5^2)[(\frac{134}{65}-2\cos q)^2+(2-\sin q)^2]$$

$$\geq\frac{1}{61}[6(\frac{134}{65}-2\cos q)+5(2-\sin q)]=\frac{1}{61}(\frac{1454}{65}-12\cos q-5\sin q)$$

{取＝的条件 $\frac{\frac{134}{65}-2\cos q}{6}=\frac{2-\sin q}{8}$ 即 $\sin q=\frac{12}{13}$， $\cos q=\frac{5}{13}$}(3)

$$=\frac{1}{61}[\frac{1454}{65}-13\sin(q+j)]\geq\frac{1}{61}[\frac{1454}{65}-13]$$

{取＝的条件 $\sin(q+f)=1$ 即 $\sin q=\frac{12}{13},\cos q=\frac{5}{13}$ }(4)

由于取＝条件(3)与(4)是一致的，因此 $|PA|$ 最小＝$\sqrt{\frac{609}{3965}}$

上面的条件可同时成立，于是

二、说一说为什么不好解

先要求出 6 与 5

就要先设 $|PA|^2=x=(\frac{134}{65}-2\cos q)^2+(2-\sin q)^2$

$$=\frac{1}{m^2+n^2}(m^2+n^2)\,[(\frac{134}{65}-2\cos q)^2+(2-\sin q)^2]$$
$$\geq\frac{1}{m^2+n^2}\,[m(\frac{134}{65}-2\cos q)+n(2-\sin q)]$$
$$=\frac{1}{m^2+n^2}\,(\frac{134m}{65}-2n-2m\cos q\ -n\sin q)$$
$$=\frac{1}{m^2+n^2}\,(\frac{134m}{65}-2n-\sqrt{4m^2+n^2}\,\sin(q+j)$$
$$\geq\frac{1}{m^2+n^2}\,(\frac{134m}{65}-2n-\sqrt{4m^2+n^2}\,\sin(q+j)$$
此处取等号的条件是，

$$\frac{\frac{134}{65}-2\cos q}{m}=\frac{2-\sin q}{n}，（5）$$

$$\sin q=\frac{2m}{\sqrt{4m^2+n^2}}，\quad \cos q=\frac{n}{\sqrt{4m^2+n^2}}\quad（6）$$

由此是解出 m=6 与 n=5 非常困难

三、本题编法

我是先让 $\sin q=\frac{12}{13}$， $\cos q=\frac{5}{13}$，然后由（5）定出 m=6 与 n=5

最后去配凑出适合（6）的定点 A$(\frac{134}{65},2)$，而编出来的

692、设点 M 为抛物线 $x^2=2px$ (p>0)上一动点，F 为焦点，O 为坐标原点，求

$\frac{|MO|}{|MF|}|$ 的范围(圆锥曲线)

解：设 $P(x,y)$ 则 $(\frac{|MO|}{|MF|})^2=\frac{x^2+y^2}{(x+\frac{p}{2})^2}=\frac{x^2+y^2}{(x+\frac{p}{2})^2}=\frac{x^2+2px}{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=t$

$x^2+2px=t(x^2+px+\frac{p^2}{4})$，$(t-1)x^2-p(t-2)x+\frac{p^2}{4}t=0$

$\Delta=p^2(t-2)^2-p^2(t-1)t\geq 0$

$t\leq\frac{4}{3}$， $t\leq\frac{4}{3}$， 当且 $x=2p$ 取等号

$0<\sqrt{t}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $0<\sqrt{t}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$

706、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点的弦所在的直线的倾斜角为 a ，求 $|AB|$

解：设左焦点 $F(-c,0)$ (圆锥曲线)

$$|AB|=e(x_A+x_B+\frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{c})=e(x_A+x_B)+2a$$

$y=\tan a\,(x+c)$ 代入 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 消 y 得

$$b^2x^2+a^2\tan^2 a\,(x^2+2cx+c^2)=a^2b^2$$

$$(b^2+a^2\tan^2 a)x^2+(2ca^2\tan^2 a)x+a^2c^2\tan^2 a-a^2b^2=0$$

$$x_A+x_B=-\frac{2ca^2\tan^2 a}{b^2+a^2\tan^2 a}=-\frac{2ca^2\tan^2 a}{a^2\sec^2 a-c^2}$$

$$|AB|=e(x_A+x_B)+2a=-\frac{2c^2a\tan^2 a}{a^2\sec^2 a-c^2}+2a=\frac{2a^3\sec^2 a-2ac^2-2c^2a\tan^2 a}{a^2\sec^2 a-c^2}$$

$$=\frac{2a^3\sec^2 a-2ac^2\sec^2 a}{a^2\sec^2 a-c^2}=\frac{2ab^2\sec^2 a}{a^2\sec^2 a-c^2}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2 a}$$

$$=\frac{2ab^2}{a^2\sin^2 a+b^2\cos^2 a}$$ 以上各式都可为答案

743、设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b.>0)$ 的两焦点为 F_1,F_2 。长轴的两个端点分别为 A_1,A_2 。若椭圆上存在 Q 点使 $\angle A_1QA_2=135°$，求 e 的范围。(圆锥曲线)

解：不妨设 $Q\,(x_0,y_0)$ $y_0>0$，因为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$

所以 $K_{A_1Q}=\frac{y_0}{x_0+a}$，$K_{A_2Q}=\frac{y_0}{x_0-a}$

$$\tan\angle A_1QA_2=\frac{K_{A_2Q}-K_{A_1Q}}{1+K_{A_1Q}K_{A_2Q}}=\frac{\frac{y_0}{x_0-a}-\frac{y_0}{x_0+a}}{1+\frac{y_0}{x_0-a}\bullet\frac{y_0}{x_0+a}}=\frac{2ay_0}{x_0^{\ 2}-a^2+y_0^{\ 2}} \quad （1）$$

由于 $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$，因此 $x_0^{\ 2}=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y_0^{\ 2})$ 代入（1）得

$\tan\angle A_1QA=\dfrac{2ay_0}{{y_0}^2-\dfrac{a^2}{b^2}{y_0}^2}=\dfrac{2ab^2}{y_0(b^2-a^2)}=-1$

$y_0=\dfrac{2ab^2}{a^2-b^2}=\dfrac{2ab^2}{c^2}\le b$，$2ab\le c^2$， $2a\sqrt{a^2-c^2}\le c^2$

$4a^2(a^2-c^2)\le c^4$， $4-4e^2\le e^4$， $e^4+4e^2-4\ge 0$， $e^4+4e^2-4\ge 0$

$e^2\ge 2\sqrt{2}-2$或$e^2\le -2\sqrt{2}-2$（舍），

$e\ge\sqrt{2\sqrt{2}-2}$又因为$e<1$，因此$\sqrt{2\sqrt{2}-2}\le e<1$

745、双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b\in N_+)$的两个焦点$F_1$、$F_2$，$P$是双曲线上一点，且满足$|PF_1|\bullet|PF_2|=|F_1F_2|^2$，$|OP|<5$，求双曲线方程。(圆锥曲线) (高考不要求)

解：焦点$(\pm\sqrt{b^2+4},0)$，双曲线的准线是$x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}}$，离心率$e=\dfrac{\sqrt{b^2+4}}{2}$

不妨设$P(x_0,y_0)$在右支上

$|PF_2|=e\,(x_0-\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}})=\dfrac{\sqrt{b^2+4}}{2}x_0-2$

因$|PF_1|\bullet|PF_2|=|F_1F_2|^2$

故$e^2\,(x_0+\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}})\,(x_0-\dfrac{4}{\sqrt{b^2+4}})=(2\sqrt{b^2+4})^2$

故${x_0}^2-\dfrac{16}{b^2+4}=16$， ${x_0}^2=\dfrac{16}{b^2+4}+16$（1）

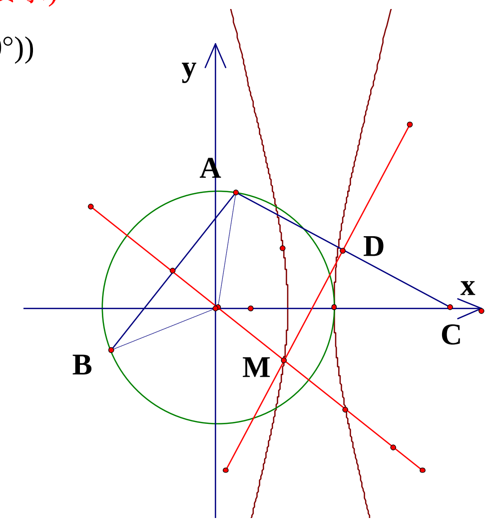
由$\dfrac{{x_0}^2}{4}-\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$得${y_0}^2=\dfrac{b^2{x_0}^2}{4}-b^2$

于是$|OP|^2={x_0}^2+{y_0}^2=\dfrac{(b^2+4){x_0}^2}{4}-b^2=\dfrac{(b^2+4)}{4}(\dfrac{16}{b^2+4}+16)-b^2$

$=4+4(b^2+4)-b^2=3b^2+20<25$， $b^2<\dfrac{5}{3}$，因$b\in N^+$,故$b=1$

双曲线方程是$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

755、A、B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上两动点，且$\angle AOB=120°$，C（2，0），△ABC 外接圆圆心 M 的轨迹是？(圆锥曲线) (难题) (高考不要求)



解：设 $A(\cos a,\sin a)$、$B(\cos(a+60°),\sin(a+60°))$

$M(x,y)$，则

因$OM\perp AB$,故

$$\frac{y}{x}\bullet\frac{\sin(a+120°)-\sin a}{\cos(a+120°)-\cos a}=\frac{y}{x}\bullet\frac{\cos(a+60°)}{-\sin(a+60°)}=-1$$

$$\frac{y}{X}=\frac{\sin a+\sqrt{3}\cos a}{\cos a-\sqrt{3}\sin a}，\quad \sin a=\frac{y-\sqrt{3}x}{x+\sqrt{3}y}\cos a \quad（1）$$

因$OD\perp AC$,故

$$\frac{y-\frac{\sin a}{2}}{x-\frac{\cos a+2}{2}}\bullet\frac{\sin a}{\cos a-2}=-1，\quad 2x\cos a+2y\sin a+3-4x=0 \quad（2）$$

由（1）（2）解得$\cos a=\dfrac{(4x-3)(x+\sqrt{3}y)}{2(x^2+y^2)}$， $\sin a=\dfrac{(4x-3)(y-\sqrt{3}x)}{2(x^2+y^2)}$

于是$$\frac{(4x-3)^2(x+\sqrt{3}y)^2}{4(x^2+y^2)^2}+\frac{(4x-3)^2(y-\sqrt{3}x)^2}{4(x^2+y^2)^2}=1$$

化简得$15x^2-y^2-24x+9=0$，即$\dfrac{(x-0.8)^2}{0.04}-\dfrac{y^2}{0.6}=1$

756、求证：在一个椭圆上的任一个定点，引出的两条互相垂直的线段交于椭圆上的两点，这两点的直线过一个定点。(圆锥曲线) (难题) (高考不要求)

（1）先求定点坐标

设椭圆方程是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，A$(x_0,y_0)$

则 A(x_0,y_0)关于坐标轴的对称点分别是 $A_1(x_0,-y_0)$, $A_2(-x_0,y_0)$

直线 A_1,A_2 的方程是$y=-\dfrac{y_0}{x_0}x$（1）

过 A(x_0,y_0)点的切线方程是$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{x_0y}{b^2}=1$

过 A(x_0,y_0)点的切线的垂线（法线）方程是$\dfrac{a^2x}{x_0}-\dfrac{b^2y}{y_0}=a^2-b^2$（2）

联立（1）（2）解得 $x=\dfrac{(a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2}$， $y=\dfrac{(b^2-a^2)y_0}{a^2+b^2}$

若命题成立必要过定点 $(\dfrac{(a^2-b^2)x_0}{a^2+b^2},\dfrac{(b^2-a^2)y_0}{a^2+b^2})$

下面证明这个结论

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的三点 $A(x_0,y_0)$、$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$，若 A 是定点，且 AB与AC 互相垂直，求证直线 BC 过一定点。

证明：直线 BC 的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$①

$k_{PA}=k_1$， $k_{PB}=k_2$，

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可化为 $\dfrac{[(x-x_0)+x_0]^2}{a^2}+\dfrac{[(y-y_0)+y_0]^2}{b^2}=1$

即 $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{2x_0(x-x_0)}{a^2}+\dfrac{2y_0(y-y_0)}{b^2}=0$

代入①式得，

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+[\frac{2x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{2y_0(y-y_0)}{b^2}][A(x-x_0)+B(y-y_0)]=0$$

两边除以 $(x-x_0)^2$ 得， $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}+[\dfrac{2x_0}{a^2}+\dfrac{2y_0k}{b^2}](A+Bk)=0$

整理得， $\dfrac{1+2By_0}{b^2}k^2+(\dfrac{2x_0B}{a^2}+\dfrac{2Ay_0}{b^2})k+\dfrac{1+2x_0A}{a^2}=0$

因 $k_1k_2=-1$，故 $\dfrac{\dfrac{1+2x_0A}{a^2}}{\dfrac{1+2By_0}{b^2}}=-1$,于是 $\dfrac{1+2x_0A}{a^2}+\dfrac{1+2By_0}{b^2}=0$

即 $2b^2x_0A+2a^2y_0B=-a^2-b^2$， $\dfrac{2b^2x_0}{-a^2-b^2}A+\dfrac{2a^2y_0}{-a^2-b^2}B=1$

$A(\dfrac{2b^2x_0}{-a^2-b^2}+x_0-x_0)+B(\dfrac{2a^2y_0}{-a^2-b^2}+y_0-y_0)=1$ ，

$A(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0-x_0)+B(\dfrac{b^2-a^2}{\backslash a^2+b^2}y_0-y_0)=1$

于是直线 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$ 过定点 $(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0)$

759、过椭圆$3x^2+4y^2=48$的左焦点 F 引直线交椭圆于 A、B 两点，$|AB|=7$，则此直线方程是__________

解：$3x^2+4y^2=48$就是$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

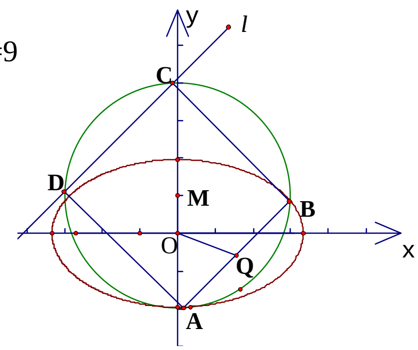
的左焦点 F（-2,0），过 F 的直线为$y=k(x+2)$代入$3x^2+4y^2=48$得

$3x^2+4(kx+2k)^2=48$，即$(3+4k^2)x^2+16kx+16k^2-48=0$

$x_A+x_B=-\frac{16k}{3+4k^2}$， $AB=e(x_A+x_B+\frac{2a^2}{c})=\frac{1}{2}(-\frac{16k}{3+4k^2}+16)=7$

$k=\frac{3}{2}$或$k=\frac{1}{2}$

761、已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上有 A、B 两点,直线 l:y=x+k 上有 C、D 两点,且 ABCD 是正方形，若正方形 ABCD 的外接圆方程为 $x^2+y^2-2y-8=0$。求椭圆 C 和直线 l 的方程(圆锥曲线)



解：因为正方形 ABCD 的外接圆方程是 $x^2+(y-1)^2=9$

所以正方形 ABCD 中心是 M(0，1)，

对角线长＝6，CD＝$3\sqrt{2}$，边心距＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

于是 M(0，1)到 l：x-y+k=0 的距离，

$\frac{|-1+k|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$， $k=-2$或$k=4$

（1）当$k=-2$时，直线 CD：y=x-2，直线 AB：y=x+4

由 y=x+4 与 $x^2+y^2-2y-8=0$ 联立解得$A(-3,1)$， $B(0,4)$，

代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，得$b^2=16,\ a^2=\frac{16\times 9}{15}<16$， 舍去

（2）当$k=4$时，直线 CD：y=x+4，直线 AB：y=x-2

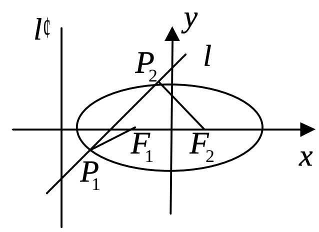
由 y=x-2 与 $x^2+y^2-2y-8=0$ 联立解得$A(0,-2)$， $B(3,1)$

$A(0,-2)$， $B(3,1)$，代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

得$b^2=4,\ a^2=12$,综上所述，椭圆 C 和直线 l 的方程分别是$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$和 y=x+4

763、已知 F_1, F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点，直线 $l: y=2x+5$ 与椭圆交于两点 P_1, P_2，已知椭圆中心 O 关于直线 l 的对称点恰好落在 C 的左准线 l' 上（1）求直线 l' 的方程（2）若 $|P_2F_2|-|P_1F_1|=\frac{10}{9}a$，求椭圆 C 的方程(圆锥曲线)

解：（1）原点关于 $y=2x+5$ 的对称点是 $(-4,2)$ 在左准线 $l': x=-\frac{a^2}{c}$ 上



于是 $l': x=-4$，且 $\frac{a^2}{c}=4$

（2）设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$

$|P_2F_2|=e(\frac{a^2}{c}-x_2)=\frac{c}{a}(4-x_2)$，$|P_1F_1|=e(x_1+\frac{a^2}{c})=\frac{c}{a}(x_1+4)$

代入 $|P_2F_2|-|P_1F_1|=\frac{c}{a}(4-x_2)-\frac{c}{a}(x_1+4)=-\frac{c}{a}(x_1+x_2)=\frac{10}{9}a$

$x_1+x_2=-\frac{10a^2}{9c}=-\frac{40}{9}$，于是 P_1P_2 中点 $(-\frac{20}{9},\frac{5}{9})$

由 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ 相减得，$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$

$-\frac{20}{9a^2}+\frac{5\times 2}{9b^2}=0$，$a^2=2b^2$，故 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$ 代入 $\frac{a^2}{c}=4$，得

$c=2$，$b=2$，$a=2\sqrt{2}$，故椭圆方程是 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

793、如下图,直线$l_1: y=kx(k>0)$,与直线$l_2: y=-kx$之间的阴影区域(不含边界)

记为 W,其左半部分记为 W1,右半部分记为 W_2

(1)分别用不等式组表示 W_1,W_2

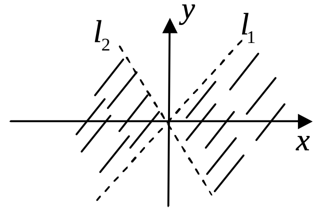
(2)若区域 W 中的动点 P(x,y)到l_1,l_2的距离之积为 d^2,求点 P 的轨迹方程 C

(3)设不过原点 O 的直线 L 与(2)中的曲线 C 相交于 M_1,M_2 两点,且与 L_1,L_2 分别交于 M_3,M_4 两点,

求证:三角形 OM_1M_2 的重心与三角形 OM_3M_4 的重心重合, (圆锥曲线)

解:(1)

左边区域 W_1 是$\begin{cases} kx-y<0 \\ kx+y<0 \end{cases}$



左边区域 W_1 是$\begin{cases} kx-y>0 \\ kx+y>0 \end{cases}$

(2)设 P(x,y)则$\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}}=d^2$

由(1)得$|kx-y||kx+y|=(kx-y)(kx+y)=k^2x^2-y^2$

于是 P(x,y)点的轨迹方程是$k^2x^2-y^2=d^2(k^2+1)$

(3)设$M_1(x_1,y_1)$ $M_2(x_2,y_2)$ $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$

要证三角形 OM_1M_2 的重心与三角形 OM_3M_4 的重心重合,

只要证$x_1+x_2=x_3+x_4$, $y_1+y_2=y_3+y_4$

设l的方程为: $y=mx+n$与$k^2x^2-y^2=d^2(k^2+1)$联立消y得

$(k^2-m^2)x^2-2mnx+n^2-d^2(k^2+1)=0$,故$x_1+x_2=\frac{2mn}{k^2-m^2}$,

直线l_1或l_2的合起来的方程是$k^2x^2-y^2=0$与$y=mx+n$联立消y得

$(k^2-m^2)x^2-2mnx-n^2=0$

故$=\frac{2mn}{k^2-m^2}$, 于是$x_1+x_2=x_3+x_4$

$y_1+y_2=m(x_1+x_2)+2n, y_3+y_4=m(x_3+x_4)+2n$

于是$y_1+y_2=y_3+y_4$, 于是当l的斜率存在时命题成立

当l的斜率不存在时,易证命题成立

834、椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,x\ge 0,y\ge 0)$,P 为椭圆上在第一象限的点,求过 P 的切线与坐标轴所围成的三角型的面积的最小值.

解：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,x\ge 0,y\ge 0)$

设过 $P(x_0,y_0)$ 的切线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

则横截距为 $\dfrac{a^2}{x_0}$，纵截距为 $\dfrac{b^2}{y_0}$

于是三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{a^2}{x_0}\bullet\dfrac{b^2}{y_0}==\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{a^2}{a\cos q}\bullet\dfrac{b^2}{b\sin q}=\dfrac{ab}{\sin 2q}\ge ab$

849、双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上一动点 Q 引直线 l：x+y=2 的垂线，垂足为 N，求线段 QN 中点 P 的轨迹方程。(解几)

解：设 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线上任意一点， $N(x,y)$ 则

$x_0{}^2-y_0{}^2=1$（1） $x+y=2$（2） $y-y_0=x-x_0$（3）

由（2）（3）解得 $x=\dfrac{2+x_0-y_0}{2}$， $y=\dfrac{2-x_0+y_0}{2}$

设 $P(m,n)$，则 $m=\dfrac{\dfrac{2+x_0-y_0}{2}+x_0}{2}=\dfrac{2+3x_0-y_0}{4}$（4）

$n=\dfrac{\dfrac{2-x_0+y_0}{2}+y_0}{2}=\dfrac{2-x_0+3y_0}{4}$（5）

由（4）（5）解得 $x_0=\dfrac{3m+n-2}{2}$， $y_0=\dfrac{m+3n-2}{2}$

代入（1）得 $2(m+n-1)(m-n)=1$，于是所求轨迹方程是 $2(x+y-1)(x-y)=1$

850、抛物线 $y^2=2x$ 上有两点 A,B，且 $\tan\angle AOB=-1$，直线 AB 交 x 轴于(m,0). 求 m 的取值范围。(解几)

解：设直线 AB: $x=ny+m$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$

因 $\tan\angle AOB=-1$， $\angle AOB=135°$ 故 A， B 两点，一点在第一象限，一点在第四象限，不妨设 $y_1>0$， $y_2<0$

因为 $y_1{}^2=2x_1$， $y_2{}^2=2x_2$，所以 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{2}{y_1}$， $k_{OB}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{2}{y_2}$

故 $\frac{\frac{2}{y_1}-\frac{2}{y_2}}{1+\frac{2}{y_1}\bullet\frac{2}{y_2}}=\frac{2(y_2-y_1)}{y_1y_2+4}=-1$， $2(y_1-y_2)=y_1y_2+4$（1）

联立 $x=ny+m$ 与 $y^2=2x$ 消 x 得 $y^2-2ny-2m=0$

故 $y_1+y_2=2n$， $y_1y_2=-2m$ （2）

由 $y_1>0$， $y_2<0$ 得， $-2m<0$，故 $m>0$（3）

$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=4n^2+8m$

于是 $y_1-y_2=2\sqrt{n^2+2m}$ （4）

把（2）（4）代入（1）得 $4\sqrt{n^2+2m}=4-2m$， $2\sqrt{n^2+2m}=2-m$

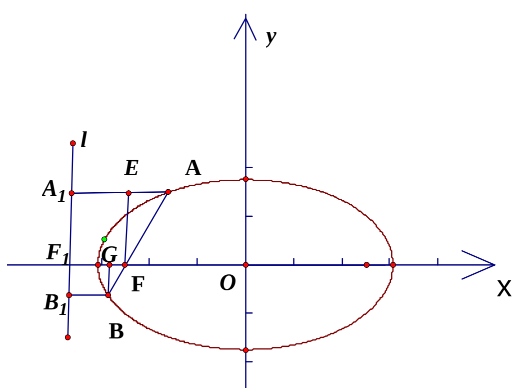
于是 $\begin{cases}2-m\ge 0\\ 4n^2=m^2-12m+4\ge 0\end{cases}$ 解得 $m\le 6-4\sqrt{2}$（5）

由（3）（5）得 m 的范围是 $0<m\le 6-4\sqrt{2}$

综上所述

864、过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点 F 做弦 AB，若 AF=d_1，BF=d_2，则 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 的数值为多少，怎么算啊？

解：如图



$|AF|=d_1$， $|BF|=d_2$

$|AA_1|=\frac{d_1}{e}$， $|BB_1|=\frac{d_2}{e}$， $FF_1=\frac{b^2}{c}$

因为 $\Delta AFE \backsim \Delta FGB$

所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AE|}{|GF|}$ 故

$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\frac{d_1}{e}-\frac{b^2}{c}}{\frac{b^2}{c}-\frac{d_2}{e}}$， $\frac{b^2}{c}(d_1+d_2)=\frac{2d_1d_2}{e}$，

$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{a}{c}\bullet\frac{c}{b^2}=\frac{2a}{b^2}$

865、(圆锥曲线)

已知抛物线抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点为 F，其准线与 x 轴交于点 M，过点 M 作斜率为 k 的直线 l 交抛物线于 A、B 两点，弦 AB 的中点为 P，AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 E（x_0, 0）。

（1）求 k 的取值范围;

（2）求证：$x_0<3$;

(3)△PEF 能否成为以 EF 为底的等腰三角形？若能，求出 k 的值，若不能，请说明理由

解：由题设有 $F(-1,0),M(1,0)$（1）

$$设\, l: y=k(x-1),由\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=-4x \end{cases}得 k^2x^2-2(k^2-2)x+k^2=0$$

$$令\, \Delta=4(k^2-2)^2-4k^4=-16k^2+16>0 得 -1<k<1$$

$$故 -1<k<1 且 k\neq 0$$

（2）设 AB 中点为 $P(x_P,y_P)$,则$x_P=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k^2-2}{k^2}$,$y_P=k(x-1)=-\dfrac{2}{k}$

∴AB 的垂直平分线的方程为 $y+\dfrac{2}{k}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{k^2-2}{k^2})$

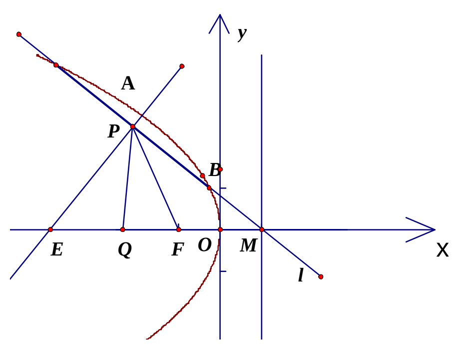
令 $y=0$ 得 $x_0=-1-\dfrac{2}{k^2}$ $\quad\because k^2<1 \quad \therefore -\dfrac{2}{k^2}<-2 \quad \therefore x_0<-3$

（3）$\because F(-1,0),E(-1-\dfrac{2}{k^2},0)$,.

则 FE 的中点 Q 的横坐标 $=\dfrac{-1-1-\dfrac{2}{k^2}}{2}$

要使 ΔPEF 是以 EF 为底的等腰三角形.

只要 $PQ\perp x$ 轴，因 $P(1-\dfrac{2}{k^2},-\dfrac{2}{k})$



$$\therefore 1-\frac{2}{k^2}=\frac{-1-1-\frac{2}{k^2}}{2}$$

$$\therefore k^2=\frac{1}{2},则 k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$$

∴△PEF 能构成以 EF 为底的等腰三角形，此时 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

866、(圆锥曲线)

设抛物线 C_1：$y=x^2-2x+2$ 与抛物线 C_2:$y=-x^2+ax+b$ 在它们的一个交点处的切线互相垂直.

(1)求 a、b 之间的关系,(2)若 a＞0,b＞0,求 ab 最大值

解：（1）设公共切点 (x_0,y_0)，则

因切线互相垂直.

故 $(2x_0-2)(-2x_0+a)=-1$ 即 $2x_0{}^2-(a+2)x_0+\dfrac{2a-1}{2}=0$

因 (x_0,y_0) 是交点

则 $x_0{}^2-2x+2=-x_0{}^2+ax_0+b$ 即 $2x_0{}^2-(a+2)x_0+2-b=0$

相减得 $\dfrac{2a-1}{2}-2+b=0$， $a+b=\dfrac{5}{2}$

（2）因 a＞0,b＞0

故 $ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2=(\dfrac{5}{4})^2=\dfrac{25}{16}$

当且仅当 $a=b=\dfrac{5}{4}$ 时上式取等号

于是当 $a=b=\dfrac{5}{4}$ 时，ab 最大值=$\dfrac{25}{16}$

868、已知 A(a,p),B(b,q),C(c,r)是平面直角坐标系中的三个点,A、B、C 不共线,求△ABC 的内心坐标表示.

解：$\overrightarrow{AB}=(b-a,q-p)$，$\overrightarrow{AC}=(c-a,r-p)$

故$\angle A$的平分线上的一个方向量是

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}=\frac{(b-a,q-p)}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{(c-a,r-p)}{\sqrt{(c-a)^2+(r-p)^2}}=$$

$$(\frac{b-a}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2+(r-p)^2}},\frac{q-p}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{r-p}{\sqrt{(c-a)^2+(r-p)^2}}$$

于是$\angle A$的平分线的斜率是

$$k_1=\frac{\frac{q-p}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{r-p}{\sqrt{(c-a)^2+(r-p)^2}}}{\frac{b-a}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2+(r-p)^2}}}$$

故$\angle A$的平分线方程是$y-p=k_1(x-a)$（1）

同理$\angle B$的平分线方程是$y-q=k_2(x-b)$（2）

这里$k_2=\dfrac{\frac{p-q}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{r-q}{\sqrt{(c-b)^2+(r-q)^2}}}{\frac{a-b}{\sqrt{(b-a)^2+(q-p)^2}}+\frac{c-b}{\sqrt{(c-b)^2+(r-p)^2}}}$

联立（1）（2）解得

内心$(\dfrac{ak_1-p-bk_2+q}{k_1-k_2},\dfrac{ak_1{}^2-pk_2-bk_1k_2+qk_1}{k_1-k_2})$

885、M 是椭圆$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$上一点，$F_1$、$F_2$是椭圆的两个焦点，$I$是$\Delta ABC$的内心，延长 MI，交线段$F_1F_2$于点 N，则$\dfrac{|MI|}{|IN|}=$__________

解：$\dfrac{|MI|}{|IN|}=\dfrac{|MF_1|}{|F_1N|}=\dfrac{|MF_2|}{|F_2N|}=\dfrac{|MF_1|+|MF_2|}{|F_1N|+|F_2N|}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{a}{c}$

887、(圆锥曲线) (高考不要求)

点 P 在双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，F_1,F_2 是两焦点，求 $\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|OP|}$ 的范围

解：由对称性不妨设 P(x,y)在右支，$x=a\sec q$，$y=b\tan q$，$q\in(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$)

则 $\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|OP|}=\frac{e(x+\frac{a^2}{c})+e(x-\frac{a^2}{c})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2ex}{\sqrt{a^2\sec^2q+b^2\tan^2q}}$

$=\frac{2c\sec q}{\frac{\sqrt{a^2+b^2\sin^2q}}{\cos q}}=\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2q}}$

因 $q\in(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$ 故 $\sin^2q\in[0,1)$，于是 $\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|OP|}\in(\frac{2c}{c},\frac{2c}{\sqrt{a^2}}]=(2,\frac{2c}{a}]$

890、(圆锥曲线) (高考不要求)

双曲线 $\frac{x^2}{n}-y^2=1(n>0)$ 的两个焦点 F_1,F_2，点 P 在双曲线上，且满足关系 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{n+2}$，则 ΔPF_1F_2 的面积为(　　　)

A、1　B、$\frac{1}{2}$　C、2　D、4

解：不妨设 $P(x,y)$（$x>0.y>0$）

$$|PF_1|+|PF_2|=e(x+\frac{a^2}{c})+e(x-\frac{a^2}{c})=2ex=\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}x=2\sqrt{n+2}$$

$x=\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n}}$，$y^2=\frac{x^2}{n}-1=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，故 $S=\frac{1}{2}\bullet 2c\bullet y=1$

900、(圆锥曲线) (知识介绍) (高考不要求)

问：直线l：$Ax_0x+B\bullet\dfrac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\bullet\dfrac{x+x_0}{2}+E\bullet\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$与

二次曲线C：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$有什么关系？

讲解

1、割线与切线

（1）割线

设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)是曲线C上的两个不同的点，则直线AB叫做曲线C的割线，这时我们说直线AB与曲线C的相交

用两点式很容易求一求出割线 AB 的方程

（2）切线

设点 P(x_0,y_0)和点 Q$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$在曲线 C 上，当 Q 点无限地趋近于 P 点时，割线 PQ 的极限位置，就叫做点 P(x_0,y_0)曲线 C 的切线，因此切线的斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，切线方程是：$y-y_0=k(x-x_0)$

例 1、求过 P(x_0,y_0)曲线C的切线

由于(x_0,y_0)和$(x_0+\Delta x,y_0\Delta y)$都在曲线 C 上，于是有

$$A(x_0+\Delta x)^2+B(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)+C(y_0+\Delta y)^2+D(x_0+\Delta x)+E(y_0+\Delta y)+F=0$$

$$Ax_0{}^2+Bx_0y_0+Cy_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F=0$$

相减得

$$A(2x_0+\Delta x)\Delta x+B(x_0\Delta y+y_0\Delta x+\Delta x\Delta y)+C(2y_0+\Delta y)\Delta y+D\Delta x+E\Delta y=0$$

$$A(2x_0+\Delta x)+B(x_0\bullet\frac{\Delta y}{\Delta x}+y_0+\Delta y)+C(2y_0+\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}+D+E\frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \qquad ①$$

因为当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$

在①的两边令$\Delta x\to 0$得

$$2Ax_0+B(x_0k+y_0)+2Cy_0k+D+Ek=0$$

$(Bx_0+2Cy_0+E)k=-(2Ax_0+By_0+D)$，$k=-\dfrac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E}$

$$y-y_0=-\frac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E}(x-x_0)$$

$$y-y_0=-\frac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E}(x-x_0)$$

整理得，

$$2Ax_0x+B(x_0x+y_0y)+2Cy_0y+Dx+Ey$$
$$=2Ax_0{}^2+2Bx_0y_0+2Cy_0{}^2+Dx_0+Ey_0$$

$$2Ax_0x+B(x_0x+y_0y)+2Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+2F$$
$$=2Ax_0{}^2+2Bx_0y_0+2Cy_0{}^2+2Dx_0+2Ey_0+2F=0$$

即l：$Ax_0x+B\bullet\dfrac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\bullet\dfrac{x+x_0}{2}+E\bullet\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$

这就是过 P(x_0,y_0)曲线C的切线方程

2、二次曲线 C 的切点弦所在的直线方程

例 2、过 P(x_0, y_0) 作二次曲线 C：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的两条切线，切点分别为 M、N，求直线 MN 的方程。

解：设切点 M(x_1, y_1)，N(x_2, y_2)，则过 M、N 曲线 C 的切线方程分别是

$$Ax_1x+B\bullet\frac{x_1x+y_1y}{2}+Cy_1y+D\bullet\frac{x+x_1}{2}+E\bullet\frac{y+y_1}{2}+F=0$$

$$Ax_2x+B\bullet\frac{x_2x+y_2y}{2}+Cy_2y+D\bullet\frac{x+x_2}{2}+E\bullet\frac{y+y_2}{2}+F=0$$

因为 P(x_0, y_0) 在这两条切线上，所以

$$Ax_1x_0+B\bullet\frac{x_1x_0+y_1y_0}{2}+Cy_0y_1+D\bullet\frac{x_0+x_1}{2}+E\bullet\frac{y_0+y_1}{2}+F=0$$

$$Ax_2x_0+B\bullet\frac{x_2x_0+y_2y_0}{2}+Cy_0y_2+D\bullet\frac{x_0+x_2}{2}+E\bullet\frac{y_0+y_2}{2}+F=0$$

于是可知 M(x_1, y_1)，N(x_2, y_2) 两点都在直线

l：$Ax_0x+B\bullet\frac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\bullet\frac{x+x_0}{2}+E\bullet\frac{y+y_0}{2}+F=0$ 上

因此直线 MN 的方程是：

$$Ax_0x+B\bullet\frac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\bullet\frac{x+x_0}{2}+E\bullet\frac{y+y_0}{2}+F=0$$

3、二次曲线 C 的极线

例：设 P(x_0, y_0) 是平面上的任意一点，过 P 点的直线与曲线 C：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 相交于两点 M、N，求过 M、N 曲线 C 的切线的交点 Q 的轨迹方程

解：设 $Q(a,b)$ 则，$Q(a,b)$ 点的切点弦所在的直线方程是

MN：$Aax+B\bullet\frac{ax+by}{2}+Cby+D\bullet\frac{x+a}{2}+E\bullet\frac{y+b}{2}+F=0$

因为 P(x_0, y_0) 点在直线 MN 上，所以

$$Aax_0+B\bullet\frac{ax_0+by_0}{2}+Cby_0+D\bullet\frac{x_0+a}{2}+E\bullet\frac{y_0+b}{2}+F=0$$

把 $Q(a,b)$ 改写成 $Q(x,y)$，得 $Q(x,y)$ 的轨迹方程是

$$Ax_0x+B\bullet\frac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\bullet\frac{x+x_0}{2}+E\bullet\frac{y+y_0}{2}+F=0$$

这条直线叫做点 P(x_0, y_0) 关于二次曲线 C 的极线，P 点叫做这条极线的极。

以曲线 C 为椭圆为例，说明一下极线的情况

当点 P(x_0, y_0) 在椭圆上时，点 P 关于曲线 C 的极线就是过 P 点的切线

当点 P(x_0, y_0) 在椭圆外时，点 P 关于曲线 C 的极线就是切点弦所在的直线

当点 P(x_0, y_0) 在椭圆内但不是中心时，点 P 关于曲线 C 的极线是椭圆外的一条直线

901、问题：“联立法”与“点差法”是否等价，试以下面一题说明之

已知C：$mx^2+ny^2=1$，$m>0$，$n>0$，直线l：$y=1-x$，若C与l交于P、Q两点，$OP\perp OQ$，求证：$m+n=$常数

证法1（联立法）设P(x_1,y_1)，Q(x_2,y_2)

$$\begin{cases}y=1-x\\ mx^2+ny^2=1\end{cases}$$

消y得$(m+n)x^2-2nx+n-1=0$，于是，$x_1x_2=\dfrac{n-1}{m+n}$

消x得$(m+n)y^2-2mx+m-1=0$，于是，$y_1y_2=\dfrac{m-1}{m+n}$

因为$OP\perp OQ$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$

于是$\dfrac{n-1}{m+n}+\dfrac{m-1}{m+n}=0$，所以$m+n=2$

证法2（代点法）设P(x_1,y_1)，Q(x_2,y_2)

$mx_1{}^2+ny_1{}^2=1$①，$mx_2{}^2+ny_2{}^2=1$②

由①-②得$m(x_1+x_2)+n(y_1+y_2)\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$

因为$y_1+y_2=2-(x_1+x_2)$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$

于是$m(x_1+x_2)-n[2-(x_1+x_2)]=0$

解得$x_1+x_2=\dfrac{2n}{m+n}$　③　　$y_1+y_2=2-(x_1+x_2)=\dfrac{2m}{m+n}$　④

因为$y_1y_2=(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2$

所以$x_1x_2-y_1y_2=x_1+x_2-1=\dfrac{2n}{m+n}-1=\dfrac{n-m}{m+n}$

即$x_1x_2-y_1y_2=\dfrac{n-m}{m+n}$　⑤　因为$OP\perp OQ$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$　⑥

由⑤⑥得$x_1x_2=\dfrac{n-m}{2(m+n)}$　⑦，$y_1y_2=\dfrac{m-n}{2(m+n)}$⑧

由①+②得$m(x_1{}^2+x_2{}^2)+n(y_1{}^2+y_2{}^2)=2$

于是$m[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+n[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]=2$⑨

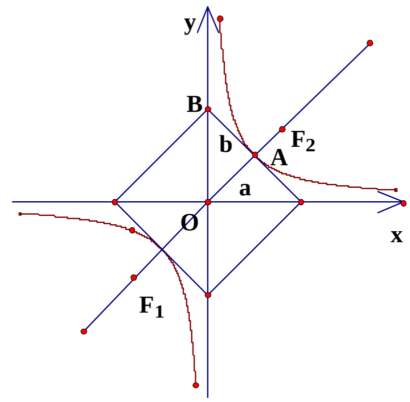
把③④⑦⑧代入⑨得

$\dfrac{m(3n^2+m^2)}{(m+n)^2}+\dfrac{n(3m^2+n^2)}{(m+n)^2}=2$，$\dfrac{(m+n)^3}{(m+n)^2}=2$，故$m+n=2$

从这题的两个解法可知“联立法”与“代点法”是等价的方法。代点相减即“点差法”仅仅是“代点法”的一种变形技巧，单纯的这种变形技巧与“联立法”当然不是等价的。联立法可用判别是判定有没有相交，而点差法是假设了有两个交点，从这个角度看这两种方法也有差别。

902、(圆锥曲线) (高考不要求)

求双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的焦点坐标



解 1：联立 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=x \end{cases}$ 解得 $A(1,1)$

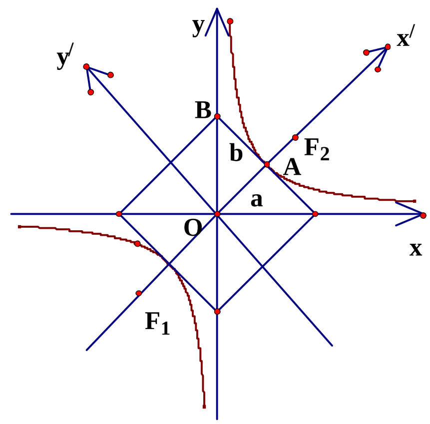
于是 $a=|OA|=\sqrt{2}$, $b=|AB|=\sqrt{2}$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$$

故 $F_1(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2},\sqrt{2})$

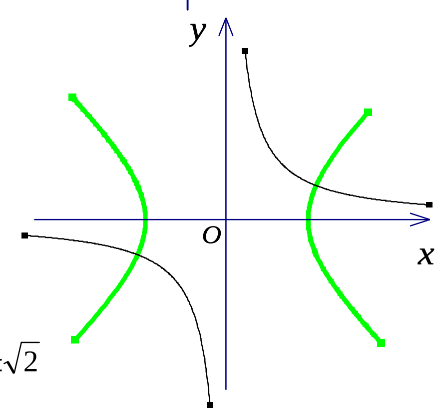
解 2：把坐标轴逆时针旋转 $45°$ 得新坐标系

$x'Oy'$ 则，$\begin{cases} x=x'\cos 45°-y'\sin 45° \\ y=x'\sin 45°+y'\cos 45° \end{cases}$



即 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$ 代入 $y=\dfrac{1}{x}$ 得

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x')^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2=1$$



于是于是 $a=|OA|=\sqrt{2}$, $b=|AB|=\sqrt{2}$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$$

在 $x'Oy'$ 系中焦点坐标是 $x'=\pm 2, y'=0$

在 $x'Oy'$ 系中焦点坐标是 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'=\pm\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

解 3：对曲线上的点 P(x,y) 绕原点顺时针旋转 $45°$ 得 $P'(x',y')$ 。

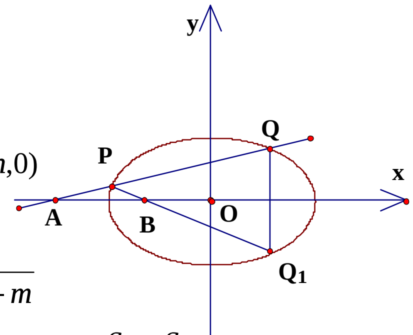
就是 $P'(x',y')$ 绕原点逆时针旋转 $45°$ 得

$\begin{cases} x=x'\cos 45°-y'\sin 45° \\ y=x'\sin 45°+y'\cos 45° \end{cases}$ 代入 $y=\dfrac{1}{x}$ 得，$(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x')^2-(\dfrac{\sqrt{2}}{2}y')^2=1$ 以下同解 2

904、(圆锥曲线) (高考不要求)

过椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点 A(m，0)作一直线 l 交椭圆 C 于 P、Q 两点，又 Q 关于 x 轴对称点为 Q_1，连结 PQ_1，交 x 轴于点 B

求证：点 B 为一定点 $(\dfrac{a^2}{m},0)$，



证明：$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1(a>b>0)$

设 $P(a\cos q_1,b\sin q_1)$，$Q(a\cos q_2,b\sin q_2)$，$B(n,0)$

则 $Q(a\cos(-q_2),b\sin(-q_2))$

由 A、P、Q 三点共线得 $\dfrac{b\sin q_1}{a\cos q_1-m}=\dfrac{b\sin q_2}{a\cos q_2-m}$

于是 $m=\dfrac{a\sin(q_2-q_1)}{\sin q_2-\sin q_1}=\dfrac{2a\cos\frac{q_2-q_1}{2}\sin\frac{q_2-q_1}{2}}{2\cos\frac{q_2+q_1}{2}\sin\frac{q_2-q_1}{2}}=\dfrac{a\cos\frac{q_2-q_1}{2}}{\cos\frac{q_2+q_1}{2}}$

同理 $n=\dfrac{a\cos\frac{-q_2-q_1}{2}}{\cos\frac{-q_2+q_1}{2}}=\dfrac{a\cos\frac{q_2+q_1}{2}}{\cos\frac{q_2-q_1}{2}}$，故 $mn=a^2$，$n=\dfrac{a^2}{m}$，证毕

918、(圆锥曲线)

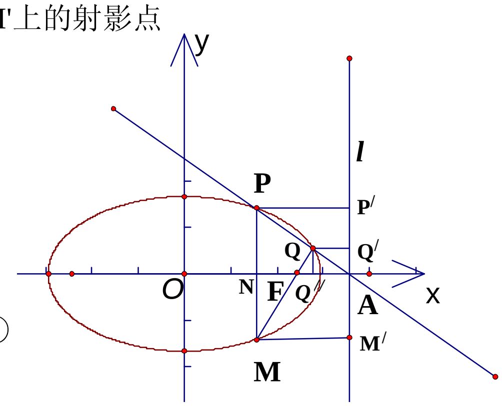
椭圆中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 F（c,0）（c>0）的准线 l 与 x 轴相交于点 A，|OF|=2|FA|，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点。

（1）求椭圆的方程及离心率；

（2）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

（3）若 $\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AQ}$（λ>1），过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M，证明向量 $\overrightarrow{FM}=-l\overrightarrow{FQ}$

(3)证明:点 P'、Q'、M'分别是点 P、Q、M 在准线上的射影点，点 Q''是 Q 在 x 轴上的射影点，点 F'是 F 在 MM'上的射影点，N 为 PM 与 x 轴的交点



∵A、Q、P 三点共线且 $\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AQ}$

∴ $\dfrac{|AP|}{|AQ|}=l$　　∴ $\dfrac{|PP'|}{|QQ|}=\dfrac{|AP|}{|AQ|}=l$

∵|PP'|=|MM'|　∴ $\dfrac{|MM'|}{|QQ|}=l$

∵ $e=\dfrac{|FQ|}{|QQ|}=\dfrac{|FM|}{|MM'|}$　　∴ $\dfrac{|FM|}{|FQ|}=\dfrac{|MM'|}{|QQ|}=l$ ①

$\dfrac{|FQ''|}{|MN|}=\dfrac{|FQ''|}{|PN|}=\dfrac{|AQ''|}{|AP|}=\dfrac{1}{l}$

∴ΔFQQ''∽ΔFMN　　∴∠QFQ''=∠MFN　　∴M、F、Q 三点共线

结合①式得向量 $\overrightarrow{FM}=-l\overrightarrow{FQ}$，得证

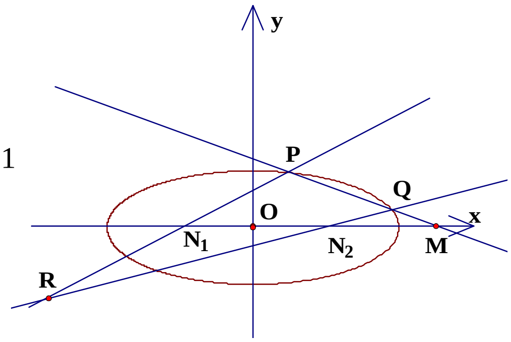
929、(圆锥曲线) (高考不要求)

设点 $A(-\sqrt{3},0)$， $B(\sqrt{3},0)$ 是给定的两定点,一动点 D 满足|DA|+|DB|=4.

(1)求动点 D 的轨迹 C 的方程;

(2)设 $N_1(-1,0)$,$N_2(1,0)$,M(3,0),点 P 是轨迹 C 上的一动点,直线 PM 与轨迹 C 的另一交点为 Q,求直线 PN_1 和 QN_2 交点 R 的轨迹方程

解:（1）因为|DA|+|DB|=4.



所以动点 D 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆

因 $a=2$， $c=\sqrt{3}$ 故 $a^2=4$， $b^2=a^2-c^2=1$

C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$①

（2）设 $P(2\cos q_1,\sin q_1)$， $Q(2\cos q_2,\sin q_2)$， $R(x,y)$， $\tan\dfrac{q_1}{2}=t_1$ $\tan\dfrac{q_2}{2}=t_2$

由 R、P、N_1 三点共线得 $\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{\sin q_1}{2\cos q_1+1}=\dfrac{2t_1}{3-t_1{}^2}$①

由 R、P、N_2 三点共线得 $\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{\sin q_2}{2\cos q_2-1}=\dfrac{2t_2}{3-t_2{}^2}$②

由 P、Q、M 三点共线得 $\dfrac{\sin q_1}{2\cos q_1-3}=\dfrac{\sin q_2}{2\cos q_2-3}$③

由③得 $\dfrac{t_1}{1+5t_1{}^2}=\dfrac{t_2}{1+5t_2{}^2}$， $(t_2-t_1)(5t_1t_2-1)=0$，因 $t_2\neq t_1$ 故 $t_1t_2=\dfrac{1}{5}$

把 $t_2=\dfrac{1}{5t_1}$ 代入②得 $\dfrac{y}{x-1}=\dfrac{10t_1}{25t_1{}^2-3}$④

由①④得 $t_1{}^2=\dfrac{3(3x-2)}{5(3x+2)}$ ⑤，故 $t_2{}^2=\dfrac{3x+2}{15(3x-2)}$ ⑥

把⑤代入①得 $y=\dfrac{5t_1(3x+2)}{18}$ 把⑥代入②得 $y=\dfrac{5t_2(3x-2)}{6}$

两式相乘得 $y^2=\dfrac{25t_1t_2(9x^2-4)}{18\times 6}=\dfrac{5(9x^2-4)}{18\times 6}$

整理得 $\dfrac{x^2}{\frac{4}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{5}{27}}=1$ 为所求的轨迹方程

解 2：设 $P(a\cos q_1, b\sin q_1)$，$Q(a\cos q_2, b\sin q_2)$，$R(x,y)$，$\tan\frac{q_1}{2}=t_1$　$\tan\frac{q_2}{2}=t_2$

由 R、P、N$_1$ 三点共线得 $\frac{y}{x+m}=\frac{\sin q_1}{a\cos q_1+m}=\frac{2t_1}{3-t_1^{\ 2}}$ ①

由 R、P、N$_2$ 三点共线得 $\frac{y}{x-1}=\frac{\sin q_2}{2\cos q_2-1}=\frac{2t_2}{3-t_2^{\ 2}}$ ②

由 P、Q、M 三点共线得 $\frac{\sin q_1}{2\cos q_1-3}=\frac{\sin q_2}{2\cos q_2-3}$ ③

由③得 $\frac{t_1}{1+5t_1^{\ 2}}=\frac{t_2}{1+5t_2^{\ 2}}$，$(t_2-t_1)(5t_1t_2-1)=0$，因 $t_2\neq t_1$ 故 $t_1t_2=\frac{1}{5}$

把 $t_2=\frac{1}{5t_1}$ 代入②得　$\frac{y}{x-1}=\frac{10t_1}{25t_1^{\ 2}-3}$ ④

由①④得 $t_1^{\ 2}=\frac{3(3x-2)}{5(3x+2)}$　⑤，故 $t_2^{\ 2}=\frac{3x+2}{15(3x-2)}$　⑥

把⑤代入①得 $y=\frac{5t_1(3x+2)}{18}$　　把⑥代入②得 $y=\frac{5t_2(3x-2)}{6}$

两式相乘得 $y^2=\frac{25t_1t_2(9x^2-4)}{18\times 6}=\frac{5(9x^2-4)}{18\times 6}$

整理得 $\frac{x^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{\frac{5}{27}}=1$ 为所求的轨迹方程

930、(圆锥曲线) (高考不要求)

请问各位，如何用高中的知识来求椭圆的面积？谢谢！

解：设椭圆方程为

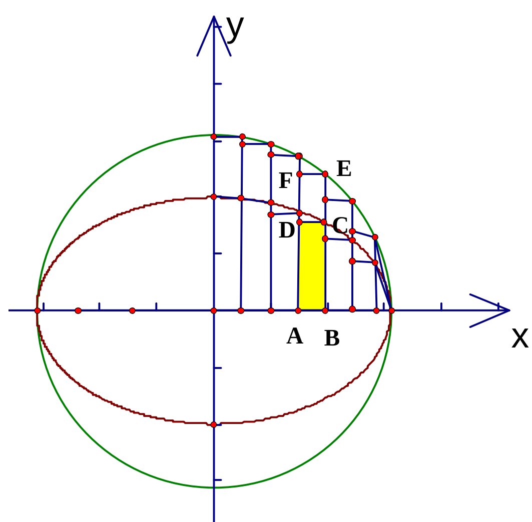
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

圆方程为 $x^2+y^2=a^2$

设图中 C、D 的坐标分别为

(x,y_C)、(x,y_E)

$y_C=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，$y_E=\sqrt{a^2-x^2}$



我们来算一算两个小矩形的面积比

$\frac{S_{矩形ABCD}}{S_{矩形ABEF}}=\frac{y_C}{y_E}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}$

矩形再小都是这个比

于是 $\frac{S_{椭圆}}{S_{圆}}=\frac{b}{a}$，$S_{椭圆}=\frac{b}{a}S_{圆}=\frac{b}{a}\bullet pa^2=pab$

933、(圆锥曲线)

椭圆 C 的中心在原点，焦点在 X 轴上，e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点（2，$\sqrt{2}$）

(1)C 的方程

(2)过点 P（4。0）做直线 L 交 C 于 A，B 点，Q 在线段 AB 上，且 $\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$，

求 Q 的轨迹方程和取值范围。

解：（1）设 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 则

$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$，于是 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

$x^2+2y^2=2b^2(a>b>0)$ 过（2，$\sqrt{2}$）点，于是 $8=2b^2$，$b^2=4$

C 的方程是 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）设直线方程为 $\begin{cases}x=4+t\cos q\\ y=t\sin q\end{cases}$，

A，B、Q 的坐标分别为 $\begin{cases}x_1=4+t_1\cos q\\ y_2=t_1\sin q\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=4+t_2\cos q\\ y_2=t_2\sin q\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=4+t_3\cos q\\ y_3=t_3\sin q\end{cases}$ ①

因 $\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$ 故，$\frac{0-t_1}{t_2-0}=-\frac{t_3-t_1}{t_2-t_3}$，$t_1(t_2-t_3)=t_2(t_3-t_1)$

于是 $2t_1t_2=t_3(t_1+t_2)$ ②

把 $\begin{cases}x=4+t\cos q\\ y=t\sin q\end{cases}$ 代入 $x^2+2y^2=8$ 得

$(1+\sin^2 q)t^2+(8\cos q)t+8=0$

$t_1+t_2=-\frac{8\cos q}{1+\sin^2 q}$，$t_1t_2=\frac{8}{1+\sin^2 q}$ 代入②得

$\frac{16}{1+\sin^2 q}=-\frac{t_3\bullet 8\cos q}{1+\sin^2 q}$，$t_3=-\frac{2}{\cos q}$ 代入①

于是 $\begin{cases}x_3=4-2\\ y_3=-2\tan q\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=2\\ y_3=-2\tan q\end{cases}$

$(8\cos q)^2-32(1+\sin^2 q)>0$，$2\cos^2 q-1-\sin^2 q>0$

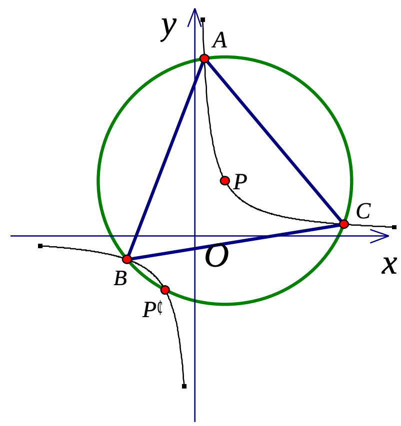
$\cos^2 q-2\sin^2 q>0$，$\tan^2 q<\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\tan q<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\sqrt{2}<y_3<\sqrt{2}$

因所求的方程是 $x=2\ (-\sqrt{2}<y<\sqrt{2})$

934、(圆锥曲线) (高考不要求)

设 P 是双曲线 $xy=1$ 上的任意一点，P' 是 P 关于原点的对称点，证明以 P 为圆心，$|PP'|$ 半径的圆与双曲线的另三个交点 A、B、C 正好是正三角形的三个顶点

证明：设 $P(x_0,\frac{1}{x_0})$，则圆的方程为 $(x-x_0)^2+(y-\frac{1}{x_0})^2=4(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})$



与 $xy=1$ 联立消去 y 得

$$(x-x_0)^2+(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})^2=4(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})$$

$$x^2-2x_0x+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xx_0}=3x_0{}^2+\frac{3}{x_0{}^2}$$

$$x^2-x_0{}^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0{}^2}-2(x_0x+\frac{1}{xx_0}+x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})=0$$

$$(x+x_0)[(x-x_0)+\frac{x_0-x}{x_0{}^2x^2}-2(x_0+\frac{1}{xx_0{}^2})]=0$$

$$(x+x_0)(x_0{}^2x^3-3x_0{}^3x^2-3x+x_0)=0$$

设另三个交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$

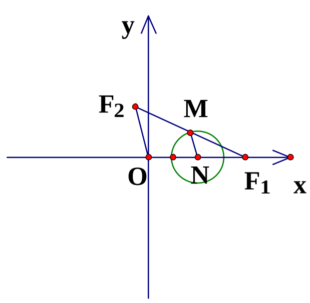
则 x_1,x_2,x_3 是方程 $x_0{}^2x^3-3x_0{}^3x^2-3x+x_0=0$ 的三个根于是

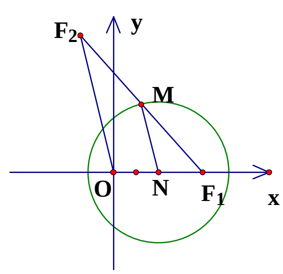
$x_1+x_2+x_3=\frac{3x_0{}^3}{x_0{}^2}=3x_0$，即 $x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，同理可证 $y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

因此 ΔABC 的重心与外心重合，所以 ΔABC 是等边三角形

948、(圆锥曲线)

双曲线经过原点,一个焦点是(4,0),实轴长为 2,求双曲线中心的轨迹方程.





解：两个焦点分别是 $F_1(4,0),F_2$,则双曲线中心 $M(x,y)$ 是线段 F_1F_2 的中点，

因 O 在双曲线上，于是 $|OF_2|-|OF_1|=\pm2$, $|OF_2|=4\pm2$

当 $|OF_2|=2$ 时，取 OF_1 的中点 N 连 MN ,则 $|MN|=\frac{1}{2}|OF_2|=1$

于是 M 点的轨迹方程是(x-2)^2+y^2=1

当 $|OF_2|=6$ 时，取 OF_1 的中点 N 连 MN ,则 $|MN|=\frac{1}{2}|OF_2|=3$

于是 M 点的轨迹方程是(x-2)^2+y^2=9

综上，所求的轨迹方程是(x-2)^2+y^2=1 和(x-2)^2+y^2=9

1124、把曲线$C_1: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{k} = 1$按向量$\vec{a} = (1,2)$平移后得到曲线$C_2$，曲线$C_2$有一条准线方程为 x=5，则 k 的值为______________，离心率 e 为______________。

解：平移后准线为 x=5，故C_1的准线为$x = 4$，于是

(1)当$k > 0$时，$\dfrac{4}{\sqrt{4+k}} = 4, k = -3$舍去　(2) 当$k < 0$时，$\dfrac{4}{\sqrt{4+k}} = 4, k = -3$

综上，$k = -3$，$e = \dfrac{\sqrt{4+k}}{2} = \dfrac{1}{2}$

118、直线$x\cos a + y\sin a = 2\ (0 \le a \le 180)$与曲线$x^2 + 3y^2 = 6$有公共点，求则$a$的范围是_______

解 1：设公共点为（x,y）,则$x = \sqrt{6}\cos q$，$y = \sqrt{2}\sin q$

于是$\sqrt{6}\cos q\cos a + \sqrt{2}\sin q\sin a = 2$

因此$\sqrt{6\cos^2 a + 2\sin^2 a}\ \cos(q - j) = 2$

于是$\sqrt{4\cos^2 a + 2} \ge 2$，解得$0 \le a \le 45°$或$135° \le a \le 180°$

解 2：$(x^2 + 3y^2)(3\cos^2 a + \sin^2 a) \ge (\sqrt{3}x\cos a + \sqrt{3}y\sin a)^2 = 3\times 4 = 12$

于是$6(3\cos^2 a + \sin^2 a) \ge 12$，$2\cos^2 a + 1 \ge 2$

1130、(圆锥曲线)

已知曲线$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$,给出下列四个命题

①曲线 C 与两坐标轴围成的图形面积不大于$\dfrac{1}{2}$

②曲线 C 上的点到原点的距离的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

③曲线 C 关于点$(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4})$中心对称

④当 x≠0,1 时,曲线 C 上所有点处的切线斜率为负值

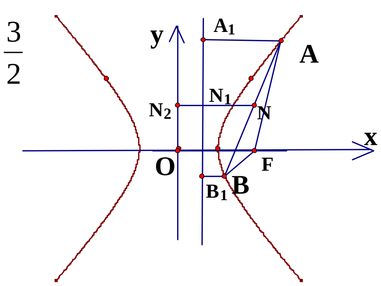
正确的是_________.

主要是$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$不懂

提示：以 x+y=1($0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$)为标准去研究$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$的图象

也需要借助一些代数方法

1135、A、B 在双曲线$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$右支上的两点，若弦的中点到轴距离最为 4，则$|AB|$的最大值是_______



解：设解：设弦 AB 的中点 N$(4, y_0)$，$a = 2$，$e = \dfrac{3}{2}$

$|AB| \le |AF| + |BF| = e(|AA_1| + |BB_1|)$

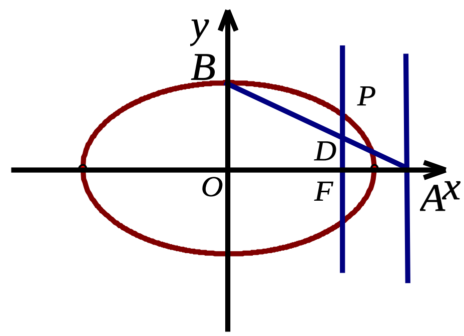
$= e \bullet 2|NN_1| = 2e(4 - \dfrac{a^2}{c}) = 8e - 2a = 8$

当且仅当AB过焦点时等号成立

于是$|AB|$最大$= 8$，

1180、如图，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右准线$l$与$x$轴交于点 A，椭圆的上顶点为 B，过椭圆的右焦点 F 作垂直于x轴的直线与椭圆交于点 P，若点 D 满足$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{DP}$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda\neq 0)$

(1)求椭圆的离心率(2)若椭圆的长轴长为 4，Q 是右准线上异于 A 的任意一点，QA_1，QA_2分别与椭圆交于 M，N。证明：MN 过与 x 轴交于定点



解：(1) $A(\dfrac{a^2}{c},0)$，$B(0,b)$，

因$PF\perp x$轴，故$P(c,\dfrac{b^2}{a})$

因$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{DP}$，故 D 为 PF 中点，$D(c,\dfrac{b^2}{2a})$

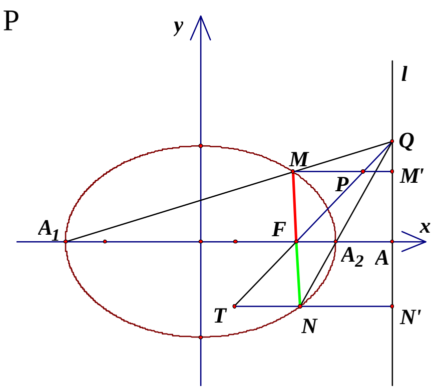
因$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda\neq 0)$故$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}=(-\frac{a^2}{c},b),\overrightarrow{AD}=(c-\frac{a^2}{c},\frac{b^2}{2a})=(-\frac{b^2}{c},\frac{b^2}{2a})$$

$$-\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{2a}=b\cdot(-\frac{b^2}{c})\Rightarrow a=2b\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{\sqrt{3}b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（2）下面用几何法证一下一般的情况

证明：连 MF，作$MM'\perp l$于M'，交 FQ 于点 P



因$MM'\,//\,x$轴，故$\dfrac{|MP|}{|A_1F|}=\dfrac{|MM'|}{|A_1A|}$

于是$\dfrac{|MP|}{|MM'|}=\dfrac{|A_1F|}{|A_1A|}=\dfrac{a+c}{a+\dfrac{a^2}{c}}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{|MF|}{|MM'|}$

故$|MF|=|MP|$，$\angle MFO=\angle MPF$

作$NM\perp l$于N'，交 QF 的延长线于点 T

同理可证$\angle NFT=\angle NTF$

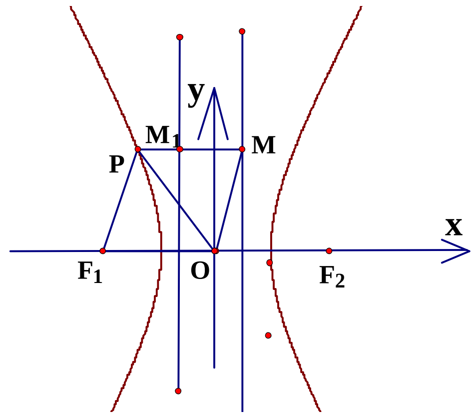
因$MM'\,//\,NN'$，故$\angle MPF=\angle NTF$

所以$\angle MFP=\angle NFT$，于是 M、F、N 三点共线，所以直线 MN 过与 x 轴交于 F

1202、(圆锥曲线) (高考不要求)

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过 $N(2,\sqrt{3})$，M 在其右准线上，左右焦点 F_1, F_2，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{F_1O}$，OP 为Ð$F_1OM$ 的平分线与双曲线交于 P 点，

求(1)双曲线的离心率(2) 双曲线方程



解：因 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{F_1O}$，$OP$ 为 $\angle F_1OM$ 的平分线

故 PF_1OM 为菱形，于是 $|PF_1|=|PM|=c$

设 PM 与左准线的交点为 M_1

$$\frac{|PF_1|}{|PM_1|}=\frac{c}{c-\dfrac{2a^2}{c}}=\frac{c^2}{c^2-2a^2}=\frac{c}{a}$$

于是 $c^2-2a^2=ac\Rightarrow e^2-e-2=0$，$e=2$

$c^2=4a^2$，$b^2=3a^2$

双曲线为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$，$3x^2-y^2=3a^2$

过点 $N(2,\sqrt{3})$，于是 $12-3=3a^2$，$a^2=3$，故双曲线为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$

1226、(圆锥曲线)

设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=l$ 上的两点，点 N（1，3）是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.

（Ⅰ）确定 l 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

（Ⅱ）试判断是否存在这样的 l，使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上？并说明理由.

（Ⅰ）解：点 N（1，3）是线段 AB 的中点，故 N（1，3）在椭圆 $3x^2+y^2=l$ 内部

于是 $3\times1^2+3^2<l$，$l>12$

设 A（x_1, y_1），B（x_2, y_2）则 $3x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=l$，$3x_2^{\,2}+y_2^{\,2}=l$

相减得 $3(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$

因 $x_1+x_2=2, y_1+y_2=6, \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，故 $6+6k_{AB}=0$，$k_{AB}=-1$

于是直线 AB 的方程为 $y-3=-(x-1)$，即 $x+y-4=0$

（2）(分析：因为 CD 垂直平分 AB，于是 $\angle DAC = \angle DBC$
若有 A、B、C、D 四点在同一个圆上必有 $\angle DAC = \angle DBC = 90°$)
证明：联立 $x+y-4=0$ 与 $3x^2+y^2=l$ 解得
A（$1+\frac{1}{2}\sqrt{l-12}$，$3-\frac{1}{2}\sqrt{l-12}$），B（$1-\frac{1}{2}\sqrt{l-12}$，$3+\frac{1}{2}\sqrt{l-12}$），
∵CD 垂直平分 AB，
∴直线 CD 的方程为 y-3=x-1，即 $y=x+2$
联立 $y=x+2$ 与 $3x^2+y^2=l$ 解得
C（$\frac{-1-\sqrt{l-3}}{2}$，$\frac{3-\sqrt{l-3}}{2}$），D（$\frac{-1+\sqrt{l-3}}{2}$，$\frac{3+\sqrt{l-3}}{2}$）
$$\therefore \overrightarrow{CA}=\left(\frac{3+\sqrt{l-12}+\sqrt{l-3}}{2},\frac{3-\sqrt{l-12}+\sqrt{l-3}}{2}\right),$$
$$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{3+\sqrt{l-12}-\sqrt{l-3}}{2},\frac{3-\sqrt{l-12}-\sqrt{l-3}}{2}\right),$$
$$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}=\frac{(3+\sqrt{l-12})^2-(l-3)}{4}+\frac{(3-\sqrt{l-12})^2-(l-3)}{2}=0,$$
∴A 在以 CD 为直径的圆上.，同理可证 B 点也在以 CD 为直径的圆上
∴A、B、C、D 四点共圆.

1235、(圆锥曲线)

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左右焦点 F_1, F_2，P 为双曲线右支上任意一点，若 $\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|}$ 的最小值是 $8a$，则该双曲线离心率 e 的范围是(　　)

A、(0，2]　　B、(1，3]　　C、[2，3]　　D、[3，+∞)

解：设 $|PF_2|=r$，则 $r\ge c-a$

因为 $|PF_1|=|PF_2|+2a$

所以 $\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|}=\frac{(r+2a)^2}{r}=r+\frac{4a^2}{r}+4a\ge 2\sqrt{4a^2}+4a=8a$

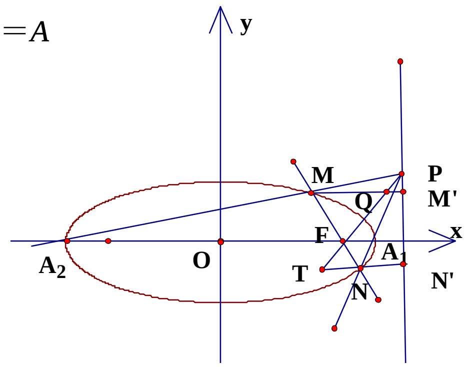
当且仅当 $r=2a$ 时上式取等号

于是应有 $2a\ge c-a$，$3\ge\frac{c}{a}=e$，又 $e>1$，故 $1<e\le 3$

1263、(圆锥曲线) (高考不要求)

有椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0) 和右准线上的点 Q(Q 的纵坐标不为 0)。

A_1,A_2分别为椭圆的左右端点，直线 QA_1、QA_2与椭圆交于另外两点 MN。
求证：MN 过定点，并求出该定点。



证：设 F 是右焦点，右准线为 l，l **I** x轴＝A

连 MF，作$MM'\perp l$于M'，交 FP 于点 Q

因$MM' \,//\, x$轴

故$\frac{|MQ|}{|A_1F|}=\frac{|MM'|}{|A_1A|}$

于是$\frac{|MQ|}{|MM'|}=\frac{|A_1F|}{|A_1A|}=\frac{a+c}{a+\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}=\frac{|MF|}{|MM'|}$

故$|MF|=|MQ|$，$\angle MFQ=\angle MQF$

作$NN'\perp l$于N'，交 PF 的延长线于点 T

同理可证$\angle NFT=\angle NTF$

因$MM' \,//\, NN$，故$\angle MQF=\angle NTF$，所以$\angle MFQ=\angle NFT$

于是 M、F、N 三点共线
所以直线 MN 过与 x 轴交右焦点于 F
1377
http://bbs.pep.com.cn/thread-285010-1-2.html

已知点 P 是双曲线$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$的动点，$F_1,F_2$是双曲线的两个焦点，O 是原

点，则$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|OP|}$的取值范围为多少？

解：由对称性不妨设$P(x_0,y_0)$在右支上且$x_0\ge 0$、$y_0\ge 0$，$\angle xOP=q$

由于渐近线方程是$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，于是$0\le\tan q<\frac{\sqrt{2}}{2}$

则$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|OP|}=\frac{2ex_0}{|OP|}=\sqrt{6}\cos q=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+\tan^2 q}}\in(2,\sqrt{6}]$

1378
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=283841&extra=pageD2&page=2

已知 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两动点,分别以 A,B 为切点作椭圆的切线线 l_1、l_2，

当 l_1 与 l_2 的夹角为定值 q 时，求 l_1、l_2 两直线交点 S 的轨迹，并说明轨迹的形状

解：设切线 l_1 与 l_2 的交点 S(x_0,y_0)，斜率分别为 k_1，k_2 则

切线 l_1 为 $y=k_1x\pm\sqrt{a^2k_1{}^2+b^2}$　于是 $y_0=k_1x_0\pm\sqrt{a^2k_1{}^2+b^2}$

故 $(y_0-k_1x_0)^2=a^2k_1{}^2+b^2$，即 $(x_0{}^2-a^2)k_1{}^2-2x_0y_0k_1+y_0{}^2-b^2=0$

同理由切线 l_2 得，$(x_0{}^2-a^2)k_2{}^2-2x_0y_0k_2+y_0{}^2-b^2=0$

于是 k_1，k_2 是方程 $(x_0{}^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0{}^2-b^2=0$ 的两根

故 $k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{x_0{}^2-a^2},k_1k_2=\frac{y_0{}^2-b^2}{x_0{}^2-a^2}$

（1）当 $q=90°$ 时 $k_1k_2=\frac{y_0{}^2-b^2}{x_0{}^2-a^2}=-1$，所求的方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$

（2）于是当 $q\neq 90°$ 时

$$\tan^2 q=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|^2=\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(1+k_1k_2)^2}=\frac{\left(\frac{2x_0y_0}{x_0{}^2-a^2}\right)^2-\frac{4(y_0{}^2-b^2)}{x_0{}^2-a^2}}{\left(1+\frac{y_0{}^2-b^2}{x_0{}^2-a^2}\right)^2}$$

$$=\frac{4a^2y_0{}^2+b^2x_0{}^2-4a^2b^2}{(x_0{}^2+y_0{}^2-a^2-b^2)^2}$$

故所求的方程是 $\tan^2 q(x^2+y^2-a^2-b^2)^2=4a^2y^2+b^2x^2-4a^2b^2$

容易验证当一切线斜率不存在时，交点也适合方程

1384

http://bbs.pep.com.cn/thread-286761-1-2.html

已知抛物线 $y^2=4x$，A(1，2)是抛物线上一点，过点 N（5，-2)做直线交抛物线于 B、C 两点，试判断三角形 ABC 的形状。

解：设直线 BC 的方程为 $m(x-1)+n(y-2)=1$（1），

（1）过 N（5，-2)，于是 $4m-4n=1$

由抛物线 $y^2=4x$ 化为 $(y-2+2)^2=4(x-1+1)$

即 $(y-2)^2+4(y-2)=4(x-1)$（2）

把 $1=m(x-1)+n(y-2)$ 代入（2）得

$(y-2)^2+4(y-2)[m(x-1)+n(y-2)]=4(x-1)[m(x-1)+n(y-2)]$（3）

设 $\dfrac{y-2}{x-1}=k$，（3）两边除以 $(x-1)^2$ 得， $k^2+4k(m+nk)=4(m+nk)$

整理得， $(1+4n)k^2+(4m-4n)k-4m=0$（4）

由于 B,C 是（1）与（2）的交点，于是 B,C 的坐标适合方程（3）

设 AB、AC 的斜率分别为 k_1,k_2，则 k_1,k_2 是（4）的两根

故 $k_1k_2=\dfrac{-4m}{1+4n}=\dfrac{-4m}{4m}=-1$，故 $AB\perp AC$,三角形 ABC 是直角三角形

上述解法只是想玩一玩这个题目

1390

http://bbs.pep.com.cn/thread-284412-1-3.html

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

及右准线上任意一点C，过右焦点F引直线AB交双曲线右支于AB两点。
求证：直线CA，CF，CB的斜率成等差数列。

证明:设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(\frac{a^2}{c},y_0)$，$F(c,0)$，直线 AB：$x=ty+c$，

要证：直线CA，CF，CB的斜率成等差数列。

只要证：$\frac{y_1-y_0}{x_1-\frac{a^2}{c}}+\frac{y_2-y_0}{x_2-\frac{a^2}{c}}=2\times\frac{-y_0}{c-\frac{a^2}{c}}\Leftrightarrow\frac{y_1-y_0}{ty_1+c-\frac{a^2}{c}}+\frac{y_2-y_0}{ty_2+c-\frac{a^2}{c}}=2\times\frac{-y_0}{c-\frac{a^2}{c}}$

$\Leftrightarrow\frac{y_1-y_0}{cty_1+b^2}+\frac{y_2-y_0}{cty_2+b^2}=\frac{-2y_0}{b^2}$

$\Leftrightarrow b^2[(y_1-y_0)(cty_2+b^2)+(y_2-y_0)(cty_1+b^2)]=-2y_0(cty_2+b^2)(cty_1+b^2)$

$\Leftrightarrow b^2[2cty_1y_2+b^2(y_1+y_2)-cty_0(y_1+y_2)-2y_0b^2]=-2y_0[c^2t^2y_1y_2+ctb^2(y_1+y_2)+b^4]$

$\Leftrightarrow(2cb^2t+2cy_0c^2t^2)y_1y_2+b^2(b^2+cty_0)(y_1+y_2)=0$

$\Leftrightarrow 2ct(b^2+y_0ct)y_1y_2+b^2(b^2+cty_0)(y_1+y_2)=0$

$\Leftrightarrow(b^2+y_0ct)[2cty_1y_2+b^2(y_1+y_2)]=0$ (*)

$x=ty+c$ 与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立消 x 得

$b^2(ty+c)^2-a^2y^2=a^2b^2$

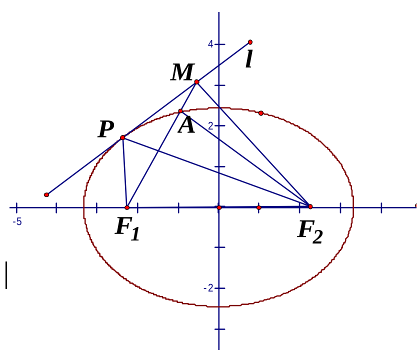
$(b^2t^2-a^2)y^2+2b^2cty+b^4=0$

故 $2cty_1y_2+b^2(y_1+y_2)=2ct(\frac{b^4}{b^2t^2+a^2})+b^2(-\frac{2b^2ct}{b^2t^2+a^2})=0$

于是(*)式成立，故原命题成立

1398

http://bbs.pep.com.cn/thread-287613-1-3.html



圆椭光学性质的证明：

设 l 切椭圆于点 P，M 是 l 上不同于 P 的任意一点，连 MF_1交椭圆于点 A，连 MF_2

则

$|MF_1|+|MF_2|=|AF_1|+(|MA|+|MF_2|)>|AF_1|+|AF_2|$
$=|PF_1|+|PF_2|$

于是 P 是直线 l 上到 F_1,F_2 距离之和最小的点，

于是从 F_1 出发的光线，射到直线 l 上的 P 点

反射后必经过 F_2 点

1399

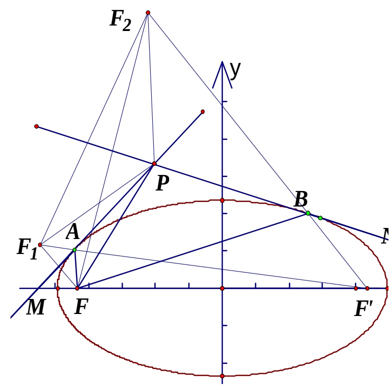
http://bbs.pep.com.cn/thread-287613-1-3.html

已知圆锥曲线一个焦点 F,从圆锥曲线外一点 P,作两切线 PA,PB.

求证：当圆锥曲线是椭圆或抛物线时 $\angle PFA=\angle PFB$

当圆锥曲线是双曲线时 $\angle PFA+\angle PFB=180°$

下面就椭圆的情况加以证明：



如图，作 F 关于切线 PA、PB 的对称点 F_1 和 F_2

连 AF_1 和 BF_2, $F'A$ 和 $F'B$（F' 是另一个交点），

由光学性质可知

$\angle F'AM=\angle FAM=\angle PAF'$

故 F_1, A, F' 三点共线

于是 $|F'F_1|=|AF'|+|AF_1|=|AF|+|AF_1|=2a$

同理 $|F'F_2|=2a$，于是 $|F'F_1|=|F'F_2|$

故 $\angle F'F_1F_2=\angle F'F_2F_1$

又因为 $|PF_1|=|PF|=|PF_2|$

故 $\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$,所以 $\angle PF_1A=\angle PF_2B$

因为 $\angle PFA=\angle PF_1A$, $\angle PFB=\angle PF_2B$,所以 $\angle PFA=\angle PFB$

同理可证圆锥曲线双曲线和抛物线的情形

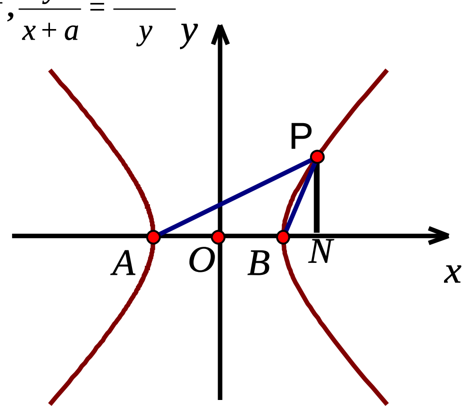
1401

双曲线 $x^2-y^2=2008$ 的左右顶点分别为 A，B 为其右支上的一点，且

$\angle APB=7\angle PAB$

则 $\angle PAB=$________角

解：设 $P(x,y)$，则 $x^2-y^2=a^2$,于是 $(x+a)(x-a)=y^2$, $\frac{y}{x+a}=\frac{x-a}{y}$



$\frac{y}{x+a}=\frac{PN}{PA}=\tan\angle PAN$, $\frac{x-a}{y}=\frac{BN}{PN}=\tan\angle BPN$,

$\angle PAN=\angle BPN$，又

$\angle PAN+\angle BPN+\angle APB=90°$,

$9\angle PAN=90°$, $\angle PAN=10°$

1414

http://bbs.pep.com.cn/thread-289236-1-1.html

设 A 是圆形纸片内不同于圆心的一个点，取圆周上一点 B，折叠纸片使点 B 与点 A 重合，得到一条折痕，当点 B 取遍圆周上的所有点时得到的所有折痕均与某条曲线相切，这条曲线是一个(　)

A 圆　B 椭圆　C 双曲线　D 抛物线

答：折痕 L 是 AB 的中垂线，

设圆心为 Q,连 QB 与折痕 L 交于 T,由平几知识得光线从 A 点出发射到 L 上的 T 点反射后经过圆心 Q,于是折痕 L 与以 A、Q 为焦点的圆锥曲线切于 T 点，由于 TB+TQ=QB,于是所求的圆锥曲线是以 A、Q 为焦点的椭圆

1430

http://bbs.pep.com.cn/thread-291828-1-1.html

若双曲线 $y^2-x^2=1$ 与 $\dfrac{xy-x-y+1}{x^2-3x+2}=m$ 有唯一的公共点，则实数 m 的取值集合中元素的个数为(　　)

A、2　B、4　C、5　D、6

解：$\dfrac{xy-x-y+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{y-1}{x-2}=m$，$x\neq 2 且 x\neq 1$，

$y-1=m(x-1)$　$x\neq 2 且 x\neq 1$

当 $m=-1$ 时，$y-1=m(x-1)$ 与渐近线平行唯一交点

当 $m=0$ 时，$y-1=m(x-1)$ 与双曲线线相切唯一公共点

把 x=2 代入双曲线得 $y=\pm\sqrt{5}$，代直线得 $m=\pm\sqrt{5}$

因为直线 $y-1=m(x-1)$ 与双曲线线有两个交点，

所以直线 $y-1=m(x-1)$（$x\neq 2 且 x\neq 1$）与双曲线只有一个交点

因此 m 的取值集合是 $\{-1,0,\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$