廖老师网上千题解答分类二十一、大纲排二概

40、在$(ax+1)^7$的展开式中，x^3的系数是x^2和x^4的系数的等差中项，若实数 a>1，那么 a 为多少?

解：x^3项＝$C_7^4(\mathrm{ax})^3$＝$35\mathrm{a}^3\mathrm{x}^3$　x^2项＝$C_7^5(\mathrm{ax})^2$＝$21\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$

　　x^4项＝$C_7^3(\mathrm{ax})^4$＝$21\mathrm{a}^4\mathrm{x}^4$

依题意，$35\mathrm{a}^3$是$21\mathrm{a}^2$和$21\mathrm{a}^4$的等中项

故$70\mathrm{a}^3=21\mathrm{a}^2+21\mathrm{a}^5$　由 a>1 得$10\mathrm{a}\ =3+3\mathrm{a}^2$

解得：$a=3$或$a=\dfrac{1}{3}$（舍去）

41、91^{92}除以 100 的余数为多少?

解：$91^{92}=(90+1)^{92}=C_{92}^0 90^{92}+C_{92}^1 90^{91}+\mathbf{L}+C_{92}^{90}90^2+C_{92}^{91}90+1$

$=100\mathrm{N}++92\times 90+1=100\mathrm{N}++8280+1$

故91^{92}除以 100 的余数为 81

62、 2 红球，2 黄球， 1 蓝球排成一排，要求 2 红球不相邻且 2 黄球不相邻，有几种排法?

解： 2 红与 1 蓝任意排有A_3^3种,把 2 黄插入有A_4^2种，共有$A_3^3\ A_4^2$＝72 种

再排除其中 2 红相邻的

把有 2 红捆一起与 1 蓝排有$A_2^2\ A_2^2$方法,再插入 2 黄，共有$A_2^2\ A_2^2\ A_3^2$　24 种

于是符合条件的有 72- 2 4 ＝ 4 8

108 、 在 1 ，2 ，3 ，4 ，5 的排列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5中 ， 满足条件$a_1<a_2,a_2>a_3,a_3<a_4,a_4>a_5$的排列数的个数是(　　　) (联赛)

A、8　　B、10　　C、14　　D、16

解：当$a_3=1$时，$C_4^2=6$排法

　　当$a_3=2$时，$C_4^2=6$排法，

　　当$a_3=3$时，$A_2^2A_2^2=4$排法

　　共有 16 种排法，选 D

333、某医院要安排三名医生和三名护士到三个贫困山区进行医疗救助，每个地方一名医生和一名护士，问有多少种安排方法？

答案：$A_3^3 A_3^3 = 36$

336、有１０粒糖，如果每天至少吃一粒，吃完为止，问有多少种不同的吃法？？
解：用隔板法

一天吃完 1 种，即 C_9^0,二天吃完 C_9^1，三天吃完 C_9^2，四天吃完 C_9^3，……九天吃完 C_9^8,十天吃完 C_9^9，共有 $C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^8+C_9^9=2^9=512$

373、问题：由 3 个 a，5 个 b 和 2 个 c 构成的所有字符串中包含子串“abc”的共有几个？
解：(1)把 1 串 abc 打捆（占成一个位置），与余下的 2 个 a，4 个 b 和 1 个 c 排到 8 个位置，为打捆 abc 选位有 C_8^1 种选法，为 1 个 c 选位有有 C_7^1 种选法，为个 2 个 a 选位有 C_6^2 种选法，最后 4 个位置排 4 个 b

排法数有 $C_8^1 C_7^1 C_6^2 = 840$

（2）上面的排法把有 2 串 abc 的情况多算了一次
应减去，用上面的方法分别把把 2 串 abc 打捆（占 2 个位置），与余下的 1 个 a，3 个 b 排列 6 个位置，排法数有 $C_6^2 C_4^1 = 60$　　（1）-（2）=780

436、求 $\dfrac{C_{100}^{98}+C_{100}^{97}}{A_{101}^3}$

解：$C_{100}^{98}+C_{100}^{97}=C_{101}^{98}=C_{101}^{3}=\dfrac{A_{101}^3}{6}$，$\dfrac{C_{100}^{98}+C_{100}^{97}}{A_{100}^3}=\dfrac{1}{6}$

546、从 1 到３００之间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和被 3 整除，问：共有多少种取法？(排列组合) (数论)
把 1 到３００之间的数分为 3 类
第一类被 3 整除：3，6，……，300
第二类被 3 整余 1：1，4，……，298
第二类被 3 整余 2：2，5，……，299
取 3 个不同的数和被 3 整除能
的取法：

(1)3 数同一类：$C_3^1 C_{100}^3$

(2)3 数各一类：100^3

共有 $C_3^1 C_{100}^3+100^3$＝1485100

589、两个集合 M={1,2,3,4}， N={a,b,c,d} 那么 $f:M \to N$ 满足 N 中恰好有一个元素无原象的映射个数？(排列组合)

A.288 B.72 C.144 D.36

解法 1、因为映射 $f:M \to N$，N 中恰好有一个元素无原象

所以（1）从 N={a,b,c,d}中选无原象的元素，有 $C_4^1=4$ 种选法

（2）问题转化为把 M={1,2,3,4}中的元素分成三部分，使每一部分的元素分别与 N 中有原象的三个元数对应。

M 中的元素分成三部分的分法数是 $\dfrac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$

对应的方法有 $A_3^3=6$

综上映射个数＝$4\times6\times6=144$

解法 2、因为映射 $f:M \to N$，N 中恰好有一个元素无原象

所以（1）从 N={a,b,c,d}中选出有原象的三个元素，有 $C_4^3=4$ 种选法

（2）我们把 M 中的 4 个元素当成 4 个不同的球，N={a,b,c,d}中选出的有原象的 3 个元素当成 3 个不同的框。这样后个映射个数就转化成了把 4 个不同的球投到 3 个不同的框中每框至少一球的投法数了

可以先从 4 球中选 2 球投到一框中有 $C_4^2C_3^1=18$ 种选投方法

再把剩下的两球投到另两个框中每框一球有 $A_2^2=2$ 种投方法

综上映射个数＝$4\times18\times2=144$

解法 3

问题转化为把 4 个不同的球投到 4 个不同的框中恰有一个空框的投法数

先把从 4 个球中选 2 个捆起来当成一球，问题转化为把 3 个不同的球投到 4 个不同的框中每至多一球的投法数

映射个数＝$C_4^2A_4^3=144$

602、已知(x+1) ^{6}(ax-1)^2 的展开式中 x^3 的系数是 56，则实数 a=_____(二式定理)

解：(x+1) ^{6}(ax-1)^2=$(a^2x^2-2ax+1)$ $(C_6^0x^6+C_6^1x^5+C_6^2x^4+C_6^3x^3+C_6^4x^2+C_6^5x^1+1)$

于是 x^3 项=$a^2x^2\bullet C_6^5x^1-2ax\bullet C_6^4x^2+C_6^3x^3=(6a^2-30a+20)x^3$

系数 $6a^2-30a+20=56$，$6a^2-30a-36=0$，$a^2-5a-6=0$，$a=6$或$a=-1$

617、现有每张上写有 1，2，3，4，5，6 的六张卡片，如果可将 6 反过来看作 9，用它们组成没有重复数字的两位数，一共可以组成多少个？(排列组合)

解：第一类取 6：有 $2C_5^1A_2^2=20$ 个

第二类不取 6：有 $A_5^2=20$ 个，共有 40 个

791、一年高考题:某校高二年级有六个班级,现从外地转入 4 名学生,要安排到该年级得两个班,且每班安排两名,不同得安排方案总数是???　(平均分配看不懂,这里请提示)

解:（1）从六个班级班中选两个班有 C_6^2 种选法，例如选出高二（3）班与高二（5）班

（2）高二（3）班从 4 名学生中选 2 人有 C_4^2 种选法

（3）高二（5）班从选剩下的 2 人 C_2^2

于是安排方案总数＝C_6^2 C_4^2 C_2^2＝180 种

792、从小于 50 的自然数中,取两个不同的数,使两数之和恰好是 3 的倍数,不同的取法有________种.

解：小于 50 的自然数

可分为 3 类每类 17 个数

A 类：0、3、6、……、48

B 类：1、4、7、……、49

C 类：2、5、8、……、50

取两个不同的数,使两数之和恰好是 3 的倍数的取法可分为 2 类

（1）从 A 类取 2 个数：有 C_{17}^2 种取法

（2）从 B 类和 C 类各取 1 个数：有 $C_{17}^1C_{17}^1$ 种取法

于是共有 $C_{17}^2+C_{17}^1C_{17}^1$=425 种取法

注意计数的分类往往有两种考虑

(1)由分步的不确定性导致要分类

(2)对待选对象的分类是常常是计数分类的根源

802、有 1 个老师，2 个女生，4 个男生，站在一排照相，四个男生身高均不相等，从高到底站成一排， 问有多少种方法？

解：分两步

第一步：在 7 个位置中选 3 个位置站男生有 C_7^3 种选法

第二步：在剩下的 3 个位置中排 1 个老师与 2 个女生有 A_3^3 种排法

于是方法总数是 C_7^3 A_3^3＝7×6×5＝210 种

816、
（1）5 个老师分进 3 个班,一个班至少 1 个老师,有几种方法.
先分三堆再做排列

解：（1）113 分三堆有 $\frac{C_5^1C_4^1}{2!}=10$,122 分三堆有 $\frac{C_5^2C_3^2}{2!}=15$

于是有 $(10+15)A_3^3=25\times6=150$

（2）再如,5 本同样的书分进 3 个班级,一个班级至少 1 本书,有几中方法.

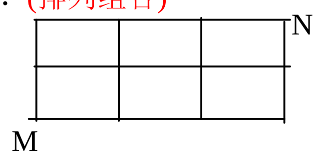
解：（2）用隔板法 $C_4^2=6$

（3）再如,99 个老师分进 55 个班,一个班至少 1 个老师,有几种方法
不解：我只会分堆再排列，有好方法的说一说
（4）99 本同样的书分进 55 个班级,一个班级至少 1 本书,有几中方法.

解：用隔板法 C_{98}^{54}

821、从一楼到二楼的楼梯共 10 阶，上楼时可以一步走一阶，也可以一步走两阶，若要 7 步走完，有多少种方法？
解：要 8 步走完于是应有 3 步要走 2 阶，于是从
第 1 步，第 2 步，第 3 步，第 4 步，第 5 步，第 6 步，第 7 步中选 3 步
走 2 阶，因此有 $C_7^3=35$ 种方法

822、某个城市中，M、N 两地之间有整齐的道路网，如果规定只能向东或向北两个方向沿途前进，则从 M 到 N 的不同走法有多少？(排列组合)
解：走近路必走 3 段横线，2 段纵线，共走五段线。
我把每线看成是一步，于是走近路只要走 5 步
在 5 步中选定 3 步走横线步就确定了一种走法



故有： $C_5^3=10$

862、(排列组合)
将 10 个相同的小球放入 7 个盒子中，有多少中不同的方法？

解： $C_{10+7-1}^6=C_{16}^6=8008$

871、(排列组合)
五人排一个 5 天的值日表，每天排一人值日，每人可以排多天或不排，但相连两天不能排同一个人，值日表排法的总数是多少？

第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天

解：第 1 天有 5 种排法
第 2 天有 4 种排法
第 3 天有 4 种排法
第 4 天有 4 种排法
第 5 天有 4 种排法

于是共有 5×4^4 种排法

872、(排列组合)
一次考试中，要求考生从试卷上的 9 个题目中选 6 个进行解答，要求至少包含前五个题目中的 3 个，则考生答题的不同选法的总数是多少

解：$C_5^3C_4^3+C_5^4C_4^2+C_5^5C_4^1$

960、(排列组合)

在 **6** 名运动员中，选 **4** 人参加 **400m** 接力，其中甲不跑第一棒，乙不跑第四棒，共有多少 种参赛方法

解(用排除法)：$A_6^4-A_5^3-A_5^3+A_4^2=A_4^2(24-5-5+1)=12\times15=180$

961、从 **10** 双鞋中任取 **8** 只，求下列事件的概率。
（**1**）取出的鞋都不成双。（**2**）取出的鞋恰好有两只成双。

答（**1**）$\dfrac{C_{10}^8\times2^8}{C_{20}^8}$　（**2**）$\dfrac{C_{10}^1C_9^6\times2^6}{C_{20}^8}$

962、有两排座位，前排 **11** 个座位，后排 **12** 个座位，现安排 **2** 人就座，规定前排中间的 **3** 个座位不能坐，并且这 **2** 人不左右相邻，那么不同排法的种数是（　）

A、**234**　**B**、**346**　**C**、**350**　**D**、**363**

答：本题解法很多人，主可从两个方面考虑

解 1：正面考虑

甲乙两人可坐的位置有后排 12 位，前排左 4 位，右 4 位，可按这三类位置分类

第一类：甲乙都坐后排，由于甲乙不邻，于是只能让甲乙插入 10 个球的两个不同的间隔中，有 A_{11}^2 种插入法

第二类：甲乙都坐前排左 4 位，由于甲乙不邻，于是只能让甲乙插入 2 个球的两个不同的间隔中，有 A_3^2 种插入法

第三类：甲乙都坐前排右 4 位，由于甲乙不邻，于是只能让甲乙插入 2 个球的两个不同的间隔中，有 A_3^2 种插入法

第四类：甲乙一人坐前排，一人坐后排，这样甲乙一定不邻，于是先分别在前后排各选一位，再让两人入坐，有 12×8× A_2^2

第五类：甲乙一人坐前排左 4 位，一人坐前排右 4 位，与第四类类似有 4×4× A_2^2

共有 346 种坐法

第五类：甲乙一人坐前排左 4 位，一人坐前排右 4 位，与第四类类似有 4×4× A_2^2

共有 346 种坐法

解 2：从反面考虑，两人相邻的情况只有 3 类

甲乙两人可坐的位置有后排 12 位，前排左 4 位，右 4 位，可按这三类位置分类

第一类：甲乙都坐后排，由于甲乙相邻，于是只能让甲乙插入 10 个球的同一个间隔中，有 C_{11}^1 A_2^2 种坐法法

第二类：甲乙都坐前排左 4 位，由于甲乙不邻，于是只能让甲乙插入 2 个球的同一个间隔中，有 C_3^1 A_2^2 种坐法

第三类：甲乙都坐前排右 4 位，与第二类一样有 C_3^1 A_2^2 种坐法

共有 $A_{20}^2-C_{11}^1A_2^2-C_3^1A_2^2-C_3^1A_2^2=A_2^2(C_{20}^2-C_{11}^1-C_3^1-C_3^1)=2(190-17)=346$(种)

963、(排列组合)

4 位同学参加竞赛，规定：每位同学必须从甲，乙两道题中任选一题作答，选甲题答对得 **21** 分，答错得 **-21** 分，选乙题答对得 **7** 分，答错得 **-7** 分，若 **4** 位同学的总分为 **0**，则这 **4** 位同学得分情况的种数是

A、48　　B、44　　C、36　D、24

解：得分情况有

第一类：**21、-7、-7、-7**　　　C_4^1 **=4**

第二类：**-21、7、7、7**　　　C_4^1 **=4**

第三类：**21、21、-21、-21**　　C_4^2 **=6**

第四类：**7、7、-7、-7**　　　C_4^2 **=6**

第五类：　**21、-21、7、-7**　　A_4^4 **=24**

种数共有 **44** 种

987、连接正方体的顶点可得 28 条线段，这 28 条线段可确定四面体的个数为多少？

解：$C_8^4-12=58$

（1）28 条线段中选 2 条确定四面体与 8 个顶点选 4 个顶点确定四面体是一一对应的

于是可将问题转为后者

（2）从 8 顶点中选 4 个顶点，有两种情况

其一可确定四点不共面

其二四点共面：四点共面的是正方体的 6 个面，与 6 个对角面

997、(排列组合)

从 1，2，3，4，5，6，…，19，20 中任取三个数组成等差数列，不同的取法有几种？

解：以 2 为中项的有 2×1 个，以 3 为中项的有 2×2 个,…，以 10 为中项的有 2×9 个

以 19 为中项的有 2×1 个, 以 18 为中项的有 2×2 个,…，以 11 为中项的有 2×9 个

共有 4×(1+2+3+…+9)＝180 个

1018、(排列组合)

6 名同学报考 A、B、C 三所院校，如果每所院校至少有 1 人报名，则不同的报名方法有多少种？

解法 1、把 6 位同学先分成 3 堆，后分到三所院校

分堆方法有 114，123，222 三种情况。

于是报名方法有种数是：

$$\frac{C_6^4C_2^1}{2!}\times 3!+C_6^1C_5^2C_3^3\times 3!+\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}\times 3!=90+360+90=540$$

解法 2：把 6 位同学任意分成 3 堆的分法数是：第二类斯特林数

$$S(6,3)=S(5,2)+3S(5,3)=2^4-1+3[S(4,2)+3S(4,3)]=15+3(2^3-1+3C_4^2)=90$$

于是报名方法有种数是：$90\times 3!=540$

1038、(排列组合)

过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线有（　　）

（A）18 对　　（B）24 对　　（C）30 对　　（D）36 对

解：三棱柱有 6 个顶点，于是可确定 $C_6^2=15$ 条直线

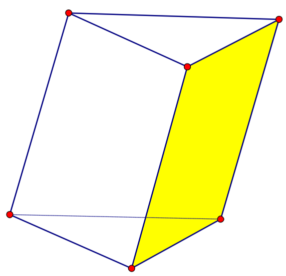
这 15 条直线可确定 $C_{16}^2=\dfrac{15\times 14}{2}=105$ 对直线

其中共面的直线对有 3 种情况

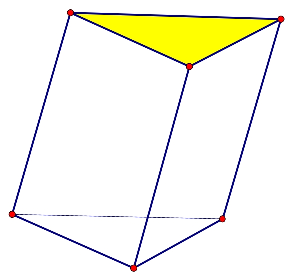
情况 1（图 1）：共在同一侧面内，一个侧面 4 个顶点可确定 $C_4^2=6$ 条直线，这 6 条直线可确定 $C_6^2=15$ 对直线，3 个侧面共有 $15\times 3=45$ 对直线

情况 2（图 2）：共在同一底面内，底面这 3 边可确定 $C_3^2=3$ 对直线，2 个底面共有 $2\times 3=6$ 对直线

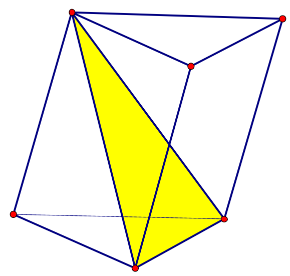
情况 2（图 2）：共在顶点与对棱构成的三角形内，这样的三角形共有 6 个，于是共有 $6\times 3=18$ 对直线



（图 1）



（图 2）



（图 3）

因此，异面直线有：105-45-6-18＝36 对

解 2：注意到每一个三棱锥对应着 3 对异面直线，从三棱柱的 6 个顶点中任取 4 个，有 $C_6^4=15$ 种取法，其中 4 点共面的有 3 种．三棱柱的 6 个顶点为顶点可构成 $C_6^4-3=12$ 个三棱锥，因而共有 $12\times 3=36$ 对异面直线

1065、(二式定理)

求满足 $C_n^0+C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n<50$ 的最大整数 n

解：设 $T=0C_n^0+C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$

则 $T=nC_n^n+(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2+\cdots+0C_n^0$

于是 $2T=n(C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n)=n\bullet 2^n$

$T=n\bullet 2^{n-1}$

$C_n^0+C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=T+1=n\bullet 2^{n-1}+1<50$

$n\bullet 2^{n-1}<49$，$4\bullet 2^3=32$，$5\bullet 2^4=80$，故最大 n=4

1066、(二式定理)

已知：$a,b\in R^{+},n>1$，,求证：$\frac{a^{n}+b^{n}}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^{n}$

证明：不妨设$a\geq b>0$，

$a^{n}+b^{n}=(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})^{n}+(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2})^{n}$

$=2[(\frac{a+b}{2})^{n}+\mathbf{L}]\geq 2(\frac{a+b}{2})^{n}$

故$\frac{a^{n}+b^{n}}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^{n}$，$\frac{a^{n}+b^{n}}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^{n}$

1076、(排列组合)

4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分配方案共有（ ）

A． 12 种　B． 24 种　C 36 种　D． 48 种

解：$C_{4}^{2}A_{3}^{3}=36$

1077、某校高二年级共有六个班级，现从外地转入 4 名学生，要安排到该年纪的两个班级且每班安排 2 名，则不同的安排方案种数为——

解 1：第一步：选定 2 个班：有$C_{6}^{2}=15$种选法

第二步：让选定 2 个班分别去选学生：有$C_{4}^{2}C_{2}^{2}=6$种选法

由分步计数原理得共有$C_{6}^{2}\ C_{4}^{2}C_{2}^{2}=90$安排方案

解 2：第一步：把 4 名学生分成 2 堆每堆 2 人有$\frac{C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{2!}$种分法

第二步：把每堆学生分别当成 1 个球，把 6 个不同的班当成 6 个框，于是相当于把 2 个不同的球投到 6 个不同的框有A_{6}^{2}种投法

由分步计数原理得共有$\frac{A_{6}^{2}C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{2}=90$安排方案

1081、(排列组合)

将标号为 1，2，3，⋯，10 的 10 个球放入标号为 1，2，3，⋯，10 的 10 个盒中，每个盒内放一个球，恰好 3 个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为（　　）A、120　B、240　C、360　D、720

解：解 1：第一步：选定 7 个盒子放相同标号的球：有$C_{10}^{7}=120$种选放方法

第二步：剩下 3 球 3 盒标号不一致，有 2 种放法

由分步计数原理得共有 120×2＝240 放法

故选 B

1088、(排列组合)

椭圆$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$的焦点在$y$轴上，且$m\in\{1,2,3,4,5\}$，$n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，则这样的椭圆的个数是___________

解：当$n\in\{1,2,3,4,5\}$时，有$C_5^2=10$种取法

当$n\in\{6,7\}$时，有$C_2^1C_5^1=10$种取法

这样的椭圆共有 **20** 种

1089、(排列组合)

某外语组有 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语，从中选出会英语和会日语的各一人，有多少种不同的选法？

解：某外语组有 9 人中，7 人会英语，3 人会日语

可得此外语组有 1 人既会英语又会日语，其中 6 人只会英语，2 人只会日语。

（1）1 人既会英语又会日语选去说英语，选说日语的有 2 种方法

（2）1 人既会英语又会日语选去说日语，选说英语的有 6 种方法

（3）1 人既会英语又会日语不被选中，选说英语的有 6 种方法，选说日语的有 2 种方法，故有 12 种方法

综上共有 20 种选法

1090、(二式定理)

求值$C_n^{5-n}+C_{n+1}^{9-n}$

解：$C_n^{5-n}+C_{n+1}^{9-n}=C_n^5+C_{n+1}^{9-n}$

$n\ge 5-n\ge 0\Rightarrow 3\le n\le 5$

$n+1\ge 9-n\ge 0\Rightarrow 9\ge n\ge 5$

故$n=5$，于是原式$=C_5^0+C_6^4=16$

1094、(排列组合)

正六边形的顶点和中心共 7 个点，以其中 3 个点为顶点的三角形共有___个。

解：从 7 个点中选选 3 个点组合数是$C_7^3=35$

排除顶点与中心共线的情况：3 条对角线

于是有$35-3=32$（个）

1095、(排列组合)

用正五棱柱的10个顶点中的5个做四棱锥的5个顶点，共可得到多少个四棱锥？解：

（1）从下底面选4个点为四棱锥的底面顶点，从上底面选1个点为四棱锥的顶点，

有 $C_5^4C_5^1=25$

（2）从上底面选4个点为四棱锥的底面顶点，从下底面选1个点为四棱锥的顶点，

有 $C_5^4C_5^1=25$

（3）以1个侧面为底面有6个四棱锥，5个侧面共30个四棱锥

（4）以1个垂直于底面对角面为底面有6个四棱锥，5个这样的对角面共30个四棱锥

（5）以1个不垂直于底面对角面为底面有6个四棱锥，10个这样的对角面共60个四棱锥

综上共有170个四棱锥

1096、(排列组合)

求证： $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

证明： $A_n^m+mA_n^{m-1}=m!C_n^m+m(m-1)!C_n^{m-1}=m!(C_n^m+C_n^{m-1})=m!C_{n+1}^m=A_{m+1}^m$

1097、(排列组合)

(1)解不等式 $A_8^x<6A_8^{x-2}$(2) $A_1^1+2A_2^2++3A_3^3+\cdots++nA_n^n$

解：（1） $A_8^x-6A_8^{x-2}=A_8^{x-2}[(10-x)(9-x)-6]=A_8^{x-2}(x-7)(x-12)<0$

$(x-7)(x-12)<0$， $7<x<12$， $x\in N$， $x\le 8$ 故 $x=8$

（2） $A_1^1+2A_2^2++3A_3^3+\cdots++nA_n^n$

$=(2-1)A_1^1+(3-1)A_2^2+(4-1)A_3^3+\cdots+[(n+1)-1]A_n^n$

$=A_2^2+A_3^3+A_4^4+\cdots+A_{n+1}^{n+1}-A_1^1-A_2^2-A_3^3+\cdots-A_n^n$

$=A_{n+1}^{n+1}-A_1^1=(n+1)!-1$

1098、已知 $A_{2n}^3=2A_{n+1}^4$，则 $\log_n 25=$（　　）

A、1　　B、2　　C、4　D、不确定

解1：做为选择题本题从选支入手也很好

解2： $2n(2n-1)(2n-2)=2(n+1)n(n-1)(n-2)$

$2(2n-1)=(n+1)(n-2)$， 得 $n=5$， $\log_5 25=2$

1112、(排列组合)

1、 将三种作物种植在如图 5 块试验田里（□□□□□），每块种植一种作物,

（1）且同一种作物在相邻的试验田中，不同的种植方法有 （ ）

A. 24 种　　B. 36 种　　C. 42 种　　D. 48 种

解：□□□□□

隔板法：$C_4^2 A_3^3 = 36$

（2）相邻的试验田种植不同作物，不同的种植方法有 （ ）

A. 24 种　　B. 36 种　　C. 42 种　　D. 48 种

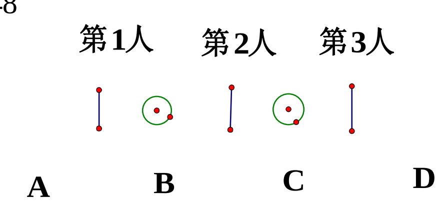
解：利用着色法排除

$3\times 2^4 - C_3^2 \times 2 = 42$ (排除只种两种的)

2、一条长椅上有 9 个座位，若 3 个人坐，要求相邻 2 人之间至少有 2 个空椅子，则共有（ ）种不同的坐法。

A、84　　B、72　　C、60　　D、48

解： 分步罗列



（1）先排好 3 个人有 A_3^3 种排法

（2）在第 1 人与第 2 人之间，

在第 2 人与第 3 人之间，先各放上 2 个空位

（3）还有 2 个空位，

2 个空位同时放入 A、B、C、D 之一有 4 种放法

2 个空位分开分别放入 A、B、C、D 之中的两处有 $C_4^2 = 6$ 种放法

于是共有 10 种放法

由分步计数原理得坐法数有 $A_3^3 \times 10 = 60$

1119、(二式定理)

$(x+\frac{1}{x}-1)^7$ 展开式的常数项=______

解：$(x+\frac{1}{x}-1)^7 = [(x+\frac{1}{x})-1]^7$ 展开式的 8“项”，只有如下 “项”才有常数项

$-C_7^1(x+\frac{1}{x})^6, -C_7^3(x+\frac{1}{x})^4, -C_7^5(x+\frac{1}{x})^2, -1$

故原式展开式的常数项＝$-C_7^1C_6^3 - C_7^3C_2^2 - C_7^5C_2^1 - 1$

120、(二式定理)

$(1-x^2)(1+x)^{10}$ 展开式中，x^6 项的系数是______

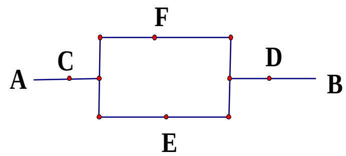
解 1：x^6 项＝$C_{10}^6 x^6 - x^2 C_{10}^4 x^4 = (C_{10}^6 - C_{10}^4)x^6$

解 2：$(1-x^2)(1+x)^{10} = (1-x)(1+x)^{11}$

x^6 项＝$C_{11}^6 x^6 - xC_{11}^5 x^5 = (C_{11}^6 - C_{11}^5)x^6$

1140、(概率)

某电子器件的电路中，在 A、B 之间有 C、D、E、F 四个焊点（如右图）如果焊点脱落，则有可能导致电路不通，今发现 A、B 间电路不通，则焊点脱落的不同情况有__________种



解：（1）有脱落的情况有：每个焊点有脱落与不脱落两种情况，故有 2^4 种情况

除去 1 个都不脱落的，故有脱落的情况有 $2^4-1=15$

（2）有脱落但仍通路的情况只有 2 种

于是电路不通的，焊点脱落的不同情况有 15-2=13

1141、(排列组合)

学校组织 3 名同学去 4 个工厂进行社会活动，其中工厂 A 必须有同学去实践，每个同学去哪个工厂可自行选择，则不同的分配方案共有___________

解：3 人无条件有 $4^3=64$ 种

3 人无一人到 A 厂有 $3^3=27$ 种

于是共有 $64-27=37$ 种

1144、(排列组合)

甲、乙、丙三个人值班，从星期一至星期六，每人值班两天，若甲不值星期一，乙不值星期六，则可排出不同的值班表有_____种

解：强框先行

星期一由乙、丙中的一人值班，由于乙又有附加条件（强球）于是要分类

1	2	3	4	5	6

第一类：星期一由乙值，乙另一天还有 4 种选择，接下来甲有 C_4^2 种选择

剩下 2 天由丙值班，此类有 $4\times6=24$ 种方法

第二类：星期一由丙值，接下来由乙选有 C_4^2 种选择，丙值还有 3 种选择，剩下 2 天由甲值班，此类有 $6\times3=18$ 种方法

综上共有 42 种

1146、(排列组合)

52 张牌算 24 点，一共可以出多少道不同的题？
设 A=1，J=11，Q=12，K=13。
不计牌的顺序，例如 2，3，4，5 和 3，4，5，2 算是同一题。数字可以重复，例如 1，5，5，5
是一道题。
解：52 张牌每张牌的点数有 1，2，…，13，每种点数各 4 张
从中取 4 张牌，只要确定了这 4 张牌的点数分布情况，计算 24 题目就确定了
为此分成以下 4 类

第 1 类：4 张牌恰有 1 种点数有 C_{13}^1 种取法

第 2 类：4 张牌恰有 2 种点数有 $C_{13}^2C_3^1$ 种取法

第 3 类：4 张牌恰有 3 种点数有 $C_{13}^3C_3^1$ 种取法

第 4 类：4 张牌恰有 4 种点数有 C_{13}^4 种取法

于是不同的题数有

$C_{13}^1+C_{13}^2C_3^1+C_{13}^3C_3^1+C_{13}^4=1820$

1153、(排列组合)

将字母 a、b、c、 d、 e 、f 排成一排，要求 a 与 b 不相邻，c 与 d 也不相邻，则其排法共有——
解 1：当 a 与 b 不相邻，要使 c 与 d 也不相邻有 $A_2^2A_3^2A_5^2=240$
当 a 与 b 相邻，要使 a 与 b 也不相邻，也要有使 c 与 d 也不相邻有 $A_2^2A_3^3\bullet A_2^1A_4^1=96$
于是有 $240+96=336$
解 2：用容拆原理

$A_6^6-2A_5^5A_2^2+4A_2^2A_2^2A_4^4-A_3^3A_2^1A_4^1A_2^2=240$

1155、(排列组合)

4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分配方案共有（ ）
A． 12 种 B． 24 种 C 36 种 D． 48 种
解 1：设 3 校分别为 A，B，C
1 校 2 人，2 校各 1 人，分两步
第一步：选 1 校分配 2 人有 $C_3^1C_4^2=18$ 种
第二步：选剩下 2 人校分配到剩下 2 校有 $A_2^2=2$ 种
故有：$18\times2=36$ 种

解 2：从 4 人中选 2 人捆在一起有 C_4^2 种选法

于是只要把 3 个不同的球排到 3 个不同的位置这行了

故有 $C_4^2A_3^3=36$ 种

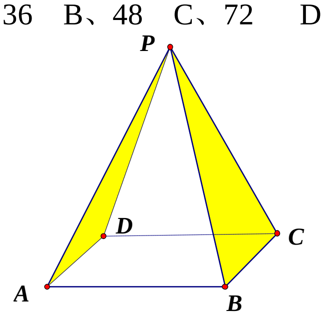
1171、(排列组合)

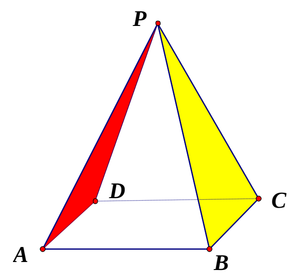
$A\cap B=\{1,3,5\}$, $A,B\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$,这样的集合 A,B 共有多少种？

解：看 2，4，6 这三个元素的走向
2 的走向有：（1）在 A 中不在 B 中（2）在 B 中不在 A 中(3)不在 A 中也不在 B 中 3 种情况
4，6 也类似，2、4、6 的走向确定了集合 A,B 也就确定了
于是有 3×3×3=27 种
1173、(排列组合)

现要给四棱锥 $P-ABCD$ 的五个面涂色，要求相邻的面涂不同的颜色，可供选择的颜色共有 4 种，则不同的涂色方案的和数共有(　　)

A、36　B、48　C、72　　D、96





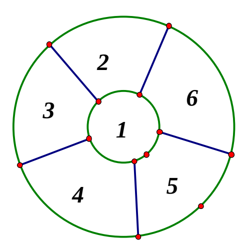
解：当面 PAD 与面 PBC 同色时，有 $A_4^1\times 3\times 2\times 2=48$

当面 PAD 与面 PBC 异色时，有 $A_4^2\times 2\times 1\times 1=24$

共有 72 种
1176、(排列组合)

如图，用 4 种不同的颜色给标有数字的 6 个区域染色，要求相邻的区域不能染色，则不同的染色方法有(　　　)

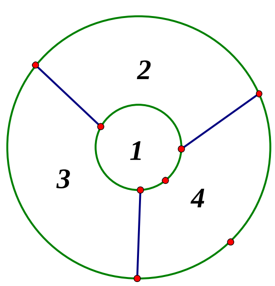
A、720　B、240　C、120　　D、96

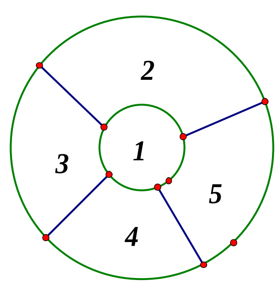


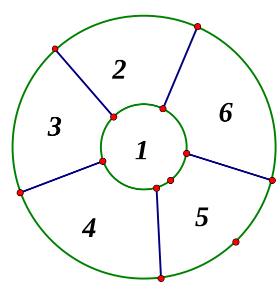
解 1：当 2 与 4 同色时，有 $4\times 3\times 2\times A_2^2=48$

当 2 与 4 同异色时，有 $A_4^3\times 1\times 3=72$

于是有120种
解 2：







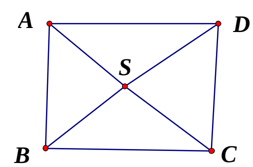
四种颜色为图 1 着色有 $4\times 3\times 2\times 1=24$
四种颜色为图 2 着色有 $4\times 3\times 2\times 2\times 2-24=72$
四种颜色为图 3 着色有 $4\times 3\times 2\times 2\times 2\times 2-72=120$

1185、(排列组合)

将一个四棱锥的每一个顶点染上一种颜色，并使同一条棱上的两端点异色，如果只有五种颜色可供使用，则不同的染色方法有多少种？

解：把图画成，这是一个环形着色问题，先染 S 点有 5 种方法

再染其它的 4 顶点，只能用 4 种颜色了



依次从 A、B、C、D 着色，这是一个四边形的着色问题

有 4×3^3 种方法，但最后一个有可能与第一个同色应扣除，

扣除的数目相当于涂三边形的方法数

有 $A_4^3=24$，于是所求的方法数是 $5(4\times 3^3-A_4^3)=420$ 种方法

1197、(概率)

6 人的生日恰在两个月中的概率为_______

解：$n=12^6$，$m=C_{12}^2(2^6-2)$

于是 $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{12}^2(2^6-2)}{12^6}=\dfrac{66\bullet 62}{12^6}$

1209、(排列组合)

王明、李斌和赵亮三位同学委托张军打听某高校自主招生信息，四人约定知道该信息者打电话通知未知者．某天他们之间共通了三次电话后，每人都获悉同一条某高校自主招生信息，那么张军首先知道该信息且第一个电话是张军打出的通话方案共有

A．16 种　　B．17 种　　C．34 种　　D．48 种

捕狐犬的解法:

排列组合要动脑子,乱算一气的话,即便答案正确,也是谋杀好题

考虑正方形的 4 个顶点,代表 4 个同学

把这 4 个点两两连起来,每条线段代表 1 次通话,共 $C_4^2=6$ 条

因为只通了 3 次电话,所以要"干掉"3 条线段

$C_6^3=20$

但必须排除从某个点出发的 3 条线段全被干掉的情况

4 个点,那就 4 种情况

∴$C_6^3-4=16$ 点评:

（1）想一想，这题你就能理解**捕狐犬 的解法了**

A,B,C,D 四小岛用 3 桥相连通，有几种建桥方按？

解：所有可能的桥有 $C_4^2=6$

选 3 桥 C_6^3，其中有孤岛的连结有 4 种

故有 $C_6^3-4=16$

（2）答 fddxl：①估计本题出题者的意思是只要确定好了每个收到信息者是由谁告诉他的就算作一种通话方案，因此在 4 面体中取 3 条棱可让四顶点连通就行，故有 C(6,2)-4=16

②如果不同的接电话顺序当算作不同的通话方案，本题可这样做：
第一步：先定出第 1、第 2、第 3 个接电话者，有 A（3，3）=6
第二步：定出每个接电话者是接谁的电话，第 1 个接电话者只能接张军打来的电话、第 2 个接电话者可有 2 种情况、第 3 个接电话者有 3 种情况
因此共有 6×6=36 种
（3）解答本题会有上面两种理解是自然的，因此从出题者的表述没法区分出是上述的哪一种,因此出题者对题意的表述不到位就抛出题目是不负责任的。

1218、(排列组合)

五项不同的工程由三个工程队全部承包下来，每队至承包一项工程，则不同的承包方案有几种？

解 1：每队至少一项于是有

1，1，3 分配，方案数有 $C_3^1C_5^3A_2^2=60$

1，2，2 分配，方案数有 $C_3^1C_5^2C_3^2=90$

共有 150 种

解 2：每队至少一项于是有

1，1，3 分配，方案数有 $\dfrac{C_5^3C_2^1}{A_2^2}\times A_3^3=60$

1，2，2 分配，方案数有 $\dfrac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\times A_3^3=90$

共有 150 种

解 3：每队至少一项方案数有 $3^5-C_3^12^5+C_3^21^5=243-96+3=150$

1257、(排列组合)

将 4 个不同的球任意投入 4 个不同的盒子里（每个盒子球不限），则恰有一个 空盒的概率为多少？

解法 1、先求符合条件的投法数
依题意：一空盒，一盒子 2 球，另两盒子各一球
先把从 4 个球中选 2 个捆起来当成一球，问题转化为把 3 个不同的球投到 4 个不同的框中每至多一球的投法数＝$C_4^2A_4^3=144$

总投法数 4^4，概率＝$\dfrac{144}{4^4}=\dfrac{9}{16}$

解 2：选空盒有 $C_4^1=4$ 种选法，选一盒投入 2 球有 $C_3^1C_4^2=18$ 选法

剩下两球投入两盒每盒一球有 $A_2^2=2$ 投法，故有 $4\times18\times2=144$

解 3：将 4 个不同的球分成 3 堆一堆 2 球，另两堆各一球有 $\dfrac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$ 种分法

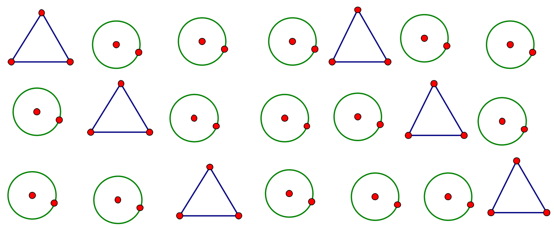
把每一堆当成一个球投到 4 个不同的框中每至多一球的投法数＝$A_4^3=24$
于是先求符合条件的投法数＝$6\times24=144$

1266、(排列组合)

4 个男同学，3 个女同学站成一排。

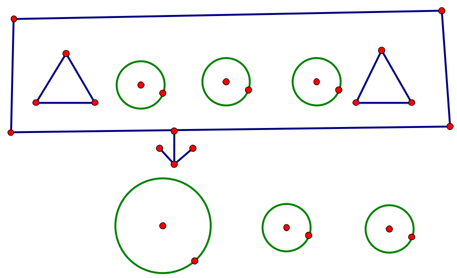
其中甲，已两同学之间必须恰有 3 人，有多少种不同的排法？

解 1



$3A_5^5A_2^2=720$

解 2：



$A_5^3A_2^2A_3^3=720$

1282、(排列组合) (竞赛)

若 m，n 为自然数且 m>n，A={1,2,3,4，⋯，m}，B={1,2,3,4，⋯，n}，B 与 C 的交集非空，集合 C 与 B 的交集是集合 A 的子集，求 C 的个数?

解：集合 C 的元素可分为两部分

第一部分组成 B={1,2,3,4，⋯，n}的非空真子集

第二部分组成 D={n+1,n+2,⋯，m}的子集

第一部分有 2^n-1 种选择

第二部分有 2^{m-n} 种选择

于是集合 C 的个数共有 $2^{m-n}(2^n-1)$ 个

1323

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22427&start=0&show=25

设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有（　　）

A．50 种　　B．49 种　　C．48 种　　D．47 种

解法 1：按 A 中最大者分类

当 A 中最大者为 1 时，$1\times(2^4-1)=15$ 种

当 A 中最大者为 2 时，$2^1\times(2^3-1)=14$ 种

当 A 中最大者为 3 时，$2^2\times(2^2-1)=12$ 种

当 A 中最大者为 4 时， $2^3\times(2^1-1)=8$种

所以共有 49：选 B。

解法 2：按 A，B 元素的总个数分类

$C_5^2+2C_5^3+3C_5^4+4C_5^5=49$

推广：若 I 中有 n 个元素，则有

$T_n=C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+\cdots+(n-1)C_n^n$

$T_n=(n-1)C_n^n+(n-2)C_n^{n-1}+(n-3)C_n^{n-2}+\cdots+C_n^2$

相加得 $2T_n=(n-2)(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)+2=(n-2)\times2^n+2$

于是 $T_n=(n-2)\times2^{n-1}+1$

1360

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23683&show=0

一个圆上有 20 个点,这些点的连线在圆内的交点个数最多是多少个?

A、4845 B、9690 C、1140 D、17955

解：圆内的 1 个交点对应圆上 4 个点，圆上 4 个点对应圆内的 1 个交点

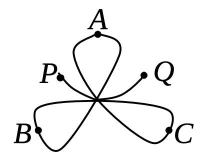
交点个数最多是 $C_{20}^4=4845$

1382

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=285410&pid=2968604&page=1&extra=pageD1#pid2968604

一个旅游景区如右图所示，某人从点 P 处进，点 Q 处出，游览三个景点 A,B,C 及沿途风光，则不同的游览线路种数最少为

A. 6 B. 8 C. 12 D. 48



解：走第一圈有 3 种选圈法 2 种走法，

走第二圈有 2 种选圈法 2 种走法，

走第三圈有 1 种选圈法 2 种走法，故有 6×4×2＝48 种

1389

http://bbs.pep.com.cn/thread-286138-1-3.html

用四种不同的颜色给正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的六个面染色，要求相邻两个面涂不同的颜色，且四种颜色均用完，则所有不同的涂色方法共有

A． 96 种 B． 72 种 C． 48 种 D． 24 种

解：设上下两面同色时，上下面有 4 种选法，3 种为四个侧面着色必有相对两面同色有 2C(3,1)A(2,2)＝12 方法，故上下两面同色时有 4×12＝48 种

设上下两面不同色时，上下面有 4×3 种选法，2 种色着四个侧面只有 2 种方法，故上下两面不同色时有 12×2＝24 种

共有 72 种

1400

http://bbs.pep.com.cn/thread-287034-1-1.html

5 名男生与 5 名女生排成一排

（1）男生甲与男生乙中间必须而且只能排 2 名女生，有几种排法？

（2）男生甲与男生乙中间必须而且只能排 2 名女生，同时女生又不能排在队伍的两端，有几种排法？

解：(1)A(2,2)A(5,2)A(7,7)

(2) A(2,2)A(5,2)A(4,2)A(5,5)

1407

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=283089&page=1#pid2943934

只用１，２，３三个数字组成一个四位数，规定这三个数必须同时使用，但同一数字不能相邻出现，这样的四位数有（　　　）

Ａ、６个　　　Ｂ、９个　　　　Ｃ、１８个　　　　Ｄ、３６个

解 1：先选一个使用 2 次的有 C_3^1 种

再排不重复的 2 个 A_2^2

后插入 2 个相同的 C_3^2

结果 $C_3^1A_2^2C_3^2=18$

解 2、只考虑相邻不同数有３×２×２×２＝２４种

只使用２个有 C(3，2)×２＝６种，

于是３个都用有２４－６＝１８种

1416、

http://bbs.pep.com.cn/thread-289473-1-1.html

反复抛一个骰子，依次记录下每一次点数，当记有 3 个不同点数时即停止，若抛 5 次恰好停止，则所有不同结果种数有多少?

解：前 4 次只有 2 种点数 $C_6^2(2^4-2)$ 有种情况

第 5 次有 4 种选择

故共有 $C_6^2(2^4-2)\times 4=840$

1434、

http://bbs.pep.com.cn/thread-292099-1-2.html

一排有 7 个座位，让甲、乙、丙三人就坐。要求甲、乙之间至少有一个空位，且甲和丙之间也至少有一个空位，则不同的做法有几种？

解 1：甲在乙丙中间 $C_5^3A_2^2=20$，

甲在乙丙的左边， $C_6^3A_2^2=40$，

甲在乙丙的右边， $C_6^3A_2^2=40$

故总共有 $20+40+40=100$

解 2：用容斥 $A_7^3-2A_2^2A_6^2+A_2^2A_5^1=210-120+10=100$

1446、

http://bbs.pep.com.cn/thread-291390-1-1.html

在一块并排 10 垄的田地上选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物，每种作物种植一垄，为有利于作物生长，要求 A、B 之间间隔不得少于 6 垄，则其概率是多少？

解：你先从这十垄空地中去除六垄，那么就只剩下四垄了，在这四垄中先选两垄种下 A、B 两作物，再把这六垄还原就行了，是不是这个结果：$A_4^2=12$