廖老师网上千题解答分类、二十超纲导数

124、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=$ (m 和 n 是自然数)(高考不要求)

解 1： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1-x^m}{1-x}}{\dfrac{1-x^n}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}=\dfrac{m}{n}$

解 2： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^m-1)'}{(x^n-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}$

注解法 2、用到罗必塔法则，这在中学课本中没有，高考不作要求

146、 $y=|2x-1|$，有极小值 0 ,且 0 也是最小值，不是说 $y=|2x-1|$不可导吗？而极小值是通过求导得出来的，为什么会有极小值呢？我什么地方考虑错了？

(高考不要求)

答：(1)先要弄清楚极小值的定义，在 x= x_0 的两侧的一个小区间上有 $f(x_0)<f(x)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，不需要 $f(x)$ 在 x= x_0 处可导。

(2)如果一个函数在定义域上的每一个点可导可以用导数法求极小值

(3)如果一个函数在某些点处不可导可以可以画出图形来看看，在该点两侧的一个小区间上它是不是最小，若是则它也是极小值

(4)极大值问题类似

285、关于 x 的三次函数 y=f(x)两个极值点为 P、Q，其中 P 为原点，Q 在曲线 $y=1+\sqrt{2x-x^2}$ 上，则曲线 y=f(x)的切线斜率的最大值的最小值为_______.

解：设 Q（m，n）

因 $y=1+\sqrt{2x-x^2}$ 定义域为[0，2]，值域[1，2]

故 m$\in$[0，2]，n$\in$[1，2]

设 f(x)= ax^3+bx^2+cx+d ，则 f'(x)= $3ax+2bx+c$

因原点是一个极值点，故 f(0)＝ f'(0)=0，故 $c=d=0$

f(x)= ax^3+bx^2， f'(x)= $3ax(x+\dfrac{2b}{3a})$

故 $m=-\dfrac{2b}{3a}$， $n=am^3+bm^2$，

$a=-\dfrac{2n}{m^3}$， $b=\dfrac{3n}{m^2}$， f'(x)= $-\dfrac{6n}{m^3}x(x-m)$

所以最大斜率 $k=\dfrac{6n}{m^3}\bullet\dfrac{m^2}{4}=\dfrac{3n}{2m}$

由于曲线 $y=1+\sqrt{2x-x^2}$

是半圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$（$y\geq1$）

故半圆上的点 Q（m，n）与原点连线的斜率 $\dfrac{n}{m}$ 的最小值是 $\dfrac{1}{2}$

所以最大斜率 $k=\dfrac{3n}{2m}$ 的最小值是 $\dfrac{3}{4}$

347、若 p_1, p_2, p_3 为非负实数,试证明:

$\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}+\sqrt{1+p_3}\geq1+\sqrt{1+p_1+p_2+p_3}$ 并指出等号何时成立

证明：设 $f(x)=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-1+\sqrt{1+x}-\sqrt{1+p_1+p_2+x}$

设 $f_x'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+p_1+p_2+x}}$

因为 p_1, p_2 非负，故当 $x\geq0$ 时有 $1+x\leq1+p_1+p_2+x$

故 $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+p_1+p_2+x}}\geq0$，故 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上不减

由于 $p_3\in[0，+\infty)$

$f(p_3)\geq f(0)=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-1+\sqrt{1}-\sqrt{1+p_1+p_2}$

$=\sqrt{1+p_1}+\sqrt{1+p_2}-\sqrt{1+p_1+p_2}$

$=\sqrt{1+p_1+1+p_2+2\sqrt{(1+p_1)(1+p_2)}}-\sqrt{1+p_1+p_2}>0$

故原式成立，此式取不到等号

355、当 x Î (0,+¥) 时，$y=x^x$ 在何处有最小值?(高考不要求)

解：把 $y=x^x$ 两边取对数得 $\ln y=x\ln x$

再两边对 x 取导数得 $\dfrac{1}{y}\cdot$ y¢ $=\mathbf{ln}\,x+1$

故 y¢ $=y(\mathbf{ln}\,x+1)=x^x\,\mathbf{ln}\,ex$

令 y¢ $=x^x\,\mathbf{ln}\,ex=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}$

故在 $y=x^x$ 在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处取到最小值

543、是否存在常数 C,使得不等式 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}\le c\le\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}$ 对任意正数 x,y 恒成立？试证明你的结论(不等式) (竞赛)

解：　设 m= $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}=\frac{1}{2+\frac{y}{x}}+\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{2y}{x}}$

$$n=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}=\frac{1}{1+\frac{2y}{x}}+\frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}}$$

设 $t=\frac{y}{x}$，则 $m=\frac{1}{2+t}+\frac{t}{1+2t}, n=\frac{1}{1+2t}+\frac{t}{2+t}$，

$$m'=\frac{3(t+1)(t-1)}{(2+t)^2(1+2t)^2}$$

在 $t\in(0,1)$ 上，$m'<0$，在 $t\in(1,+\infty)$ 上，$m'>0$，故当 $t=1$ 时 m最大＝$\frac{2}{3}$，

又因为 $n'=\frac{6(t+1)(1-t)}{(2+t)^2(1+2t)^2}$

在 $t\in(0,1)$ 上，$n'>0$，在 $t\in(1,+\infty)$ 上，$n'<0$

故当 $t=1$ 时，n最小＝$\frac{2}{3}$，故存在否存在常数 $c=\frac{2}{3}$ 满足条件

637、讨论方程 $a^x=x$ 的解的个数(方程) (函数)

解：先研究函数 $f(x)=a^x$ 与 $y=x$ 在何时相切

假设 $f(x)=a^x$ 与 $y=x$ 相切于 (x_0,y_0)，则

$y_0=a^{x_0}=x_0\cdots$①，　$f'(x_0)=a^{x_0}\ln a=1\cdots$②，

①代入②得 $x_0\ln a=1\cdots$③　①两边取对数得 $x_0\ln a=\ln x_0\cdots$④

由③④得 $x_0=e$，$a=e^{\frac{1}{e}}$

于是当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，$f(x)=a^x$ 与 $y=x$ 的图象相切于点 (e,e)

利用 $f(x)=a^x$ 的图象在 a 变化时的位置关系可知下面的结论

（1）当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程 $a^x=x$ 有唯一解 $x=e$

（2）当$a > e^{\frac{1}{e}}$时 $f(x) = a^x$的图象总在$y = x$的图象的上方，方程$a^x = x$无解

（3）当$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$时 $f(x) = a^x$的图象上的点(e, a^e)，在直线$y = x$的下方，于是$f(x) = a^x$的图象与直线$y = x$有两个交点，方程$a^x = x$有两解。

（4）当$0 < a < 1$时，$f(x) = a^x$与直线$y = x$只有一个交点，方程$a^x = x$只有一解。

752、求证$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$(欧拉公式之一) (高数) (高考不要求)

1、因式分解定理

先讲一讲因式分解定理

（1）在初中我们学习了二次三项式的分解定理

若$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$的两根是$x_1, x_2$

则$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

若$c \neq 0$也可写成$c + bx + ax^2 = c(1 - \frac{x}{x_1})(x - \frac{x}{x_2})$的形式

（2）这个定理可推广到n次多项式

若$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 (a_n \neq 0)$的$n$个根是$x_1, x_2, \cdots x_n$，

则$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

若$a_0 \neq 0$也可写成$a_0 + a_1 x + + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_0 (1 - \frac{x}{x_1})(x - \frac{x}{x_2}) \cdots (1 - \frac{x}{x_n})$

的形式

2、泰勒公式

再讲一讲按多项式展开

（1）由无穷递缩等比数列的各项和得我们知道

当$|x| < 1$且$x \neq 0$时，$1 + x + + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$这个式子对$x = 0$也成立。

我们把$1 + x + + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$叫做函数$f(x) = \frac{1}{1 - x}$按多项式展开，准确一点叫做按幂级数展开。也就是$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

（2）再如当$|x| < 1$时，$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1} + \cdots = \frac{x}{1 - x^2}$

于是我们说函数$g(x) = \frac{x}{1 - x^2}$的幂级数展开式是$x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1} + \cdots$

即 $g(x)=\dfrac{x}{1-x^2}=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n-1}+\cdots$ 当然这个等式只在 $|x|<1$ 时成立

（3）因为多项式函数便于运算我们也更熟悉，于是数学家们就想写出更多函数的幂级数展开式。于是就有了泰勒公式

我们设先想 $f(x)$ 有幂级数展开式这，即 $f(x)=a_0+a_1x++a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

首先有 $f(0)=a_0$，

再对 $f(x)$ 取导数得 $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$ 于是 $f'(0)=a_1$

再对 $f'(x)$ 取导数得 $f''(x)=2a_2+3\times 2a_3x\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$ 于是 $f''(0)=2a_2$

再对 $f''(x)$ 取导数得 $f'''(x)=3\times 2a_3+4\times 3a_4x\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots$ 于是 $f'''(0)=3\times 2a_3$

如此做下去，可得 $f^{(4)}(0)=4\times 3\times 2a_4$， $f^{(5)}(0)=5\times 4\times 3\times 2a_5$，…

$f^{(n)}(0)=n\bullet(n-1)\bullet\cdots\bullet 3\bullet 2a_n$，…我们知道 $n\bullet(n-1)\bullet\cdots\bullet 3\bullet 2=n!$

于是有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$， $a_{n-1}=\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$，…， $a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}$， $a_1=\dfrac{f'(0)}{1!}$， $a_0=\dfrac{f(0)}{0!}$

因此， $f(x)$ 的幂级数展开式就是

$$f(x)=a_0+a_1x++a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

（$0!=1$）这个公式就是泰勒公式的特例（麦克劳林公式）

例如 $f(x)=\sin x$， $\dfrac{f(0)}{0!}=0,\dfrac{f'(0)}{1!}=\cos 0=1,\dfrac{f''(0)}{2!}=-\dfrac{\sin 0}{2!}=0,\dfrac{f'''(0)}{3!}=-\dfrac{\cos 0}{3!}=-\dfrac{1}{3!},\cdots$

于是 $f(x)=\sin x=0+1x+0x^2-\dfrac{1}{3!}x^3+0x^4+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots$

3、欧拉是如何证明 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi}{6}$ 的？

证明：考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

由麦克劳林公式得 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots$， $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{1}{3!}x^2+\dfrac{1}{5!}x^4+\cdots$

易知方程 $\dfrac{\sin x}{x}=0$ 的根是 $\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots$ 由分解定理得

$$f(x)=1+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\cdots=(1-\frac{x}{x_1})(1-\frac{x}{x_2})\cdots(1-\frac{x}{x_n})\cdots$$

$=(1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{3\pi})\cdots(1-\frac{x}{n\pi})(1+\frac{x}{n\pi})\cdots$

$=(1-\frac{x^2}{\pi^2})[1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}][1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}]\cdots[1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}]\cdots$

对照$1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4+\cdots$与$(1-\frac{x^2}{\pi^2})[1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}][1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}]\cdots[1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}]\cdots$

的x^2项的系数得$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{(2\pi)^2}-\frac{1}{(3\pi)^2}-\cdots-\frac{1}{(n\pi)^2}\cdots$

因此$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

770、若$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=4$，求 c　(极限，高考不要求)

解：设$x-c=t$，则$x=t+c$ $x+c=t+2c$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{t+2c}{t})^{t+c}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{2c}{t})^{t+2}$

设$\frac{t}{2c}=u$，则$t=2cu$，

$\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{2c}{t})^{t+2c}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{2cu+2c}=[\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u]^{2c}\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{2c}=e^{2c}\cdot 1=e^{2c}=4$

故$2c=\ln 4$，$c=\ln 2$

886、(高数)

已知：函数$f(x)$存在二阶导数，并且对于任意的$x_1,x_2\in R$，都有

$f(\frac{x_1+x_2}{2})\ge\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$　　求证：函数$f''(x)\le 0$

证明：令$x_1=x-t$，$x_2=x+t$（$t>0$）

则$f(\frac{x-t+x+t}{2})\ge\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$

即$2f(x)\ge[f(x-t)+f(x+t)]$

$[f(x+t)-f(x)]-[f(x)-f(x-t)]\le 0$

$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-\frac{f(x)-f(x-t)}{t}\le 0$（1）

由于$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$表示连结$A(x，f(x))$和$B(x+t，f(x+t))$两点之间的线的斜率，于是函数$f(x)$的图象在区间$(x，x+t)$必有一条与AB平行的切线，设切点

为 C$(p，f(p))$，则 $p\in(x，x+t)$ 且 $f'(p)=\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$（2）

同理存在 $q\in(x-t，x)$ 使 $f'(q)=\dfrac{f(x)-f(x-t)}{t}$（3）

把（2）（3）代入（1）得 $f'(p)-f'(q)\le 0$（4）

假设 $f''(x)>0$，让 t 充分的小，可使 $f'(x)$ 在区间 $(x-t，x+t)$ 是增函数，

因为 $x-t<q<p<x+t$，所以 $f'(p)>f'(q)$，

即 $f'(p)-f'(q)>0$ 这与（4）相矛盾

于是假设错误，因此 $f''(x)\le 0$，证毕

注：“由于 $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ 表示连结 $A(x，f(x))$ 和 $B(x+t，f(x+t))$ 两点之间的线的斜率，于是函数 $f(x)$ 的图象在区间 $(x，x+t)$ 必有一条与 AB 平行的切线，设切点为 C$(p，f(p))$，则 $p\in(x，x+t)$ 且 $f'(p)=\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$（2）”

这一段话是为了能够让学生能看懂的对拉格兰日中值定理的几何表述

950、(不等式)

正数 a,b,c 满足 abc=8，求证：$\dfrac{a+b+c}{3}+\dfrac{3}{a+b+c}\ge\dfrac{5}{2}$.

证明：$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=6$

设 $a+b+c=t\ge 6$，则 $\dfrac{a+b+c}{3}+\dfrac{3}{a+b+c}=\dfrac{t}{3}+\dfrac{3}{t}=f(t)$

因在 $t\in[6,+\infty)$ 上，$f'(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{t^2-9}{3t^2}>0$，故 $f(t)$ 在 $t\in[6,+\infty)$ 上递增

于是 $f(t)\ge f(6)=\dfrac{5}{2}$

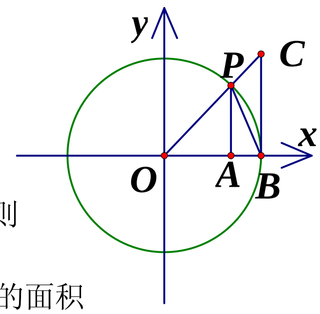
1012、求它的导数 $y=e^{x\ln x}$ (高考不要求)

解：两边取对数得 $\ln y=x\ln x$

两边取导数得 $\dfrac{1}{y}\bullet y'=\ln x+1$

于是 $y'=y(\ln x+1)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$

1014(1)、两个重要极限 (高考不要求)



1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明：当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，

如图是一个半径为 1 的圆，设$\angle POB=x$， 则

$\sin x=AP,\tan x=BC,BP$的弧长$l=x$

因为ΔOBP的面积$<$扇形OBP的面积$<\Delta OBC$的面积

所以$\dfrac{1}{2}\times OB\times AP<\dfrac{1}{2}\times OB\times l<\dfrac{1}{2}\times OB\times BC$

于是$AP<l<BC$， 即$\sin x<x<\tan x$

$\sin x<x<\dfrac{\sin x}{\cos x}$， $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$， $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

因$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$， 于是$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{-x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{-x\to 0^+}\dfrac{\sin(-x)}{-x}=1$

因此、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$， $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

证明：（1）看数列$a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$

一方面此数列递增， $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n=\overbrace{1\bullet(1+\dfrac{1}{n})\bullet(1+\dfrac{1}{n})\cdots(1+\dfrac{1}{n})}^{n+1个}<[\dfrac{1+n(1+\dfrac{1}{n})}{n+1}]^{n+1}$

$=(\dfrac{1+n+1}{n+1})^{n+1}=(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1}$

另一方面此数列递有上界，

$a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n=1+C_n^1(\dfrac{1}{n})^1+C_n^2(\dfrac{1}{n})^2+C_n^3(\dfrac{1}{n})^3+\cdots+C_n^n(\dfrac{1}{n})^n$

$=1+\dfrac{n}{1}(\dfrac{1}{n})^1+\dfrac{n(n-1)}{1\times 2}(\dfrac{1}{n})^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}(\dfrac{1}{n})^3+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots 1}{1\times 2\times\cdots\times n}(\dfrac{1}{n})^n$

$<1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{1\times 2\times\cdots\times n}\le 1+1+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=3-\dfrac{1}{n}<3$

于是$a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$的极限存在，设为$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$（$e\approx 2.71828$）

在中$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$， 令$x=\dfrac{1}{n}$， 则$n=\dfrac{1}{x}$， 当$n\to\infty$时$x\to 0$

于是$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

1014(2)、几个导数的推导

1、公式 1、$(x^n)'=nx^{n-1}$， 只对 $n=5$ 进行推导

$$(x^5)'=\lim_{\Delta x\to}\frac{(x+\Delta x)^5-x^5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to}\frac{5x^4(\Delta x)+10x^3(\Delta x)^2+10x^2(\Delta x)^3+5x(\Delta x)^4+(\Delta x)^5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to}[5x^4+10x^3\Delta x+10x^2(\Delta x)^2+5x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4]=5x^4$$

2、公式 2、$\sin' x=\cos x$， $\cos' x=-\sin x$

推导：$\sin' x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

$$\cos' x=\sin'(x+\frac{p}{2})=\cos(x+\frac{p}{2})\times(x+\frac{p}{2})'=-\sin x$$

3、公式 3、 $\ln' x=\dfrac{1}{x},\log_a{}' x=\dfrac{1}{x\ln a}$

推导：$\ln' x=\dfrac{1}{x}$ $\ln' x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[\ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\quad \log_a{}' x=(\frac{\ln x}{\ln a})'=\frac{1}{x\ln a}$$

4、公式 4、$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\ln x$

推导：（1）设 $y=e^x$， 则 $\ln y=x$， 两边取导 $\dfrac{1}{y}\bullet y_x'=1$，

于是 $y_x'=y=e^x$， 即 $(e^x)'=e^x$

(2) $y=a^x$， 取对数 $\ln y=x\ln a$,两边取导 $\dfrac{1}{y}\bullet y_x'=\ln a$,于是

$y_x'=y\ln a=a^x\ln a$,故 $(a^x)'=a^x\ln x$

1047、(极限) (高考不要求)

(1)若 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=$____

(2)若设 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$， 则 $f(1)=$______

解：(1)

设 $t=\sqrt[6]{1+x}$， 则 $y=\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2+t+1}{t+1}=\dfrac{3}{2}$,

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续， 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{3}{2}$

(2)因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$， 所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

因为 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处连续， 所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$,于是 $f(1)=0$

1220、(函数) (方程) (导数) (圆锥曲线) (线性规划)

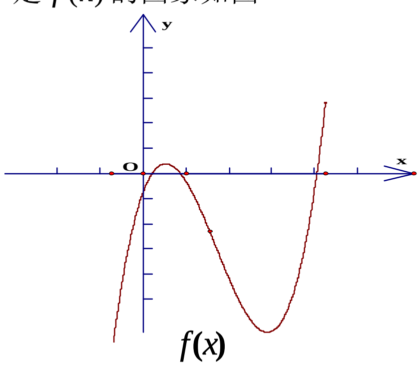
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的三个根分别可作为一椭圆、一双曲线、一抛物线的离心率（1）求 $\frac{b}{a}$ 的范围(2)若椭圆 C 以坐标轴为对称轴，短轴长为 4，且有 $P(a,b)$ 在椭圆 C 上，求椭圆 C 的长轴长的范围

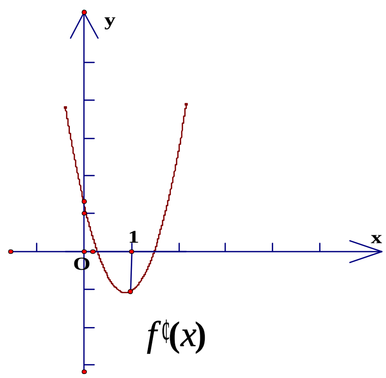
解：（1）设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，则 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

方程的三根分别为 $x_1,x_2,1$（ $0<x_1<1,x_2>1$）

于是 $f(x)$ 的图象如图





因 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的两个极值点分别在（0，1）和（1，+∞）上

故 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 的两个零点分别在（0，1）和（1，+∞）上

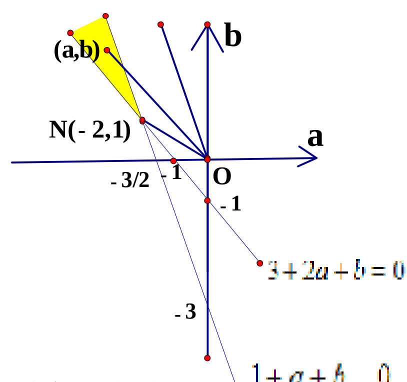
于是方程的三根分别为 x_1,x_2，1（ $0<x_1<1,x_2>1$）的充要条件是

$$\begin{cases} f(1)=1+a+b+c=0 & ① \\ f(0)=c<0 & ② \\ f'(1)=3+2a+b<0 & ③ \\ f'(0)=b>0 & ④ \end{cases}$$

由①②得 $1+a+b>0$，⑤

作出由③④⑤所确定的可行域，

可得斜率 $\frac{b}{a}$ 的范围是 $(-2,-\frac{1}{2})$



（2）点 $P(a,b)$ 在椭圆上，于是点 $N(-2,1)$ 在椭圆的内部

椭圆的长轴长为 $2m$，由于椭圆的短轴长为 4，

于是椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{4}=1$，或 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1$

故 $\frac{4}{m^2}+\frac{1}{4}<1$ 或 $\frac{4}{4}+\frac{1}{m^2}<1$,解得 $m>\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以椭圆的长轴长 $2m>\frac{8\sqrt{3}}{3}$

1242、(高数)求和 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

答：$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\frac{(-1)^{i+2}}{i+2}+\cdots+\frac{(-1)^{i+n}}{i+n}+\cdots]$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{1+n}+\cdots$

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n+2}}{2+n}+\cdots$

$+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+\cdots$

…… …… ……

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots$

$=(1-\frac{1}{2})-(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{4})-(1-\frac{1}{5})+\cdots$

取部分和

$S_{2k}=\overbrace{1-1+1-1+\cdots+1-1}^{2k个}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1})$

$=-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1})$

$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}[(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k})-1-\frac{1}{2k+1}]=\ln 2-1$

再取部分和

$S_{2k+1}=\overbrace{1-1+1-1+\cdots-1+1}^{2k+1个}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2})$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}=\ln 2$

因此，故原式发散

这种错号级数，项的位置调整后有可能改变收敛性

1292、(函数) (导数)

若 A 是由定义在$[2,4]$上且满足如下条件的函数$\varphi(x)$组成的集合：①对任意$x\in[1,2]$，都有$\varphi(2x)\in(1,2)$；②存在常数$L(0<L<1)$，使得对任意的$x_1,x_2\in[1,2]$，都有$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

（Ⅰ）设 $j(x)=\sqrt[3]{1+x}, x\in[2,4]$，证明：$j(x)\in A$

(Ⅱ)设 $j(x)\in A$,如果存在 $x_0\in(1,2)$,使得 $x_0=j(2x_0)$,那么这样的 x_0 是唯一的;

(III)设 $j(x)\in A$,任取 $x_l\in(1,2)$,令 $x_{n+1}=j(2x_n), n=1,2,\cdots$,证明:给定正整数 k,对任意的正整数 p,成立不等式 $|x_{k+l}-x_k|\le\frac{L^{k+1}}{1-L}|x_2-x_1|$

答 keleshi 老师

问题 1：第 1 问是否可以通过求导，证明其斜率<2/3 来求解？

答：$j'(2x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$，当 $x\in[2,4]$，$\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+8)^2}}\le j'(2x)\le\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+4)^2}}<\frac{2}{3}$

故 $0<|j'(2x)|<\frac{2}{3}$，当 $x_1\neq x_2$ 时 $\frac{|j(2x_1)-j(2x_2)|}{|x_1-x_2|}<\frac{2}{3}$，取 $L=\frac{2}{3}\in(0,1)$，

故有 $|j(2x_1)-j(2x_2)|<L|x_1-x_2|$，

当 $x_1=x_2$ 时，$|j(2x_1)-j(2x_2)|=L|x_1-x_2|$

于是总有 $|j(2x_1)-j(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

评：上面的做法是不严密的，因为 $\frac{|j(2x_1)-j(2x_2)|}{|x_1-x_2|}\neq|j'(2x)|$

要严密求导做也行，但要用到拉格朗日中值定理（超纲了），书写如下

$j'(2x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$，当 $x\in[2,4]$，$\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+8)^2}}\le j'(2x)\le\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+4)^2}}<\frac{2}{3}$

故 $0<j'(2x)<\frac{2}{3}$，由 $j(2x)=\sqrt[3]{1+2x}$,在[2,4]递增得

对任意 $x\in[1,2]$, ,$\sqrt[3]{3}\le j(2x)\le\sqrt[3]{5}$,$1<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{5}<2$,所以 $j(2x)\in(1,2)$

由拉格朗日中值定理得，当 $x_1\neq x_2$ 时，存在 $x\in(2,4)$，使

$\frac{j(2x_1)-j(2x_2)}{x_1-x_2}=j(2x)$，$0<j(2x)<\frac{2}{3}$

于是有 $\frac{|j(2x_1)-j(2x_2)|}{|x_1-x_2|}<\frac{2}{3}$,取 $L=\frac{2}{3}\in(0,1)$,故有 $|j(2x_1)-j(2x_2)|<L|x_1-x_2|$

当 $x_1=x_2$ 时，$|j(2x_1)-j(2x_2)|=L|x_1-x_2|$

于是总有$|j(2x_1)-j(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

因此第（1）小题用下面的解法是明智的

证明：当$x\in[2,4]$时，$j'(2x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}>0$， $j(2x)$在$[2,4]$上递增，

对任意$x\in[1,2]$，$\sqrt[3]{3}\le j(2x)\le\sqrt[3]{5}$，$1<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{5}<2$，所以$j(2x)\in(1,2)$

$|j(2x_1)-j(2x_2)|=|x_1-x_2|\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}$，

因此$\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)}>3$，

所以 $0<\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}<\dfrac{2}{3}$

令$L=\dfrac{2}{3}$， $0<L<1$，则有$|j(2x_1)-j(2x_2)|\le L|x_1-x_2|$

所以$j(x)\in A$

问题 2：第（2）小题为什么要用反证法？

答：第（2）小题条件对于函数$j(x)$只给出了$j(x)\in A$，于是$j(x)$只是满足一些特殊条件的抽象函数，要证明方程$x=j(2x)$有唯一的解，想到反证法是自然的，这样也就能够用上条件$j(x)\in A$了。

（2）证明（反证法）

设存在两个$x_0,x_0'\in(1,2),x_0\ne x_0'$使得$x_0=j(2x_0),x_0'=j(2x_0')$则

由$|j(2x_0)-j(2x_0')|\le L|x_0-x_0'|$，得$|x_0-x_0'|\le L|x_0-x_0'|$，所以$L\ge1$，矛盾，故结论成立。

问题 3：个人感觉第 3 问最后，应为 ＜ 号吧？

答：$j(x)=1,5$ 也有$j(x)\in A$

1302
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13088
以下是怎么推导出来的

$c=\frac{d}{t}$， d 是距离 t 是传导时间 c 是传导速度 $lnc=lnd-lnt$

$\Delta(lnc)=\Delta(lnd)-\Delta(lnt)$

因为变量 $\Delta lnx=\frac{\Delta x}{x}$

所以 $\Delta c=c(\frac{\Delta t}{t}+\frac{\Delta d}{d})$

请教这是怎么推导出来的

答：因 $(lnx)'=\frac{1}{x}$， 故 $\Delta(lnx)=\frac{1}{x}\Delta x$

$lnc=lnd-lnt \Rightarrow \Delta(lnc)=\Delta(lnd)-\Delta(lnt) \Rightarrow \frac{\Delta c}{c}=\frac{\Delta d}{d}-\frac{\Delta t}{t}$

$\Rightarrow \Delta c=c(\frac{\Delta t}{t}+\frac{\Delta d}{d})$

1308
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13143

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x(x\text{为有理数}) \\ 1-x(x\text{为无理数}) \end{cases}$， 则 f(x)（　）

A、在 R 上处处连续　　　　B、只在 x=1 处连续

C、只在 x=0 处连续　　　　D、.只在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续

解：由 $x=1-x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$， x 按有理数和无理数趋于 $\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的极限都是 $\frac{1}{2}$

于是 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\frac{1}{2}=f(\frac{1}{2})$， 于是 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续

当 $x_0\neq\frac{1}{2}$ 时， x 按有理数趋于 x_0 时， $f(x)$ 的极限是 x_0

x 按无理数趋于 x_0 时， $f(x)$ 的极限是 $1-x_0$， 由于此时 $x_0\neq 1-x_0$

故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在,,因此选 D

1311
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13188&start=0&show=0

求 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{x}$

讲解： 重要极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

于是

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+2x}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e}\qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{1+x}}{1+\frac{1}{1+x}}=e$$

1312
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13199

已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-x^n}{2^n+x^n}$ 求

(1) $f(x)$ 的定义域，并画图像

(2)求 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$， $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$，并指出 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 是否存在

解：(1) 当 $-2<x<2$ 时，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-x^n}{2^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=1$$

当 $x=2$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

当 $x<-2$或$x>2$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{x}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=-1$

综上， $f(x)=\begin{cases}1 & (-2<x<2)\\ 0 & (x=2)\\ -1 & (x<-2\text{或}x>2)\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-1$，于是 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$，

因此 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 是不存在

1366

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=24081&start=0&show=0

已知 $f(x)$在$x=a$处可导，且 $f'(a)=A$

求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(2x-a)-f(2a-x)}{x-a}$的值

解：设$x-a=\Delta x$， $x=a+\Delta x$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(2x-a)-f(2a-x)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{2\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}+\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}$$

$$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)=3A$$