廖老师网上千题解答分类

一、大纲基本函数

4、设函数 $f(x)=\lg(1-x)$，$g(x)=\lg(1+x)$，在 f(x)和 g(x)的公共定义域内，比较

$|f(x)|$和$|g(x)|$的大小

解：由$\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}$得公共定义域为$(-1,1)$

$|f(x)|^2-|g(x)|^2=f(x)^2-g(x)^2=[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]$

$=\lg(1-x^2)\lg\dfrac{1-x}{1+x},\quad x\in(-1,1)\Rightarrow\lg(1-x^2)<0$

(1)当$x\in(-1,0)$时，$\lg(1-x^2)<0,\lg\dfrac{1-x}{1+x}>0,\lg(1-x^2)\lg\dfrac{1-x}{1+x}<0,|f(x)|<|g(x)|$ ，

(2)当$x=1$时，$\lg(1-x^2)\lg\dfrac{1-x}{1+x}=0,|f(x)|=|g(x)|$

(3)当$x\in(0,1)$时，$\lg(1-x^2)<0,\lg\dfrac{1-x}{1+x}<0,\lg(1-x^2)\lg\dfrac{1-x}{1+x}>0,|f(x)|>|g(x)|$

5、已知 A={(x,y)|y=x^2+ax+2}，B={(x,y)|y=x+1,0≤x≤2},A∩B≠ϕ ,求实数 a 的取值范围。

解：由$\begin{cases}y=x^2+ax+2\\y=x+1\end{cases}$**消去 y 得**$x^2+(a-1)x+2=0$ **(1)，**

当 x＝0 时，方程**(1)**无解

当$0<x\le 2$时，方程**(1)化为**$1-a=x+\dfrac{1}{x}$**，**

$\because x+\dfrac{1}{x}\in[2,+\infty)$，$\therefore 1-a\ge 2\Rightarrow a\le -1$

综上实数 a 的取值范围是$(-\infty,-1]$

35、已知 $y=\log_a(3-ax)$ 在[0 2]上是 x 的减函数，求 a 的取值范围。

解：$\because a>0且a\neq 1$
$\therefore 3-ax$ 是增函数

$\because y=\log_a(3-ax)$ 在[0 2]上是 x 的减函数

$$\therefore \begin{cases}0<a<1\\ 3-2a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<a<1\\ a<\dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow 0<a<1$$

本题改为：已知 $y=\log_a(3-ax)$ 在[0 ，5]上是 x 的减函数，求 a 的取值范围。更理想一点

解解：$\because a>0且a\neq 1$
$\therefore 3-ax$ 是增函数

$\because y=\log_a(3-ax)$ 在[0，5]上是 x 的减函数

$$\therefore \begin{cases}0<a<1\\ 3-5a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<a<1\\ a<\dfrac{3}{5}\end{cases} \Rightarrow 0<a<\frac{3}{5}$$

43、函数 $f(x)$ 是奇函数，且在$[-1,1]$上递增，又 $f(-1)=-1$，

(1) $f(x)$ 在$[-1,1]$上的最大值＝_______

(2)若 $f(x)\le t^2-2at+1$ 对 $x\in[-1,1]$及 $a\in[-1,1]$都恒成立，则 t 的取值范围是____

解：(1) $f(x)$ $[-1,1]$上递增， $f(x)_{\max}=f(1)=-f(-1)=1$

(2)$\because f(x)\le t^2-2at+1$ 对 $x\in[-1,1]$恒成立

$\therefore f(x)_{\min}\le t^2-2at+1$，即 $t^2-2at+1\ge 1$

又它对 $a\in[-1,1]$恒成立，注意到这时 $t^2-2at+1$ 要看成是 a 的函数

故 $\begin{cases}t^2-2t+1\ge 1\\ t^2+2t+1\ge 1\end{cases}$ 解得： $t\le -2或t\ge 2或t=0$

99、设 y 是实数，且 $4y^2+4xy+x+6=0$，求 x 的取值范围

解：因 y 是实数，故关于 y 的二次方程有实根

于是 $\Delta=16x^2-16(x+6)\geq 0$

解得 $x\leq -2或x\geq 3$

101、已知函数 f(x)是定义在（0，+∞）的增函数，且 f(xy)=f(x)+f(y)

（1）证明 f($\frac{x}{y}$)=f(x)-f(y)

（2）已知 f(3)=1,且 f(a)>f(a-1)+2，求 a 的取值范围

解：在 f(xy)=f(x)+f(y)中

令 x=y=1 得 f(1)＝f(1)+ f(1)，f(1)＝0

令 y＝$\frac{1}{x}$得，f(1)=f(x)+f($\frac{1}{x}$)， f($\frac{1}{x}$)＝-f(x)

令 y 为$\frac{1}{y}$得 f($\frac{x}{y}$)=f(x)+f($\frac{1}{y}$)＝f(x)-f(y)

（2）由公式 f(xy)=f(x)+f(y)

不等式 f(a)>f(a-1)+2 可化为

f(a)>f(a-1)+1+1

f(a)>f(a-1)+ f(3)+ f(3)

f(a)>f(9a-9)

由于 f(x)是定义在（0，+∞）的增函数

故 a>9a-9，且 9a-9>0, 解得$1<a<\frac{9}{8}$

116、若函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且在 R_+ 上递增， $f(1)=0$，

解不等式 $f[x(1-2x)]<0$

解：因为 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且在 R_+ 上递增， $f(1)=0$

所以在 $(-\infty,0)$ 上递增， $f(-1)=0$

不等式 $f[x(1-2x)]<0$可化为

$$\begin{cases}x(1-2x)\geq 0\\ f[x(1-2x)]<f(1)\end{cases}或\begin{cases}x(1-2x)<0\\ f[x(1-2x)]<f(-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(1-2x)\geq 0\\ x(1-2x)]<1\end{cases}或\begin{cases}x(1-2x)<0\\ x(1-2x)<-1\end{cases}解得 0<x<\frac{1}{2}或x<-\frac{1}{2}或x>1$$

140、已知 $f(x^2-1)$的定义域是$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$则 f(x)的定义域是_________

解：**Q** $f(x^2-1)$的定义域是$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

$\therefore$在 $f(x^2-1)$中$x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$， $x^2-1\in[-1,\ 2\ ]$

因此 f(x)的定义域是[-1, 2]

151、设函数 $f(x)=2x^2+(2b+a)x+ab$，求 f(x)的单调区间，并证明 f(x)在其单调区间上的单调性

解： $f(x)=2(x+\dfrac{a}{2})(x+b)$,对称轴 $x=\dfrac{-\dfrac{a}{2}-b}{2}=-\dfrac{2+2b}{4}$

f(x)在 $(-\infty,-\dfrac{a+2b}{4})$ 递减，在 $(-\dfrac{a+2b}{4},+\infty)$ 递增

证明：设任意 $x_1,x_2\in(-\infty,-\dfrac{a+2b}{4})$，且 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=[2{x_1}^2+(2b+a)x_1+ab]-[2{x_2}^2+(2b+a)x_2+ab]=$

$=2({x_1}^2-{x_2}^2)+(2b+a)(x_1-x_2)=(x_1-x_2)[2(x_1+x_2)+2b+a]$

Q $x_1<x_2<-\dfrac{a+2b}{4}$

$\therefore x_1-x_2<0,2(x_1+x_2)+2b+a<0$

$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$

故 f(x)在 $(-\infty,-\dfrac{a+2b}{4})$ 递减，同理可证 f(x)在 $(-\dfrac{a+2b}{4},+\infty)$ 递增

151、设函数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+b}$ (2b>a>0),求 f(x)的单调区间，并证明 f(x)在其单调区间上的单调性

解： $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+b}=\dfrac{2(x+b)+a-2b}{x+b}=2+\dfrac{a-2b}{x+b}$

f(x)在 $(-\infty,-b$ ）递增，在 $(-b,+\infty)$ 递增

证明：设任意 $x_1,x_2\in(-\infty,-b)$，且 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=(2+\dfrac{a-2b}{x_1+b})-(2+\dfrac{a-2b}{x_2+b})=\dfrac{(a-2b)(x_2-x_1)}{(x_1+b)(x_2+b)}$

Q $x_1<x_2<-b$，2b>a>0 $\therefore x_2-x_1>0,(x_1+b)(x_2+b)>0$， $a-2b<0$

$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$

故 f(x)在 $(-\infty,-b$ 递增　同理可证 f(x)在 $(-b,+\infty)$ 递增

154、已知$a=\log_{0.7}0.8$，$b=\log_{1.1}0.9$，$c=1.1^{0.9}$，比较a,b,c的大小

解：$\log_{0.7}1<\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7$

故$0<a<1$

$c=1.1^{0.9}>1.1^{0}=1$

$b=\log_{1.1}0.9<0$

所以$b<a<c$

156、若$a=\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}-2004^{-\frac{1}{n}})$（n 属于正整数），那么$(\sqrt{a^2+1}-a)^n$的值是

____

解：$\because a=\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}-2004^{-\frac{1}{n}})$

$\therefore a^2+1=[\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}+2004^{-\frac{1}{n}})]^2,\sqrt{a^2+1}=\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}+2004^{-\frac{1}{n}})$

$(\sqrt{a^2+1}-a)^n=[\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}+2004^{-\frac{1}{n}})-\dfrac{1}{2}(2004^{\frac{1}{n}}-2004^{-\frac{1}{n}})]^n$

$=(2004^{-\frac{1}{n}})^n=\dfrac{1}{2004}$

164、 要使函数$y=1+2^x+4^x\bullet a$在$x\in(-\infty,1]$上 y>0 恒成立，求 a 的取值范围。

解：$y=1+2^x+4^x\bullet a$，设$t=2^x$，则$y=1+t+at^2$

$x\in(-\infty,1]\Rightarrow t\in(0,2]$，在$x\in(-\infty,1]$上 y>0 恒成立就是

在$t\in(0,2]$上 y>0 恒成立，即$1+t+at^2>0$

$at^2>-1-t$

$a>-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}$的最大值$-\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}$

166、已知 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x++3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n}$，其中 $a\in R, n\in N^+$，当 $n\geq 2$ 时，f(x)在（-∞，1）上有意义，求 a 的取值范围。(难题)

解：$1+2^x++3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x>0$ ，对 x∈（-∞，1]恒成立

$$1+2^x++3^x+\cdots+(n-1)^x>-a\bullet n^x$$

$$(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+(\frac{3}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x>-a$$

$(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+(\frac{3}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x$在 x∈（-∞，1]上递

故当 x=1 时 $(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+(\frac{3}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x$取最小值

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n}=\frac{n-1}{2}$$

$$\frac{n-1}{2}>-a$$

$a>-\dfrac{n-1}{2}$在 $n\geq 2$ 时恒成立，于是 $a>-\dfrac{1}{2}$

171、给出函数 $f(x)=2^x(x\geq 4)$，$f(x)=f(x+1)(x<4)$，则 $f(\frac{1}{2})=$ ______

解：$f(\frac{1}{2})=f(4+\frac{1}{2})=f(\frac{9}{2})=2^{\frac{9}{2}}=\sqrt{2^9}=16\sqrt{2}$

172、问题 1： $3f(x)+5f(\frac{1}{x})=2x+1$,求$f(x)$时，联立 $3f(\frac{1}{x})+5f(x)=\frac{2}{x}+1$，将 x 换为 1/x，那就相当于括号里的 x 与 2x+1 中的 x 是相等的吗？

问题 2：f(3x-2)的定义域是[0,1]求 f(x)的定义域时，f(3x-2)与 f(x)中的 x 不相等怎样判断括号里的 x 是否一样呢？

+++

答：（1）函数关系讲的是函数 y 与自变量 x 的关系，

$y=x^2$，y=3x+12, s=3t+5 都是函数关系

注意在数学中不管什么函数习惯上自变量都是用字母 x 表示，函数都是用字母 y 表示,。

能不能说函数 $y=x^2$ 与函数 $y=(x+1)^2$ 中的 x 是相同的呢？在函数 $y=x^2$ 中自变量 x 也可以自由取值，在函数 $y=(x+1)^2$ 中自变量 x 也可以自由取值，这两个函数的 x 的取值有各自的自由。于是 f(3x-2)与 f(x)中的 x 的取值有各自的自由。

（2）f 是一个作用方法，比方说一个数在 f 的作用下，变成了这个数的平方，那么 $f(3)=3^2=9$，$f(4)=4^2=16$，$f(x)=x^2$，$f(t)=t^2$。

若 $f(x)=x^2$, 则 $f(3)=3^2=9$，f 是作用方法，3 叫 f 的作用对象，9 叫做 3 被 f 后的结果。在 $f(x)=x^2$ 中，x 可取不同的数值，但 f(x)括号里的 x 与 x^2 中的 x 是相等的

（3）我们可以用作用方法 f 来表示函数关系。如果作用方法 f，是把一个数变成这个数的 2 倍、那么 f（x）＝2x，函数关系 y＝2x 就可以写成，y=f（x）,或者写成 f（x）＝2x

（4）关系 f(x)=5x+9 就是函数关系 y=5x+9

关系 f(x)=5x-9 就是函数关系 y==5x-9

（5）如果作用方法 f，是把一个数变成这个数的 2 倍、

关系 y=f(x) 就是函数关系 y=2x

关系 y=f(x+2) 就是函数关系 y=2(x+2)

可见函数 y=f(x)与函数 y=f(x+2)是两个不同的函数，在这两个关系中的 f，是相同的运算，在函数 y=f(x)中自变量 x 可以自由取值，在函数 y=f(x+2)中自变量 x 也可以自由取值，这两个函数的 x 的取值有各自的自由。但是这两个函数的 x 的取值范围都受到 f 的限制，因此就有一定的联系。

（6）如果 f 的作用范围是[5，7]，则函数 y=f(x)中自变量 x 的范围也只能为[5，7]，因而函数 y=f(x)的定义域就是[5，7]。

然而函数 y=f(x+2)中自变量 x 的范围就不是[5，7]了，这是因为受 f 作用的是 x+2 不是 x，因此 x+2 的范围才是[5，7]，进而得出自变量 x 的范围是[3，5]，也就是说函数 y=f(x+2) 的定义域就是[3，5]

（7）由（6）可知函数 y=f(x)的定义域与 f 的作用范围是一样的

函数 y=f(x+2) 的定义域与 f 的作用范围不一样，x+2 的范围才是 f 的作用范围

（8）例 1、若 y=f(x+4)的定义域为[5，11]，求 y=f(x－4)的定义域

分析：可以用 f 的作用范围过度。

解：在 y=f(x+4)中，$5\leqslant x\leqslant 11\Rightarrow 9\leqslant x+4\leqslant 15$

因此在 y=f(x)中，$9\leqslant x\leqslant 15$。在 y=f(x－4)中 $9\leqslant x-4\leqslant 15\Rightarrow 13\leqslant x\leqslant 19$

所以 y=f(x－4)的定义域是[13，19]

173、函数 f(x)的定义域为[0，1]，则函数 f(x-a)+f(x+a)(0<a<1/2)的定义域为______

解：$\begin{cases}0\le x-a\le 1\\0\le x+a\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le x\le 1+a\\-a\le x\le 1-a\end{cases}$

由于$0<a<\dfrac{1}{2}$，因些　$a\le x\le 1-a$

188、若 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x}$，则当 x 不等于 0，1 时，f(x)=______

解：设$t=\dfrac{1}{x}$则，　$x=\dfrac{1}{t}$

$f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x}$ 可化为 $f(t)=\dfrac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{t-1}$

在$t=\dfrac{1}{x}$中 $x\ne 1,\ x\ne 0$ 故 $t\ne 1$, 且 $t\ne 0$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ （$x\ne 1$, 且 $x\ne 0$）

193、求函数 $y=3x^2-12x+18\sqrt{4x-x^2}-23$ 的值域

解：设 $t=\sqrt{4x-x^2}$ 则 $4x-x^2=t^2$

$y=-3t^2+18t-23=-3(t-3)^2+4$

$\mathbf{Q}\ t=\sqrt{4x-x^2}\in[0,2]$

$\therefore y\in[-23,1]$

210、函数 f(x)的定义域为［0，1］，求函数 f(x-a)+f(x+a)(　$0<a<\dfrac{1}{2}$)的定义域

解：$\begin{cases}0\le x-a\le 1\\0\le x+a\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le x\le 1+a\\-a\le x\le 1-a\end{cases}$

由于$0<a<\dfrac{1}{2}$

因些　$a\le x\le 1-a$

212、函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 的对称中心，对称轴怎样求？谢谢！

解： $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1+\dfrac{-1}{x+1}$

它的图象是由 $y=\dfrac{-1}{x}$ 的图象左移 1 个单位，再上移 1 个单位而得

由于函数 $y=\dfrac{-1}{x}$ 的对称中心是（0，0），因此 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 的对称中心是 $(-1,1)$

215、若 $f(x)=(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}-1)x$ 在 R 上递减，求 a 的范围

解：当 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}-1\neq 0$ 时， $f(x)=(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}-1)x$ 是正比例函数

因为 $f(x)$ 在 R 上递减，因此 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}-1<0$

则 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<1$， $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}>\dfrac{1}{2}$, $\begin{cases} a>0 \\ 4a^2+4>a^2 \end{cases}$, 故 $a>0$，

217、已知二次函数 $y=f_1(x)$ 的图象以原点为顶点且过点（1，1），反比例函数

$y=f_2(x)$ 的图象与直线 y=x 的两个交点间距离为 8， $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，

求证：当 a>3 时，关于 x 的方程 f(x)=f(a)有三个实数解

证明： $f_1(x)=x^2$

$f_2(x)=\dfrac{k}{x}$ 与 $y=x$ 相交故 $k>0$，交点为 $(\sqrt{k},\sqrt{k})$， $(-\sqrt{k},-\sqrt{k})$

则 $\sqrt{8k}=8$， $k=8$， $f_2(x)=\dfrac{8}{x}$, $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$

f(x)=f(a)就是 $x^2+\dfrac{8}{x}=a^2+\dfrac{8}{a}$,化为（ $x-a$ ）(ax^2+a^2x-8)=0

$x=a$ 或 ax^2+a^2x-8=0（1）

二次方程的判别式 $\Delta=a^4+32a>0$ （ $a>3$ ）

故（1）有两个不等的实根，

把 $x=a$ 代入（1）的左边得 $ax^2+a^2x-8=2a^3-8>0$

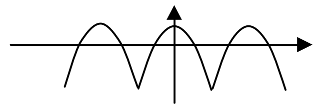
因此原方程有三个不同的根

219、设 f(x)是 R 上的偶函数，并且图像关于 x=2 对称，已知 x Î **[** -*2*,*2* **]**时，

f(x)= $-x^2+1$。求 $x\in[-6，-2]$时，f(x)的解析试

解：因为 f(x)的图象关于直线 x=0 对称，也关于直线 x=2 对称

故 $f(x)=f(-x)=f[4-(-x)]=f(4+x)$



设 $x\in[-6，-2]$则 $x+4\in[-2，2]$，则

$f(x)=f(4+x)$ ＝ $-(x+4)^2+1$

238、若函数 f(x)=$\sqrt{1+3^x a}$ 的定义域为(-∞,1]，求实数 a 的取值范围

解：依题意：不等式$1+3^x a\geq 0$的解集为（$-\infty$,1]，

(1) 当 a=0 时不等式为 1≥0 解集为 R,不合

（2）当 a>0 时，不等式$1+3^x a\geq 0$解集为 R,不合

(3) 当 a<0 时，不等式$1+3^x a\geq 0$，$3^x a\geq -1, 3^x\leq -\dfrac{1}{a}$

$x<\log_3(-\dfrac{1}{a})$ 与（$-\infty$,1] 对照得 应有 $\log_3(-\dfrac{1}{a})=1$，故 $a=-\dfrac{1}{3}$

339、求函数 $y=\mathbf{lg}(a^x-2\cdot 3^x)$ (a>0,且 a≠1)的定义域.

解：$a^x-2\bullet 3^x>0$

$a^x>2\bullet 3^x$，$(\dfrac{a}{3})^x>2$

(1)当 $a>3$ 时定义域为 $(\log_{\frac{a}{3}}2,+\infty)$

(2)当 $0<a<3$ 时，定义域为 $(-\infty,\log_{\frac{a}{3}}2)$

260、计算：$\lg 25+\dfrac{2}{3}\lg 8+\lg 5\lg 20+\lg^2 2$

解：原式＝ $2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(\lg 5+2\lg 2)+\lg^2 2$

＝ $2(\lg 5+\lg 2)+(\lg^2 5+2\lg 5\lg 2+\lg^2 2)=2+1=3$

此题方法很多

262、函数 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 的值域为

解：定义域 $x\geq 0$

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

此函数在 $[0,+\infty)$ 上递减

当 $x=0$ 时， $y=1$,当 $x\to+\infty$ 时， $y\to 0$,值域为 $(0,1]$

268、 $f(2x-1)=4x^2-8x+9$　求 f(x)

解法 1：配凑法

$$f(2x-1)=4x^2-8x+9=(2x-1)^2-4x+8=(2x-1)^2-2(2x-1)+6$$

所以 $f(x)=x^2-2x+6$

解法 2：换元法

在 $f(2x-1)=4x^2-8x+9$ 中

设 $t=2x-1$,则 $x=\dfrac{t+1}{2}$

则 $f(2x-1)=4x^2-8x+9$ 就变成了

$$f(t)=4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2-8\left(\frac{t+1}{2}\right)+9=t^2-2t+6$$

所以 $f(x)=x^2-2x+6$

273、若函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+b}$ 的对称中心是(-2,1) 则 a+b=__

解： $y=\dfrac{ax-1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab-1}{x+b}=a+\dfrac{-ab-1}{x+b}$

对称中心为 $(-b,a)$ 与(-2,1)相同

故 $b=2,a=1$， $a+b=3$

274、定义在（-∞，+∞）上任意函数 f(x)都可以表示成一个奇函数 g(x)与一个偶函数 h(x)之和。

如果 f(x)=2^x，那么$[h(n)]^2-[g(n)]^2$ =____________

解：设 g(x)+h(x)＝2^x（1）

则 g(-x)+h(-x)＝2^{-x}　即 h(x) -g(x) ＝2^{-x}（2）

由（1）×（2）得

$[h(x)]^2-[g(x)]^2=1$

275、设 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，那么 f(1/11)+f(2/11)+f(3/11)+…..+f(10/11)的值为______

解： $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$

则 $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4}{4+2\bullet 4^x}=\frac{2}{4^x+2}$

故 $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$

由此得 f(1/11)+f(2/11)+f(3/11)+…..+f(10/11)=5

296、已知 f（x）是定义在 R 上的函数，满足 f（x+1）= —f（x）

（1）证明：f（x）是周期函数，并求一个周期 （T=2 ，已求好）

（2）当 x∈[0，1）时，f（x）=x ，求在 [—1，0）上的解析式

（3）对于(2)中的函数 f(x),方程 f（x）= ax 有 100 个根，求 a 的取值范围。

解：（1）f（x+2）= f[（x+1）+1]＝-f（x+1）= -[-f（x）]= f（x）

故 f（x）以 2 为周期

（2）设 x∈[—1，0）则 x+1∈[0，1）

则 f（x+1）=x+1,而 f（x+1）= —f（x）

故—f（x）=x+1，即 f（x）= -x-1

（3）作出 f（x）与 y= ax 的图象

由图象分别让 y= ax 过点（100，1）和点（-101，-1）

得 $a=\frac{1}{100}$ 和 $a=\frac{1}{101}$,故 $\frac{1}{101}<a\le\frac{1}{100}$

由图象分别让 y= ax 过点（101，-1）和点（-100，1）

得 $a=-\frac{1}{101}$ 和 $a=-\frac{1}{100}$

故 $-\frac{1}{100}\le a<-\frac{1}{101}$

综上 $\frac{1}{101}<a\le\frac{1}{100}$ 或 $-\frac{1}{100}\le a<-\frac{1}{101}$

300、设 f(x)为偶函数，g(x)是奇函数，且 f(x)+g(x)=1/(x-1)，求 f(x)和 g(x)的表达式

解： $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$ (1)， 故 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$

即 $f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}$ (2)

(1)+(2)得 $2f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$,(1)-(2)得 $2g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$

故 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$， $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

351、已知$1<x<d$，$a=(\log_d x)^2$，$b=\log_d x^2$，$c=\log_d(\log_d x)$

比较a, b, c的大小

解：由$1<x<d$得$0<\log_d x<1$，$c=\log_d(\log_d x)<0$

因$a-b=(\log_d x)^2-2\log_d x=(\log_d x)(\log_d x-2)<0$

故$0<a<b$，综上$c<a<b$

348、若 R 上的奇函数 f(x)在（-∞，0）上是减函数，且α+β>0，α+γ>0，β+γ>0，则 f(α)+f(β)与 f(-γ)的大小关系是______________

解：因 R 上的奇函数 f(x)在（-∞，0）上是减函数

故 f(x)在 R 上是减函数

因α+β>0，α+γ>0，β+γ>0

故α>-β，γ>-α，β>-γ

f(α)>f(-β)，f(γ)>f(-α)，f(β)>f(-γ)，

f(α)> -f(β)，f(γ)> -f(α)，f(β)> -f(γ)

f(α)+ f(β)+ f(γ) >-f(α)-f(β)-f(γ)

2f(α)+ 2f(β) >-2f(γ)

f(α)+f(β) >-f(γ)

f(α)+f(β) >f(-γ)

357、已知$af(x^n)+f(-x^n)=bx$其中 a 不等于 1，n 为奇数，求 f(x)

能用这个题来具体说说换元法吗

答：求函数解析式的方法很多换元法只是其中一种

先看一个更简单的例子已知 f(x+4)=2x+3,求 f(x)

解法 1：配凑法

因为 f(x+4)=2x+3＝2（x+4）-5 所以 f(x)=2x-5

解法 2：代入法

令 x=t-4 代入 f(x+4)=2x+3 得 f(t)=2(t-4)+3=2t-5

所以 f(x)=2x-5

解法 3：换元法

设 t＝x+4,则 x=t-4 代入 f(x+4)=2x+3 得 f(t)=2(t-4)+3=2t-5

所以 f(x)=2x-5

我们的目的是求出 f(x)，如果可以知首 f(q)=5q+6,自然就有 f(x)=5x+6

懂了吗？

原题解答：因$af(x^n)+f(-x^n)=bx$①, n 为奇数

故$af(-x^n)+f(x^n)=-bx$②　(让上式的x换成$-x$)

由①×a-②得

$$(a^2-1)f(x^n)=(ab+b)x,\ a\neq 1,\ f(x^n)=\frac{bx}{a-1},\ f(x)=\frac{b\sqrt[n]{x}}{a-1}$$

360、已知 F(x)图象关于(2,1)对称又关于直线 x=5 对称,求证 F(x)为周期函数,并求周期

解： F(x)图象关于(2,1)，又直线 x=5 对称

故 F(x)=2- F(4- x)，F(x)= F(10- x)

故 F(x)=2- F(4- x)= 2 -F(10-4+ x)=2- F(6+ x)

=2-[2- F(4-6- x)]= F(-2-x)= F(10+2+ x)= F(x+12)

故 F(x)=F(x +12) 周期=12

386、已知 f(x)在 R 内单增, a,b 属于 R.求证:求证:a+b≥0 是 f(a)+f(b)≥f(-a)+f(-b)的充要条件"

充分性:若 a+b≥0 则 a≥-b b≥-a

故 f(a)≥f(-b) f(b)≥f(-a) f(a)+f(b)≥f(-a)+f(-b)

必要性 若 f(a)+f(b)≥f(-a)+f(-b)

假设 a+b<0

可得 f(a)+f(b)≤f(-a)+f(-b)题设是矛盾

假设错误， 故 a≥-b

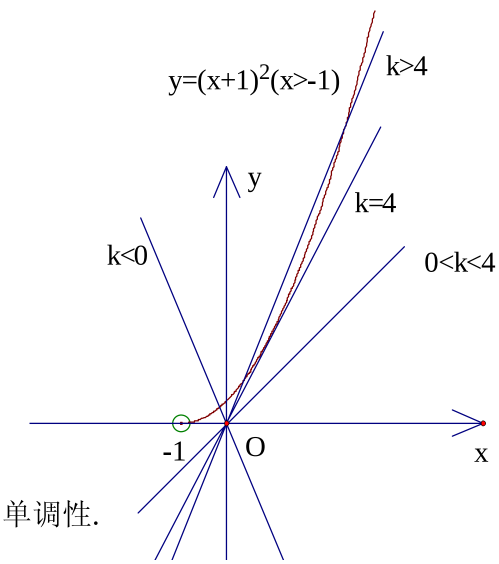
417、$\frac{1}{2}\lg(kx)=\lg(x+1)$有且仅有一实根，则实数 k 属于( )?

解：方程$\frac{1}{2}\lg(kx)=\lg(x+1)$等价于

$$\begin{cases}kx=(x+1)^2\\x+1>0\end{cases}$$

作出函数 $f(x)=(x+1)^2$（$x>-1$）

与 $g(x)=kx$的图象



由图象得

当$k=4$或$k<0$时原方程仅有一个实数根

418、已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$且 $x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}=x_1-x_2+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$$

（1）当 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$时，则 $x_1-x_2<0$， $x_1x_2-1>0$， $x_1x_2>0$

因此 $f(x_1)-f(x_2)<0$， $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在$(1,+\infty)$上是增函数

（2）当 $x_1,x_2\in(0,1)$时，则 $x_1-x_2<0$， $x_1x_2-1<0$， $x_1x_2>0$

因此 $f(x_1)-f(x_2)>0$， $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在$(0,1)$上是减函数

（3）同理可得所以 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$上是增函数，在$(-1,0)$上是减函数

426、若函数 $y=\dfrac{1}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 R，求实数 k 的取值范围.

解：$kx^2+4kx+3\neq 0$ 的解集为 R $kx^2+4kx+3\neq 0$

(1)当 $k=0$ 时，$kx^2+4kx+3\neq 0$ 就是 $3\neq 0$，解集为 R

（2）当 $k\neq 0$ 时，$\Delta=16k^2-12k<0\Rightarrow 0<k<\dfrac{3}{4}$

综上 $0\leq k<\dfrac{3}{4}$

450、求函数 $y=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$ 的值域

解：$y=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$，$yx^2-5xy+6y=x^2-2x-1$

$(y-1)x^2+(2-5y)x+6y+1=0$

当 $y=1$ 时，$-3x+7=0$ 有解，适合

当 $y\neq 1$ 时，$\Delta=(2-5y)^2-4(y-1)(6y+1)\geq 0$

$y^2+8\geq 0$，$y\in R$,综上 $y\in R$

451、判断 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $[0,+¥)$ 上的单调性,并加以证明(函数)

解：设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1{}^2+1}-\frac{x_2}{x_2{}^2+1}=\frac{x_1x_2{}^2+x_1-x_1{}^2x_2-x_2}{(x_1{}^2+1)x_2{}^2+1}$$

$$=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)+x_1-x_2}{(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)}$$

当 $0<x_1<x_2<1$ 时 $x_1x_2-1<0$，$x_2-x_1>0$，$f(x_1)-f(x_2)<0$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数

当 $1<x_1<x_2$ 时 $x_1x_2-1>0$，$x_2-x_1>0$ 同，$f(x_1)-f(x_2)<0$

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数

452、设函数 f(x)为 R 上的增函数, $F(x) = f(x) - f(2-x)$

求证: $F(x)$ 在 R 上为增函数. (函数) (好题)

证明：设 $x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 < x_2$， $2-x_1 > 2-x_2$

因 f(x)为 R 上的增函数故 $f(x_1) < f(x_2)$， $f(2-x_1) > f(2-x_2)$

于是 $-f(2-x_1) < -f(2-x_2)$

因此 $f(x_1) - f(2-x_1) < f(x_2) - f(2-x_2)$

即 $F(x_1) < F(x_2)$,故 F(x)在 R 上为增函数

456、若 f(x+y)+f(x-y)= f(x)f(y)恒成立, 证明：f(x)是偶函数(函数)

证明：在 f(x+y)+f(x-y)= f(x)f(y)中令 $y=0$

得 2f(x)= f(x)f(0)， 故 f(x)＝0 或 f(0)=2
当 f(x)＝0 时，f(x)显然是是偶函数

当 f(0)=2 时，在 f(x+y)+f(x-y)= f(x)f(y)中令 $x=0, y=x$ 得

f(x)+f(-x)= f(0)f(x)＝2f(x)
故 f(-x)= f(x)，f(x)也是偶函数,综上，f(x)是偶函数

485、已知 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ (a,b 为常数). (函数)

(1)当 $a>0, b>0$ 且 $a \neq b$ 时,求 f(x)的定义域;

(2)当 $a>1>b>0$ 时,判断 f(x)在定义域内的单调性,并用定义加以证明;
(3)当 $a>1>b>0$ 时,f(x)恰在(1,+∞)上恒取正值,求 a、b 应满足的条件.

解： （1）由 $a^x - b^x > 0$， $(\frac{a}{b})^x > 1$

当 $a>b>0$ 时 $x>0$， 当 $0<a<b$ 时 $x<0$

（2）设 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$， 且 $x_1 < x_2$

因 $a>1>b>0$

$1 < a^{x_1} < a^{x_2}$， $1 > b^{x_1} > b^{x_2} > 0$

则 $-1 < -b^{x_1} < -b^{x_2}$ 于是 $0 < a^{x_1} - b^{x_1} < a^{x_2} - b^{x_2}$

所以 $\lg(a^{x_1} - b^{x_1}) < \lg(a^{x_2} - b^{x_2})$， 即 $f(x_1) < f(x_2)$

因此 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数

（3） $f(x)$ 恰在 $(1,+\infty)$ 取正值,故 $f(1) = \lg(a-b) = 0$ 故 $a-b=1$

486、设 y=f(x)在(-∞,+∞)上为单调函数,试证方程 f(x)=0 在(-∞,+∞)上至多有一个实根. (函数)

证明：假设方程 f(x)=0 在(-∞,+∞)有两个不同的实根 x_1， x_2，

则 f(x_1)=0，f(x_1)=0，故 f(x_1)=f(x_1)

这与 y=f(x)在(-∞,+∞)上为单调函数矛盾
因此，方程 f(x)=0 在(-∞,+∞)上至多有一个实根.

510、设 $a=\lg\frac{8}{7}$，$b=\lg\frac{50}{7}$，用 a,b 表示 $\lg 2,\lg 7$ (对数运算)

解：$a=\lg\frac{8}{7}=3\lg 2-\lg 7$（1）

$b=\lg\frac{50}{7}=\lg\frac{100}{7\times 2}=2-\lg 7-\lg 2$（2）

（1）-（2）得

$a-b=4\lg 2-2$

$\lg 2=\frac{a-b+2}{4}$ 代入（1）得

$\lg 7=3\lg 2-a=\frac{3(a-b+2)}{4}-a=\frac{6-a-3b}{4}$

511、若 f(x)为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 f(-3)=0,则 xf(x)<0 的解集为

__________ (函数不等式)

解 1：因为 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，f(-3)=0,

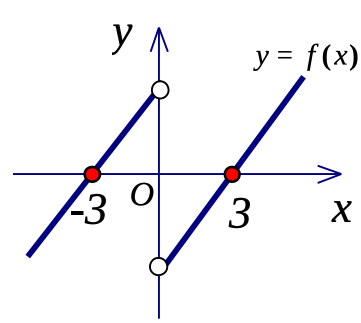
所以 $f(3)=-f(-3)=0$，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数

不等式 xf(x)<0 化为

$\begin{cases} x>0 \\ f(x)<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ f(x)>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ f(x)<f(3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ f(x)>f(-3) \end{cases}$

$0<x<3$ 或 $-3<x<0$



解 2、几何法，作 $y=f(x)$ 的图象

分四段 $x>,0<x<3,-3<x<0,x<-3$ 看 $f(x)$ 图象

知两段 $0<x<3$,$-3<x<0$ 有 $xf(x)<0$，于是解集是 $(0,3)\cup(-3,0)$

517、若函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}(x \hat{I} R)$ 的值域为[-1，4]，求 a,b(函数方程)

解： $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}, yx^2+y=ax+b$

$yx^2-ax+y-b=0$

$\Delta=a^2-4y(y-b)=-4y^2+4by+a^2\geq 0$

$4y^2-4by-a^2\leq 0$

解集为[-1，4]故

-1+4=b, -1×4= $-\dfrac{a^2}{4}$

故 $a=\pm 4, b=3$

522、已知 $x+x^{-1}=3$,求下列各式的值

（1）$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$　　（2）$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$(指数运算)

解：（1）$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=5$，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

（2）$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}-1)=2\sqrt{5}$

531、下面三个对应（z 为整数集）

（1）Z 中元素 $x\to 2x$　（2）Z 中元素 $x\to\sqrt{x}$；

（3）Z 中元素 $x\to x^2-1$，其中是 Z 到 Z 的映射的有（　　）

A；0 个；B；1 个；C；2 个 D；3 个(集合映射)

解：（1）Z 中元素 $x\to 2x$，设 $x\in z$ 则 $2x\in z$ 故是 Z 到 Z 的映射

（2）Z 中元素 $x\to\sqrt{x}$　因 $3\in z$ 但 $\sqrt{3}\notin z$ 故不是 Z 到 Z 的映射

（3）Z 中元素 $x\to x^2-1$，设 $x\in z$ 则 $x^2-1\in z$ 故是 Z 到 Z 的映射

故选 C

554、若 f(x)是定义在(0,+∞)上的增函数,且对一切 x>0,满足 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

①求 f(1)的值　②若 f(6)=1,解不等式 f(x-3)-f(1/x)<2(函数不等式)

解:(1)在 $f(\frac{x}{y})$=f(x)-f(y)中令 x=y 得 f(1)=0

(2)f(6)=1,解不等式 $f(x-3)-f(\frac{1}{x})<2$

f[x(x-3)] < f(6)+ f(6), f[x(x-3)]- f(6) < f(6)

$f(\frac{x(x-3)}{6})<f(6)$,又 f(x)是定义在(0,+∞)上的增函数

故 $\frac{x(x-3)}{6}<6$,且 $x>3$,解得 $3<x<\frac{3+3\sqrt{17}}{2}$

558、函数 f (x)= -9x^2-6ax+2a-a^2 在区间 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 上的最大值为 -3 ,求实数 a 的值

解:f (x)= -9x^2-6ax+2a-a^2=-9(x+$\frac{1}{3}$a)^2+2a,对称轴 $x=-\frac{1}{3}a$

(1)当 $-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}a\le\frac{1}{3}$ 即 $-1\le a\le1$ 时,

f (x)最大=2a=-3,解得 $a=-\frac{3}{2}\notin[-1,1]$,舍去

(2)当 $-\frac{1}{3}a\ge\frac{1}{3}$ 即 $a\le-1$ 时,

f (x)最大= $f(\frac{1}{3})=-a^2-1=-3$,解得 $a=\pm\sqrt{2}$,此时 $a=-\sqrt{2}$

(3)当 $-\frac{1}{3}a\le-\frac{1}{3}$ 即 $a\ge1$ 时,

f (x)最大= $f(-\frac{1}{3})=-a^2+4a-1=-3$,解得 $a=2\pm\sqrt{6}$,此时 $a=2+\sqrt{6}$

综上, $a=-\sqrt{2}$ 或 $a=2+\sqrt{6}$

书写 2:f (x)= -9x^2-6ax+2a-a^2

开口向下,顶点 $(-\frac{1}{3}a,2a)$,左端点 $(-\frac{1}{3}a,-a^2+4a-1)$,右端点 $(\frac{1}{3}a,-a^2-1)$

(1)当 $-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}a\le\frac{1}{3}$ 即 $-1\le a\le1$ 时,

f (x)最大=2a=-3,解得 $a=-\frac{3}{2}\notin[-1,1]$,舍去

(2)当 $-\frac{1}{3}a\ge\frac{1}{3}$ 即 $a\le-1$ 时,

f (x)最大= $-a^2-1=-3$,解得 $a=\pm\sqrt{2}$,此时 $a=-\sqrt{2}$

(3)当 $-\frac{1}{3}a\le-\frac{1}{3}$ 即 $a\ge1$ 时,

f (x)最大= $-a^2+4a-1=-3$,解得 $a=2\pm\sqrt{6}$,此时 $a=2+\sqrt{6}$

综上, $a=-\sqrt{2}$ 或 $a=2+\sqrt{6}$

559、奇函数 $f(x)$ 在定义域$(-1,1)$上是减函数，又 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$, 求实数 a 的取值范围。(函数不等式)

解：不等式 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 就是

$f(1-a)<-f(1-a^2)$

因为 f（X）是奇函数，于是

$f(1-a)<f(a^2-1)$

f（X）在定义域$(-1,1)$上是减函数

因此，$\begin{cases}1-a>a^2-1\\-1<1-a<1\\-1<a^2-1<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<a<1\\0<a<2\\0<a^2<2\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<1$

561、研究函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x+b}$ 的单调性(函数)

解：当 $a=0$ 时 $f(x)=x$（$x\neq -b$）

于是 $f(x)$在 $(-\infty,-b)$ 和 $(-b,+\infty)$ 上都是增函数

下面研究 $a\neq 0$ 时的情况，我们先研究 $g(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的单调性

设 $x_1<x_2$，则 $g(x_1)-g(x_2)=x_1+\dfrac{a}{x_1}-x_2-\dfrac{a}{x_2}$

$$=x_1-x_2+\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\frac{a(x_1-x_2)(x_1x_2-\frac{1}{a})}{x_1x_2}$$

（1）当 $a>0$ 时

①当 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}<x_1<x_2$ 时，$a>0$ $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-\dfrac{1}{a}>0$，$x_1x_2>0$，

于是 $g(x_1)-g(x_2)<0$，$g(x_1)<g(x_2)$

$g(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 在 $(\dfrac{1}{\sqrt{a}},+\infty)$ 上是增函数

②当 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 时，$a>0$ $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-\dfrac{1}{a}<0$，$x_1x_2>0$

于是 $g(x_1)-g(x_2)<0$，$g(x_1)<g(x_2)$，$g(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 上是减函数

③同理 $g(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 在 $(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 上是增函数，在 $(-\dfrac{1}{\sqrt{a}},0)$ 上是减函数

（注也可由 g(x)= $x+\frac{a}{x}$ 是奇函数得出）

（2）当 $a<0$ 时，

①当 $0<x_1<x_2$ 时， $a<0$ $x_1-x_2<0$， $x_1x_2-\frac{1}{a}>0$， $x_1x_2>0$，

于是 $g(x_1)-g(x_2)<0$， $g(x_1)<g(x_2)$

g(x)= $x+\frac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

②当 $x_1<x_2<0$ 时， $a<0$ $x_1-x_2<0$， $x_1x_2-\frac{1}{a}>0$， $x_1x_2>0$，

于是 $g(x_1)-g(x_2)<0$， $g(x_1)<g(x_2)$

g(x)= $x+\frac{a}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数

由于 f(x)= $x+\frac{a}{x+b}$ 是由 g(x)= $x+\frac{a}{x}$ 的图象横向平移而得

综上

1° 当 $a>0$ 时,在 $(\frac{1}{\sqrt{a}}-b,+\infty)$ 和 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{a}}-b)$ 上是增函数

在 $(-b,\frac{1}{\sqrt{a}}-b)$ 和 $(-\frac{1}{\sqrt{a}}-b,-b)$ 上是减函数

2° 当 $a<0$ 时

f(x)= $x+\frac{a}{x+b}$ 在 $(-b,+\infty)$ 和 $(-\infty,-b)$ 上都是增函数

3° 当 $a=0$ 时,在 $(-\infty,-b)$ 和 $(-b,+\infty)$ 上都是增函数

562、已知函数 f(x)，x∈R，满足

①f(1+x)=f(1-x),②在[1,+∞）上为增函数，③$x_1<0,x_2>0$ 且 $x_1+x_2<-2$,

试比较 $f(-x_1)$与 $f(-x_2)$的大小关系(函数不等式)

解：由 f(1+x)=f(1-x)得 f(x)的图象关于直线 $x=1$对称

由 $x_1+x_2<-2$，得 $-x_1>2+x_2$，

因为 $x_2>0$，所以 $-x_1>2+x_2>2$，

因为[1,+∞上为增函数，所以 $f(-x_1)>f(2+x_2)$

因为 f(x)的图象关于直线 $x=1$对称，所以 $f(2+x_2)=f(-x_2)$

于是 $f(-x_1)>f(-x_2)$

563、 (2)既是及函数又是偶函数的函数有且只有几个？ (函数)
答：有无数个。它可以是 f(x)=0（$-2<x<2$），也可以是 f(x)=0（$-1<x<1$）
定义域不同是不同的函数

585、指数函数 $y=a^x$ a>0

幂函数 $y=x^a$ x 可以小于零

为什么同属于底数，范围却不一样呢？(函数)

答：

(1)指数函数的定义：在函数 $y=a^x$ 中，指数 x 是自变量，底数 a 是常数，

当 a>0 且 a≠1 时，这个函数叫做指数函数

因此，指数函数 $y=a^x$ （a>0 且 a≠1）的底数 a>0 且 a≠1 是这个函数

称做指数函数的一种规定。如果 a 为负数，例如 $y=(-2)^x$ 就不是指数

函数了。

(2)幂函数的定义：在函数 $y=x^a$ 中，底数 x 是自变量，指数 a 是常数，

当 a 为实数时，这个函数叫做幂数函数

例如 $y=x^3$ 就是一个幂函数，自变量 x 的取值只要使式子有意义就行

当然这里的底数 x 可以取负数

586、 $f(x)=\log_a[x^2+2(a-1)x+2]$（a>0 且 a≠1）在 $x<-4$ 上是减函数，

求 a 的范围(函数)

解：$\begin{cases} a>1 \\ -\dfrac{2(a-1)}{2}\geq -4 \\ (-4)^2+2(a-1)(-4)+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a\leq 5 \\ a\leq \dfrac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1<a\leq \dfrac{13}{4}$

590、求函数的单调区间，并指出其单调性

f(x)= $\log_a(4+3x-x^2)$ (a>0 且 a≠1) (函数)

讲解：

1、引入

由 $4+3x-x^2>0$ 解得，函数定义域为 $(-1,4)$

设 $t=4+3x-x^2$，则 $y=\log_a t$

f(x)= $\log_a(4+3x-x^2)$ 叫做函数 $t=4+3x-x^2$ 与 $y=\log_a t$ 的复合函数

其中 $t=4+3x-x^2$ 叫内函数，$y=\log_a t$ 叫外函数

2、复合函数的单调性的判定：

（1）若内外函数同增同减，则复合函数为增

（2）若内外函数一增一减，则复合函数为减

3、验证上面个判定方法

例如；

（1）内函数 $t=x+1$，外函数为 $y=2^t$，复合函数为 $y=2^{x+1}$

内外函数同增，复合函数增

（2）内函数 $t=-x+1$，外函数为 $y=(\frac{1}{2})^t$，复合函数为 $y=(\frac{1}{2})^{-x+1}=2^{x-1}$

内外函数同减，复合函数增

（3）内函数 $t=x+1$，外函数为 $y=(\frac{1}{2})^t$，复合函数为 $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$

内增外减，复合函数减

（4）内函数 $t=-x+1$，外函数为 $y=2^t$，复合函数为 $y=2^{-x+1}=(\frac{1}{2})^{x-1}$

内减外增，复合函数减

4、口决：同增同减复合增，一增一减复合减

（只要学生认可了两层复合的情况，学生就自然能够理解多层复合的情形）

5、回到原题

求 f(x)= $\log_a(4+3x-x^2)$ (a>0 且 a≠1)的单调区间并指出其单调性

解：由 $4+3x-x^2>0$，解得函数定义域为 $(-1,4)$

设 $t=4+3x-x^2$，则 $y=\log_a t$

由于 $t=4+3x-x^2$ 的对称轴是 $x=\frac{3}{2}$

因此 $t=4+3x-x^2$ 在 $(-1,\frac{3}{2})$ 上递增，在 $(\frac{3}{2},4)$ 上递减

（1）当 $a>1$ 时，$y=\log_a t$ 递增

因此此时，f(x)= $\log_a(4+3x-x^2)$ 在 $(-1,\frac{3}{2})$ 上递增，在 $(\frac{3}{2},4)$ 上递减

（2）当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a t$ 递减

因此此时，f(x)= $\log_a(4+3x-x^2)$ 在 $(-1,\frac{3}{2})$ 上递减，在 $(\frac{3}{2},4)$ 上递增

604、若 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，求 f(1/1001)+f(2/1001)+f(3/1001)+⋯+f(1000/1001)

(函数) (数列) (竞赛)

分析：在 f(1/1001)+ f(1000/1001)中有 $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1000}{1001}=1$，于是看

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\frac{a}{a^x}}{\frac{a}{a^x}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a}{a+a^x\sqrt{a}}=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}=\frac{a^x+\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}=1$$

于是 f(1/1001)+f(2/1001)+f(3/1001)+…+f(1000/1001)＝500

622、 $f(x^6)=\log_2 x$,求 $f(8)$ (函数)

解： $f(8)=f[(\sqrt{2})^6]=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$

633、求下列函数的值域：

（1） $y=|x|\sqrt{1-x^2}$

（2） $y=(e^x-a)^2+(e^{-x}+a)^2,(0<a<2)$ (函数)

解:（1） $y=|x|\sqrt{1-x^2}=\ y=\sqrt{x^2(1-x^2)}=\sqrt{-x^4+x^2}=\sqrt{-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$

因 $x^2\in[0,1]$ 故 $-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\in[0,\frac{1}{4}]$， $y=\in[0,\frac{1}{2}]$

（2）设 $t=e^x\in(0,+\infty)$ 则 $y=(t-a)^2+(\frac{1}{t}+a)^2$

$y=t^2-2at+\frac{1}{t^2}+\frac{2a}{t}=t^2-2at+\frac{1}{t^2}+\frac{2a}{t}==t^2+\frac{1}{t^2}-2a(t-\frac{1}{t})$

$u=t-\frac{1}{t}\in R,t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$

$y=u^2+2-2au=(u-a)^2+2-a^2\geq 2-a^2$

656、若关于 x 的方程 $25^{-|x+1|}-4\times 5^{-|x+1|}-m=0$ 有实根，求 m 的范围。

解： $m=25^{-|x+1|}-4\times 5^{-|x+1|}$

设 $t=(\frac{1}{5})^{|x+1|}\in(0,1]$

$m=t^2-4t=(t-2)^2-4\in[-3,0)$

657、已知 f(x)=|1g x|,若当 0<a<b<c 时，f(a)>f(c)>f(b)，试证：0<ac<1.

(函数)（排除推理题）

证明：若 $0<a<b<c\le 1$ 则

$\lg a<\lg b<\lg c\le 0$

于是 $|\lg a|>|\lg b|>|\lg c|$ 即 $f(a)>f(b)>f(c)$ 与题设不符

若 $1\le a<b<c$

$0\le \lg a<\lg b<\lg c$

于是 $|\lg a|<|\lg b|<|\lg c|$ 即 $f(a)<f(b)<f(c)$ 与题设不符

因此必有 $0<a\le 1, c\ge 1$

由 $f(a)>f(c)$ 得 $|\lg a|>|\lg c|$

即 $-\lg a>\lg c>0$

$0>\lg a+\lg c>\lg a$

$\lg 1>\lg ac>\lg a$

$\lg 1>\lg ac>\lg a$，$1>ac>a>0$

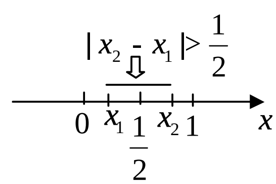
661、函数 f(x)在[0,1]上有定义，f(0)=f(1)，

如果对于任意不同的 $x_1, x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，

求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$ (函数) (推理).

证明：若 $|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$ 则 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$

若 $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$，不妨设 $x_1<x_2$



则 $|x_1|+|1-x_2|<\frac{1}{2}$ (见左图)

因 f(0)=f(1)

故 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|$

$\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|<|x_2-1|+|0-x_1|=|x_1|+|1-x_2|<\frac{1}{2}$

671、已知 f(x)＝$\log_2 x$，当点 M(x，y)在函数 y＝f(x)的图象上运动时，

点 N(x－2，ny)在函数 y＝$q_n(x)$的图象上运动(n∈N)

①求 y＝$q_n(x)$的表达式.

②设 $H_n(x)=\frac{1}{2}q_n(x)$ ；$F(x)=H_1(x)-q_1(x)$，求 F(x)的表达式，判断其单调性，并给予证明

③求集合 A＝｛a丨使方程 $q_1(x)=q_2(x-2+a)$有实数根，a∈R｝(函数) (不等式)

解：（1）x'=x－2，y' =ny

则 x＝x'+2，y＝$\frac{y'}{n}$代入 y＝$\log_2 x$ 得

$\frac{y'}{n}=\log_2(x'+2)$，$y'=n\log_2(x'+2)$，故 $q_n(x)=n\log_2(x+2)$

（2） $H_n(x)=\frac{1}{2}q_n(x)=\frac{n}{2}\log_2(x+2)$，

$F(x)=H_1(x)-q_1(x)=\frac{1}{2}\log_2(x+2)-\log_2(x+2)=-\frac{1}{2}\log_2(x+2)$

设 $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$， $x_1<x_2$ 则 $F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{2}\log_2(x_2+2)-\frac{1}{2}\log_2(x_1+2)$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{x_2+2}{x_1+2}$，因 $-2<x_1<x_2$ 故 $\frac{x_2+2}{x_1+2}>1$， $\frac{1}{2}\log_2\frac{x_2+2}{x_1+2}>0$

故 $F(x_1)>F(x_2)$，所以 $F(x)$在 $(-2,+\infty)$ 上递减

③$q_1(x)=q_2(x-2+a)$就是 $\log_2(x+2)=2\log_2(x+a)$

此方程等价于 $\sqrt{x+2}=x+a$ （$x>-2$）

利用图象得方程有实数根的充要条件是 $a\le\frac{5}{4}$

679、讨论 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$ 的定义域，值域，单调性(函数)

解：(1)定义域

因 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}$

故 $10^{2x}\ne1$， $x\ne0$

(2)值域

求法 1， $y=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}=\frac{10^{2x}-1+2}{10^{2x}-1}=1+\frac{2}{10^{2x}-1}$

因 $10^{2x}>0$ 且 $10^{2x}\ne1$，于是因 $10^{2x}-1>-1$，当然要 $10^{2x}-1\ne0$

故 $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

求法 2， $y=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}\Rightarrow10^{2x}=\frac{y+1}{y-1}>0\Rightarrow y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$y'=(1+\frac{2}{10^{2x}-1})'=(\frac{2}{10^{2x}-1})'=-2(10^{2x}-1)^{-2}(10^{2x}-1)'$$

$$=-2(10^{2x}-1)^{-2}\bullet10^{2x}\ln10\bullet(2x)'=-4(10^{2x}-1)^{-2}\bullet10^{2x}\ln10\le0$$

于是，此函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是减函数

698、已知 $x+x^{-1}=3$,，求 $x^2 - x^{-2}$ 以及 $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$ (方程)

解：已知求下列各式的值

（1）　（2）$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$

解：（1）$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=9$，$x^2+x^{-2}=7$，

$(x^2+x^{-2})^2=x^4+x^{-4}+2=81$，$x^4+x^{-4}=79$，

$(x^2-x^{-2})^2=x^4+x^{-4}-2=79-2=77$，$x^2-x^{-2}=\pm\sqrt{77}$

（2）$x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}+1)=4(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+\frac{1}{x}-2=1$，$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\pm 1$

720、f(x)=a|x-b|+2 在[0,+∞)上为增，求 a,b 取值范围(函数)

解：当 $a\neq 0$ f(x)=a|x-b|+2 的图象是关于直线 $x=b$ 对称的 V 字形，当 $a=0$ 时是一条平行于 y 轴的直线，因此：

（1）当 $b>0$ 时，不论 a 为何值，在[0,+∞)上有增有减，或为常函数

（2）当 $b\leq 0$ 时，

1°　a>0, V 字形开口向上，在[0,+∞)上增

2°　a<0, V 字形开口向下，在[0,+∞)上减

3°　a＝0，常函数

综上 a>0,b≤0，

762、设 x 属于[2，8],函数 $f(x)=\frac{1}{2}\log_a(ax)\log_a(a^2x)$ 的最大值是 1，最小值是 $-\frac{1}{8}$，求 a　(函数)

解：$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(ax)\log_a(a^2x)=\frac{1}{2}(1+\log_a x)(2+\log_a x)$

设 $t=\log_a x$，则 $f(x)=g(t)=\frac{1}{2}(t+1)(t+2)=\frac{1}{2}[(t+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}]$

（1）当 a>1 时，$t=\log_a x\in[\log_a 2,\log_a 8]$，要使 $g(t)$最小＝$-\frac{1}{8}$,$g(t)$最大＝1

就要 $\log_a 8$＝1 且 $-3\leq\log_a 2\leq-\frac{3}{2}$，无解

（2）当 0<a<1 时，$t=\log_a x\in[\log_a 8,\log_a 2]$，要使 $g(t)$最小＝$-\frac{1}{8}$,$g(t)$最大＝1

就要 $\log_a 8$＝-3 且 $-\frac{3}{2}\leq\log_a 2\leq 0$，　解得 $a=\frac{1}{2}$

综上，$a=\frac{1}{2}$

775、已知 $f(x)=x(\frac{1}{2^{x}-1}+\frac{1}{2})$ 判断 F(X) 的奇偶性；当 X 不等于 0 时，求证 $f(x)$>0 恒成立

证明： $f(x)=x(\frac{1}{2^{x}-1}+\frac{1}{2})=x(\frac{2^{x}+1}{2^{x}-1})$

$$f(-x)=-x(\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1})=-x(\frac{1+2^{x}}{1-2^{x}})=x(\frac{2^{x}+1}{2^{x}-1})=f(x)$$

故 $f(x)$ 为偶函数

当 $x>0$ 时 $2^{x}>1$, 于是 $f(x)=x(\frac{2^{x}+1}{2^{x}-1})>0$

776、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若对任意 X，Y 属于 R 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明 $f(x)$ 为奇函数

证明：在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中

令 $y=x=0$ 得 $f(0)=f(0)+f(0)$，故 $f(0)=0$

令 $y=-x$ 得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，即 $f(x)+f(-x)=0$

因此 $f(x)$ 为奇函数

831 、已知 y=f(2x+3)是偶函数，则 y=f(-3x)的对称轴是什么？
我用的特殊函数试的，怎么证明？(函数)
证：y=f(2x+3)于是 f(-2x+3)＝f(2x+3)
故 y=f(x)关于直线 x＝3 对称
于是 f(-3x)也关于直线 x＝3 对称

833、若 $\mathbf{lg}12=a,\mathbf{lg}18=b$，用 a,b 表示 $\mathbf{lg}\,24$

解： $\lg 12=2\lg 2+\lg 3=a$， $\lg 18=2\lg 3+\lg 2=b$

$$\lg 3+\lg 2=\frac{a+b}{3}$$

解得 $\lg 2=a-\frac{a+b}{3}=\frac{2a-b}{3}$， $\lg 3=b-\frac{a+b}{3}=\frac{2b-a}{3}$

$$\lg 24=3\lg 2+\lg 3=\frac{3(2a-b)}{3}+\frac{2b-a}{3}=\frac{5a-b}{3}$$

837、将长为 a 的铁丝折成矩形，将矩形面积 y 表示为矩形一边长 x 的函数，求此函数的定义域和值域？(函数)

$y=x(\frac{a-2x}{2})=x(\frac{a}{2}-x)$

定义域 $(0,\frac{a}{2})$

因 $y=x(\frac{a}{2}-x)$ 对称轴为 $x=\frac{a}{4}\in(0,\frac{a}{2})$，故 $y\in(0,\frac{a^2}{16}]$

841、对任意非负实数 x,不等式 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\le a$ 恒成立，则实数 a 的最小值________.(函数)

解：设 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$f(x)_{\max}=f(0)=1$，于是 $a\ge1$，故 a 的最小值为 1

869、(函数)

f(x)= $\sqrt{-2+\log_x(5x^2-8x+3)}$ 定义域为 A, g(x)= $\sqrt{x^2-2x-a^4+1}$ 定义域为 B，若 A 包含于 B，求 a 的范围？

解：先求 A

$\begin{cases}5x^2-8x+3>0\\-2+\log_x(5x^2-8x+3)\ge0\end{cases}$ $\begin{cases}x<\frac{3}{5}或x>1\\\log_x(5x^2-8x+3)\ge2\end{cases}$，

当 $x>1$ 时，$5x^2-8x+3\ge x^2$，$x\le\frac{1}{2}或x\ge\frac{3}{2}$，此时 $x\ge\frac{3}{2}$

当 $x<\frac{3}{5}$ 时，$5x^2-8x+3\le x^2$，$\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$，此时 $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{5}$

于是 A=$[\frac{1}{2},\frac{3}{5})\cup[\frac{3}{2},+\infty)$

再求 B

$x^2-2x-a^4+1\ge0$，$(x-1)^2\ge a^4$ 解得 $x\le1-a^2或x\ge1+a^2$

于是 B=$(-\infty,1-a^2]\cup[1+a^2,+\infty)$

因为 $A\subseteq B$，所以 $1-a^2\ge\frac{3}{5}且1+a^2\le\frac{3}{2}$，$\frac{2}{5}\le a^2\le\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{5}\le a\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le-\frac{\sqrt{10}}{5}$

870、(函数)

已知$\log_2\log_3\log_4 x=\log_3\log_4\log_2 y=\log_4\log_2\log_3 z=0$

求$x+y+z$

解：$\log_2\log_3\log_4 x=0$，$\log_3\log_4 x=1$，$\log_4 x=3$，$x=4^3=64$

$\log_3\log_4\log_2 y=0$，$\log_4\log_2 y=1$，$\log_2 y=4$，$y=2^4=16$

$\log_4\log_2\log_3 z=0$，$\log_2\log_3 z=1$，$\log_3 z=2$，$z=3^2=9$

于是$x+y+z=89$

877、(函数)

设实数,函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1, x\in R$

(1)讨论,f(x)的奇偶性　(2)求 f(x)的最小值

解：（1）当$a=0$时,函数$f(-x)=f(x)$,此时$f(x)$为偶函数.

当$a\neq 0$时, $f(a)=a^2+1$, $f(-a)=a^2+2|a|+1$,

$f(-a)\neq f(a)$, $f(-a)\neq -f(a)$.此时函数$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数.

（2）1°　当$x\leq a$时,函数$f(x)=x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4}$.

若$a\leq\frac{1}{2}$,则函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上递减，此时$f(x)$最小值＝$f(a)=a^2+1$.

若$a>\frac{1}{2}$，则此时$f(x)$最小值＝$f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}+a$

2°　当$x\geq a$时，函数$f(x)=x^2+x-a+1=(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{3}{4}$.

若$a<-\frac{1}{2}$,则$f(x)$最小值$=f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-a$

若$a\geq-\frac{1}{2}$,则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上递增,此时函数$f(x)$最小值$=f(a)=a^2+1$.

综上

①当$a>\frac{1}{2}$时,因为$(a^2+1)-(\frac{3}{4}+a)=(a-\frac{1}{4})^2>0$，于是,函数$f(x)$的最小值是$a+\frac{3}{4}$.

②当$-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$时,函数$f(x)$的最小值是$a^2+1$.

③当$a<\frac{1}{2}$时,因为$(a^2+1)-(\frac{3}{4}-a)=(a+\frac{1}{4})^2>0$，于是,函数$f(x)$的最小值是$a-\frac{3}{4}$.

884、(函数)

已知 f(x)=$\log_a(x^2-ax+4)$

（1）定义域为 R，求 a （2） 值域为 R，求 a

解：（1）因 f(x)=$\log_a(x^2-ax+4)$ 定义域为 R

故 $x^2-ax+4>0$ 的解集为 R，于是 $\Delta=a^2-16<0$

解得 $-4<a<4$

（2）因 f(x)=$\log_a(x^2-ax+4)$ 值域为 R

故变量 x^2-ax+4 要取到一切正实数

由于 $x^2-ax+4=(x-\frac{a}{2})^2+4-\frac{a^2}{4}$

因此 $4-\frac{a^2}{4}\le 0$ 解得 $a\le -4或a\ge 4$

（注也就是 $\Delta=a^2-16\ge 0$，教学的技巧往往要着眼于小细节）

896、(函数)

已知 $f(1,1)=1,\ f(m,n)\in N_+(m,n\in N_+)$, 且对任何 $m,n\in N_+$ 都有

① $f(m,n+1)=f(m,n)+2$, ② $f(m+1,n)=2f(m,n)$，给出以下三结论：

（1） $f(1,5)=9$ （2） $f(5,1)=16$ （3） $f(5,6)=26$

其中正确的个数是（ ）A、3 B、2 C、1 D、0

解： $f(1,5)=f(1,4)+2=f(1,3)+4=f(1,2)+6=f(1,1)+8=9$

$f(5,1)=2f(4,1)=4f(3,1)=8f(2,1)=16f(1,1)=16$

$f(5,6)=f(5,5)+2=f(5,4)+4=f(5,3)+6=f(5,2)+8=f(5,1)+10=26$

故：A

941、(函数)

(1)对任意的函数 $y = f(x)$，函数 $y = f(x-1)$ 和 $y = f(1-x)$ 的图象(　　)

A、关于 x 轴对称　B、关于 y 轴对称　C、关于 x=1 对称　D、关于 x=-1 对称

(2)若函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(1-x)$，x Î R，则 $y = f(x)$ 的图象(　　)

A、关于 x 轴对称　B、关于 y 轴对称　C、关于 x=1 对称　D、关于 x=-1 对称

解 1：特例法

(1)取 $f(x)=x$，则 $y = f(x-1) = x-1$，$y = f(1-x) = 1-x$ 关于 x=1 对称

(2) 取满足 $f(x-1) = f(1-x)$ 的函数 $y = f(x) = x^2$ 关于 y 轴对称

解 2：论证法

(1) $y = f(x-1)$ 和 $y = f(1-x)$ 的图象对称

设 M(a,b) 是函数 $y = f(x-1)$ 图象上的任意一点，则 $f(a-1) = b$

因 $f(a-1) = f[1-(2-a)]$ 故 $f[1-(2-a)] = b$

故 N$(2-a,b)$ 是 $y = f(1-x)$ 图象上的任意一点

由于 M(a,b) 和 N$(2-a,b)$ 关于直线 $x=1$ 对称

所以 $y = f(x-1)$ 和 $y = f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

(2)若 $f(x-1) = f(1-x)$ 对 $x \in R$ 恒成立，则 $y = f(x)$ 的图象的对称性

设 M(a,b) 是函数 $y = f(x)$ 图象上的任意一点，则 $f(a) = b$

因 $f(a) = f[(a+1)-1] = f[1-(a+1)] = f(-a)$ 故 $f(-a) = b$

于是 N$(-a,b)$ 是 $y = f(x)$ 图象上的点

由于 M(a,b) 和 N$(-a,b)$ 关于直线 $x=0$（y 轴）对称

所以 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$（y 轴）对称

972、(函数)

若 x=60,则 $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x} =$ ____

解：$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x} = \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5 = \log_x(3\times4\times5) = \log_x x = 1$

979、(函数)

已知 y=f(x)=log2(x+1),且当点(x,y)在曲线 y=f(x)上时,点$(\frac{1}{3x},\frac{1}{2y})$在曲线 y=g(x)上.求 g(x)的表达式.

解：点(x,y)在曲线 y=f(x)上时在曲线 y=f(x)上时，则 y= $\log_2$(x+1)（1）

设$m=\frac{1}{3x},n=\frac{1}{2y}$，则点$(m,n)$在曲线 y=g(x)上，故$n=g(m)$（2）

把$x=\frac{1}{3m},y=\frac{1}{2n}$代入（1）得$\frac{1}{2n}=\log_2\frac{1}{3m}=-\log_2 3m$，$n=-\frac{1}{2\log_2 3m}$代入（2）

于是$g(m)=-\frac{1}{2\log_2 3m}$，即$g(x)=-\frac{1}{2\log_2 3x}$

1007、(函数)

已知函数$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$在区间$(-\infty,4)$上是减函数,则求实数a的取值范围.

解：$f(x)=x^2+2(a-1)x+2$的对称轴是$x=1-a$

因$f(x)$区间$(-\infty,4)$上是减函数，

故$4\le 1-a$，$a\le -3$

1068、(函数)

已知函数$y=2ax-\frac{1}{x}$（$0<x\le 1$）的最大值是$-\frac{1}{2}$

则 a 的值是______

解：当$a>0$，$y=2ax-\frac{1}{x}$递增，最大值=$2a-1=-\frac{1}{2}$，$a=\frac{1}{4}$

当$a=0$，$y=-\frac{1}{x}$无最大值

当$a<0$，$y=2ax-\frac{1}{x}<-\frac{1}{x}<-1$最大值不可能为$-\frac{1}{2}$，故$a=\frac{1}{4}$

1082、(不等式)

若$1<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则下列结论中不正确的是(　　)

A、$log_a b>log_b a$　　B、$|log_a b+log_b a|>2$

C、$(log_b a)^2<1$　　D、$|log_a b|+|log_b a|>|log_a b+log_b a|$

解：$0<b<a<1$

A、作图正确，B、换底均值　C、$\log_b b>\log_b a>0$正确，D、相等

选、D

1113、(函数)

若 $f(x)=(2^x)+1, g(x)=(2^x)-1$，则不等式 $f\left[g\left(x\right)\right]>g\left[f\left(x\right)\right]$ 的解集是__________.

解： $f[g(x)]=2^{g(x)}+1=2^{2^x-1}+1=\dfrac{2^{2^x}}{2}+1$

$g[f(x)]=2^{f(x)}-1=2^{2^x+1}-1=2\times 2^{2^x}-1$

设 $2^{2^x}=t$，于是不等式 f[g(x)]>g[f(x)]化为 $\dfrac{t}{2}+1>2t-1$

$t<\dfrac{4}{3}$， $2^{2^x}<\dfrac{4}{3}$， $2^x<\log_2\dfrac{4}{3}$， $x<\log_2(\log_2\dfrac{4}{3})$

1126、(函数)

设方程 $x+\log_a x=3(a>2)$ 的解为 x_0，则 x_0 所在的区间是(　　)

A、$(2,3)$　　B、$(3,4)$　　C、$(0,1)$　　D、$(1,2)$

解 1：当 $0<x_0<1$ 时，则 $x_0+\log_a x_0<1$ 排除 C

当 $0<x_0<2$ 时，则 $x_0+\log_a x_0<2+1=3$ 排除 D

当 $3<x_0<4$ 时，则 $x_0+\log_a x_0>3$ 排除 B

故选 A

解 2：设 $f(x)=x+\log_a x-3$

$f(2)=\log_a 2-1<0, f(3)=\log_a 3>0$，故选 A

1222、(函数)

f(x)定义域为 R，f(x+1)是偶函数,f(x-1)是奇函数，求:

f(2000)+f(2001)+f(2002)+f(2003)+f(2004)+f(2005)+f(2006)=?

解：f(x-1) 是奇函数故 f(-1) ＝0，f(-x-1)＝- f(x-1)

f(x+1) 是偶函数故 f(-x+1)＝f(x+1)

于是 f(3)＝f(-1)＝0，

f(0)＝f(2)＝-f(4)＝-f(6)，f(1)＝-f(5)

f(x+8)＝f(x+7+1)＝f(-x-7+1)＝f(-x-5-1)＝- f(x+5-1)＝-f(x+3+1)＝-f(-x-3+1)

＝-f(-x-1-1)＝f(x+1-1)＝f(x)

故 f(x)以 8 为周期

f(2000)+f(2001)+f(2002)+f(2003)+f(2004)+f(2005)+f(2006)

＝f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)＝f(3)＝0

1260、(函数) (数列)

设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法，可求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$ 的值是________

解：$\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2^x}{2^x+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2^x}{2^x+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+2\times 2^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}+2^{1-x}}=f(1-x)$

$f(x)+f(1-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

于是

$f(-5)+f(6)=f(-4)+f(5)=f(-3)+f(4)$

$=f(-2)+f(3)=f(-1)+f(2)=f(0)+f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故原式＝$6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

1305
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=12992

已知函数 $f(x)=log_{0.1}\frac{x+1}{x-1}+log_{0.1}(x-1)+log_{0.1}(a-x)$,且$a>1$的最小值为-2,求实数 a.

解： $f(x)=log_{0.1}\frac{x+1}{x-1}+log_{0.1}(x-1)+log_{0.1}(a-x)$ f(x)=log0.1[(x+1)/(x-1)]
$=log_{0.1}(x+1)(a-x)\geq -2, 0<(x+1)(a-x)\leq 100$

当 $x=\frac{a-1}{2}$ 时，$(x+1)(a-x)$ 最大值＝$(\frac{a+1}{2})^2=100, a>0, a=19$

1313
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13204

(1)已知 $f(x^2-1)=\log_2\dfrac{x^2}{2-x^2}(1<x<\sqrt{2})$，求 $f(x)$，并判定 $f(x)$ 的奇偶性

(2)已知 $f(x^2-1)=\log_2\dfrac{x^2}{2-x^2}$，求 $f(x)$，并判定 $f(x)$ 的奇偶性

解：(1)设 $t=x^2-1(1<x<\sqrt{2})$，则 $0<t<1, x^2=t+1, f(t)=\log_2\dfrac{1+t}{1-t}$

于是 $f(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}(0<x<1)$，无奇偶性

(2)由 $\dfrac{x^2}{2-x^2}>0$ 得，$0<x^2<2$

设 $t=x^2-1(1<x^2<2)$，则 $-1<t<1, x^2=t+1, f(t)=\log_2\dfrac{1+t}{1-t}$

于是 $f(x)=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}(-1<x<1)$，　$f(-x)=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}=-\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$

于是 $f(x)$ 是奇函数

1358
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23657&start=0#bottom

若 $log_aN>p$，a 为对数的底数 N 为真数，a、p 已知，求 N 是否可以说 $N>a^p$ 呢?我看好像不可以的样子，当 $0<a<1$ 时，>就变成<，老师们可以告诉我为什么吗？对于解 $log_aN>p$ 这样的不等式应该用什么方法呢?) 学生很困惑请老师在这里解决一下学生的问题

答（1）若 $log_aN=p$，则真数 $N=a^p$

（2）当 $a>1$ 时，真数 N 大，则对数 log_aN 也大，

由于真数 $N=a^p$ 时，$log_aN=p$，于是要想对数 $log_aN>p$，只好是真数 $N>a^p$

（3）当 $0<a<1$ 时，真数 N 大，则对数 log_aN 反而小

由于对数 $log_aN=p$ 时 $log_aN=p$，于是要想对数 $log_aN>p$，只好是真数 $N<a^p$，当然还得补上真数 N>0

1447
http://bbs.pep.com.cn/thread-291655-1-1.html

若$0<a<b<1$,则

$$M=\log_a(\log_a b),N=\log_b(\log_b a),P=\log_a(\log_b a),Q=\log_b(\log_a b)$$

的大小关系是________

答：方法一，$y=\log_a x,y=\log_b x$的作图像

方法二，取特值$a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$，Q>M>P>N