廖老师网上千题解答分类二十二、超纲排二概

120、数$\left(5+\sqrt{24}\right)^{2n}\in N^{+}$的个位数字是________(联赛)

解：由二项式定理知

$\left(5+\sqrt{24}\right)^{2n}+\left(5-\sqrt{24}\right)^{2n}\in N^{+}$

$\left(5+\sqrt{24}\right)^{2n}+\left(5-\sqrt{24}\right)^{2n}\equiv 2(\sqrt{24})^{2n}$ （mod10）

$=2^{n+1}\bullet 12^{n}\equiv 2^{2n+1}$ （mod10）

当 n=2k(k$\in N^{+}$)时，$2^{2n+1}=2^{4k+1}=16^{n}\bullet 2\equiv 2$ （mod5）

$\left(5+\sqrt{24}\right)^{2n}+\left(5-\sqrt{24}\right)^{2n}$的个位数字为 7 或者 2

42、已知直线$ax+by=1(a,b$不全为零$)$与圆$x^2+y^2=50$有公共点，且公共点的横纵坐标均为整数，那么这样的直线共有(　　)

A、66 条　B、66 条　C 、74 条　D 、78 条

解：$x^2+y^2=50$的整点共有 12 个

$(5,\pm5),(-5,\pm5),(1,\pm7),(-1,\pm7),(7,\pm1),(-7,\pm1)$

由两点确定的直线$ax+by=1$共有$C_{12}^{2}=66$条，去掉过原点的直线 6 条

由 1 点确定的直线$ax+by=1$有 12 条切线

综上满足条件的直线共有 66-6+12＝72 条

64、设集合$M=\{1,2,3,\ldots,1000\}$，对 M 的任一非空子集 Z，令aZ表示 Z 中最大数与最小数之和，那么所有的aZ的算术平均值是多少？

解：以 1 为最小值的集合有2^{999}个，以 2 为最小值的集合有2^{998}个，

以 2 为最小值的集合有2^{997}个，……以 1000 为最小值的集合有2^{0}个

因此所有 M 的非空子集子的所有最小值的和为

$1\times2^{999}+2\times2^{998}+3\times2^{997}+\cdots+1000\times2^{0}$

同理，所有 M 的非空子集子的所有最大值的和为

$1000\times2^{999}+999\times2^{998}+998\times2^{997}+\cdots+1\times2^{0}$

故所有的aZ的和为 1001（$2^{999}+2^{998}+2^{997}+\cdots+2^{0}$）$=1001(2^{1000}-1)$，

M 的非空子集子有$(2^{1000}-1)$个，

故所有的aZ的算术平均数为$\dfrac{1001(2^{1000}-1)}{(2^{1000}-1)}$＝1001

132、$1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997$ 的末三位数是______________(联赛)

解：$125\,|\,1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997$

四个连续奇数的积$\equiv1$（mod8）

$\because 1997=499\times4+1$

$\therefore 1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997\equiv1\times1=1\equiv625$（mod8）

又$1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997\equiv0\equiv625$（mod125）

而（8，125）=1

故$1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997\equiv625$（mod1000）

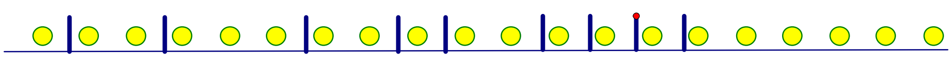
所以$1\bullet3\bullet5\bullet\cdots\bullet1997$ 的末三位数是 625

00 空间的是正确答案，做数学题粗心不得

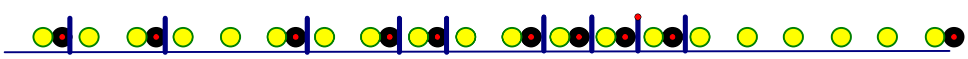
507、10 个女生和 30 个男生坐成一圈,任意两个女生间至少坐两个男生,有多少种不同的坐法? (排列组合) (联赛)

解：一步、先求把 30 个相同的球排成一排用 9 块放隔板分隔成 10 份，每份至少 2 个球；可以这样做：

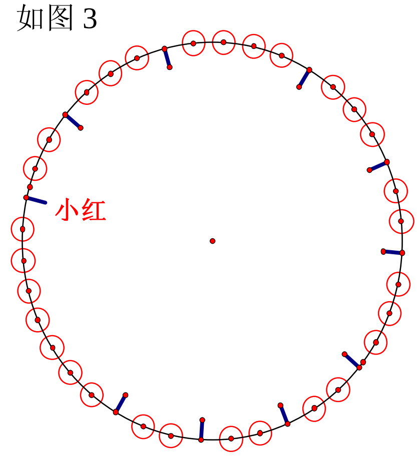
（1）先把把 20 个相同的球排成一排用 9 块隔板分隔成 10 份，每份至少 1 个球；分隔方法有 C_{19}^{9} 种，如下图 1



（2）然后每份中插队入 1 球。这样每份就至少 2 个球；由于是相同的球，因此只能算 1 插入方法。如下图 2



二步、设 10 个女生之一为小红，让小红先坐，如图小线段，把图 2 的小球与隔板按原有的顺序按顺时方向与小红围成一圈。如图 3



三步、让除小红外的 9 个女生在隔板的位置上排列，让 30 个男生在小球的位置上排列。排列方法数有 $A_9^9 A_{30}^{30}$

综上所述坐法数有 $C_{19}^{9}\,A_9^9 A_{30}^{30}=A_{19}^{9}A_{30}^{30}$

512、将数字之和为 7 的正整数从小到大排成一列，则第 2005 项是多少？

(排列组合) (联赛)

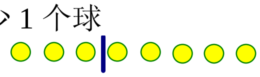
解：（1）数字和为 7 的 1 位数的个数是 1 个

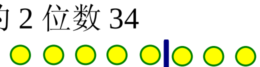
数字和为 7 的 2 位数的个数是

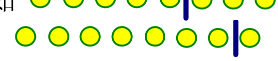
方程 $x_1+x_2=7\ (x_1\ge1,\ x_2\ge0,\ x_1,x_2\in N)$ 的解的个数

也是 $x_1+(x_2+1)=8\ (x_1\ge1,\ x_2\ge0,\ x_1,x_2\in N)$ 的解的个数

相当于把 8 当成 8 个相同的小球，排成一排，用 1 块隔板分隔成 2 份，每份至少 1 个球

如  得一组解：$x_1=3$，$x_2+1=5(\text{即}x_2=4)$，对应着一个数字和为 7 的 2 位数 34

又如  对应着 2 位数 52

再如  对应着 2 位数 70

因此，数字和为 7 的 2 位数的个数是是 C_7^1

数字和是为 7 的 1 位数或 2 位数共有$1+C_7^1=C_8^1$个

（2）数字和为 7 的 3 位数的个数是

方程$x_1+x_2+x_3=7\ (x_1\ge 1,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_1,x_2,x_3\in N)$的解的个数

也是$x_1+(x_2+1)+(x_3+1)=9\ (x_1\ge 1,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_1,x_2,x_3\in N)$的解的个数

相当于把 9 当成 9 个相同的小球，排成一排，用 2 块隔板分隔成 3 份，每份至少 1 个球

如 ○○|○○○|○○○○ 得$x_1=2$，$x_2+1=3(即x_2=2)$，$x_3+1=4(即x_3=3)$对应着一个数字和为 7 的 3 位数 223

因此，数字和为 7 的 3 位数的个数是C_8^2

数字和为 7，且位数小于或等于 3 的数的个数是$C_8^1+C_8^2=C_9^2$

（3）数字和为 7，且位数小于或等于 3 的数的个数是：

方程$x_1+x_2+x_3=7\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_1,x_2,x_3\in N)$的非负整数解的个数，方程$x_1+x_2+x_3=7$可化为

$(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)=7+3$

令$y_1=x_1+1, y_2=x_2+1, y_3=x_3+1$上面的方程化为

$y_1+y_2+y_3=10\quad (y_1\ge 1,\ y_2\ge 1,\ y_3\ge 1,\ y_1,y_2,y_3\in N^+)$

方程$x_1+x_2+x_3=7$非负整数解的个数就是

方程$y_1+y_2+y_3=10$的正整数解的个数C_9^2

也就是说数字和为 7 的“3 位数”（允许最高位数字为零）共有C_9^2

（4）一般地，数字和为 m，且位数小于或等于k的数的个数是方程

方程$x_1+x_2+\cdots+x_k=m\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \cdots x_k\ge 0,\ x_1,x_2,\cdots x_k\in N)$的非负整数解解的个数，也就是方程

$(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)+\cdots+(x_k+1)=m+k\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \cdots x_k\ge 0,\ x_1,x_2,\cdots x_k\in N)$

的解的个数

即是方程是$y_1+y_2+\cdots+y_k=m$ 的正整数解的个数C_{m+k-1}^{k-1}，

记$M(k)=C_{m+k-1}^{k-1}$，

则数字和为 m 的“k 位数”（允许最高位数字为零）共有$M(k)=C_{m+k-1}^{k-1}$

这里的加了双引号的“k 位数”是允许最高位数字为零的“k 位数”

（5）当$m=7$时$M(k)=C_{6+k}^{k-1}$

$M(1)=C_7^0=1$，$M(2)=C_8^1=8$，$M(3)=C_9^2=36$，$M(4)=C_{10}^3=120$

$M(5)=C_{11}^4=330$，$M(6)=C_{12}^5=792$，$M(7)=C_{13}^6=1716$

于是知道最大的 7 位数 7000000 是第1716项

（6）还要考虑形如$\overline{1abcdefg}$这样的 8 位数

于是我们只要考虑数字和为 6 的“七位数”的个数$\overline{abcdefg}$

当$m=6$时$M(k)=C_{5+k}^{k-1}$，$M(7)=C_{12}^6=924$，$1716+924>2005$

$M(6)=C_{11}^5=462$，$1716+452>2005$

$M(5)=C_{10}^4=210$，$1716+210=1926$

于是知道形如$\overline{100cdefg}$的 8 位数的最大者 10060000 为第1926项

（7）又要考虑形如$\overline{101cdefg}$这样的 8 位数

于是我们只要考虑数字和为 5 的“五位数”的个数 $\overline{cdefg}$

当 $m=5$ 时 $M(k)=C_{4+k}^{k-1}$， $M(1)=C_5^0=1$， $M(2)=C_6^1=15$，

$M(3)=C_7^2=21$， $M(4)=C_8^3=56$， $M(5)=C_9^4=126$

于是知道形如 $\overline{1010defg}$ 的 8 位数的最大者 10105000 为第 1982 项

（8）要考虑形如 $\overline{1011defg}$ 这样的 8 位数

于是我们只要考虑数字和为 4 的“四位数” $\overline{defg}$ 的个数

当 $m=4$ 时 $M(k)=C_{3+k}^{k-1}$， $M(1)=C_4^0=1$， $M(2)=C_5^1=5$，

$M(3)=C_6^2=15$

于是知道形如 $\overline{10110efg}$ 的 8 位数的最大者 10110400 为第 1997 项

（9）最后要考虑形如 $\overline{10111efg}$ 这样的 8 位数

于是我们只要考虑数字和为 3 的“3 位数” $\overline{efg}$ 的个数

当 $m=3$ 时 $M(k)=C_{2+k}^{k-1}$， $M(1)=C_3^0=1$， $M(2)=C_4^1=4$，

于是知道形如 $\overline{101110fg}$ 的 8 位数的最大者 10111030 为第 2001 项

第 2002 项是 10111102，第 2003 项是 10111111，第 2004 项是 10111120

第 2005 项是 10111201

这种题目还是编个程序让计算机去算更好

513、做一个更简单的题目：2005 年高中数学联赛一试第 12 题

若自然数 a 的各位数字之和为 7，则称 a 是“吉祥数”。将所有“吉祥数”从小到大排成一列：a_1、a_2、$a_3\cdots$，若 a_n=2005，则 a_{5n}=______(排列组合) (联赛)

解：（1）数字和为 7 的“3 位数”（允许最高位数字为零）的个数是

$C_9^2=36$ 个，于是可知最大的 3 位数 700 是第 36 项

（2）考虑形如 $\overline{1abc}$ 的 4 位数

于是我们只要考虑数字和为 6 的“3 位数” $\overline{abc}$ 的个数

$C_8^2=28$ 个，

于是知最大的形如 $\overline{1abc}$ 的 4 位数 1600 是第 $36+28=64$ 项

因此 2005 是第 65 项，故 $n=65$， $5n=325$

（3）数字和为 7 的“5 位数”（允许最高位数字为零）的个数是

$C_{11}^4=330$，

由此可知于是可知最大的 4 位数 70000 是第 330 项

因此 $a_{329}=61000$， $a_{328}=60100$， $a_{327}=60010$， $a_{326}=60001$，

$a_{325}=52000$，答 $a_{5n}=52000$

583、1 到 9 围成一圈，与三同余的数不相邻，问有几种排法

(排列组合) (高考不要求)

解：先把 1 到 9 分成三类

1、4、7　　　2、5、8　　　　3、6、9

第 1 类、让 1 坐好，4，7 在圆上排列，有 A_2^2 种排法（图 1）

接着 2，5，8 分别排在三条弧上，有 A_3^3 种排法（图 2）

在六条弧上排 3，6，9 有 A_6^3 种排法（图 3）,共有 $A_2^2\ A_3^3\ A_6^3 = 12\times120 = 1440$

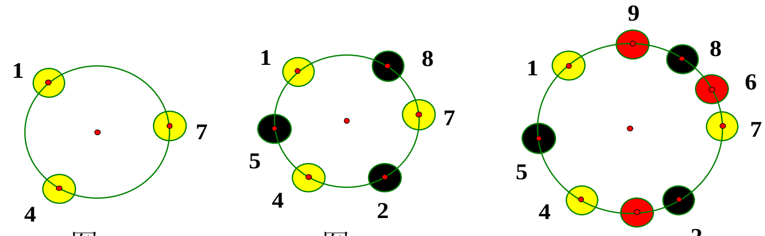


图　图　图

第 2 类：让 1 坐好，4，7 在圆上排列，有 A_2^2 种排法（图 1）

接着 2，5，8 分别排在两条弧上，有 $C_3^1A_3^1C_2^1A_2^2 = 36$ 种排法（图 4）

最后排 3，6，9 时，要把（图 4）的 1，4 隔开，又要把 2，5 隔开，

3，6，9 有 $A_3^2A_4^1 = 24$ 种排法（图 5）

总之第 2 类有 $2\times36\times24 = 1728$ 种排法

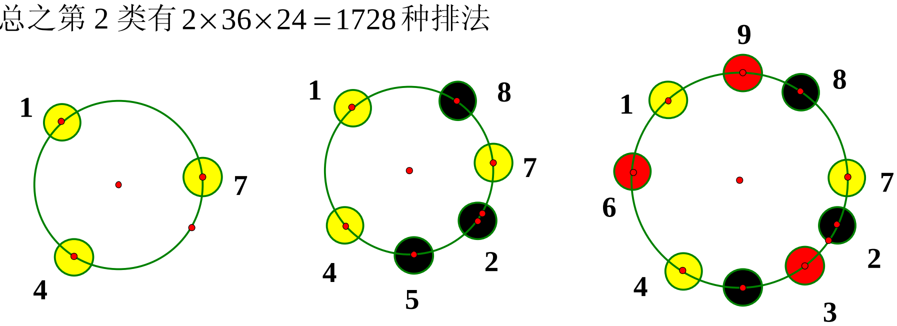


图 4　图 5

综上按要求排一圈的方法数有 1440+1728＝3168

608、**题目：**甲乙两个围棋队各 5 名队员按事先排好的顺序进行擂台赛。双方的 1 号队员先赛，负者被淘汰，然后负方的 2 号队员再与对方获胜队员再赛，负者又被淘汰，一直这样进行下去，直到有一方队员全被淘汰时，另一方获胜。假设每个队员的实力相当，则甲方 4 名队员被淘汰且最后战胜乙方的概率是多少？(概率)(争议)

解 1：因为比赛要淘汰 9 人，因此要比赛要进行 9 局，分成 5 种情况

第一种：甲方前 4 名队员在恰好在前 4 局被淘汰，且最后战胜乙方的概率是 $(\frac{1}{2})^9$

第二种：甲方前 4 名队员在恰好在前 5 局被淘汰，且最后战胜乙方的概率是

$C_4^3(\frac{1}{2})^9$

第三种：甲方前 4 名队员在恰好在前 6 局被淘汰，且最后战胜乙方的概率是

$C_5^3(\frac{1}{2})^9$

第四种：甲方前 4 名队员在恰好在前 7 局被淘汰，且最后战胜乙方的概率是

$C_6^3(\frac{1}{2})^9$

第五种：甲方前 4 名队员在恰好在前 8 局被淘汰，且最后战胜乙方的概率是

$$C_7^3(\frac{1}{2})^9$$

因此，甲方 4 名队员被淘汰且最后战胜乙方的概率是

$$(\frac{1}{2})^9+C_4^3(\frac{1}{2})^9+C_5^3(\frac{1}{2})^9+C_6^3(\frac{1}{2})^9+C_7^3(\frac{1}{2})^9=\frac{35}{256}$$

解 2：因为比赛要淘汰 9 人，因此要比赛要进行 9 局

在前 8 局甲方有 4 队要被淘汰出局共有 $C_8^4=70$ 种情况

于是甲方 4 名队员被淘汰且最后战胜乙方的概率是 $C_8^4(\frac{1}{2})^9=\frac{35}{256}$

解 3、一共比赛了 9 场，并且在最后一场是甲方的 5 号队员战胜乙方的 5 号队员，而甲方的前 4 名队员在前 8 场比赛中被淘汰，也就是在 8 次独立实验中，甲方队员负 4 次，根据 8 次重复独立实验中该事件恰好发生 4 次的概率公式得 $C_8^4(\frac{1}{2})^4(1-\frac{1}{2})^4=C_8^4(\frac{1}{2})^8$

第 9 局甲方的 5 号队员战胜乙方的 5 号队员的概率为 $\frac{1}{2}$

于是此事件的概率为 $C_8^4(\frac{1}{2})^8\times\frac{1}{2}=\frac{35}{256}$

评注：解 1、解 2、解 3 是相同的解法，因为 $C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3=C_8^4$

从 1 号 2 号 3 号 4 号 5 号 6 号 7 号 8 号中选选取 4 个号码
可分为从 1 号 2 号 3 号 4 号选，从 1 号 2 号 3 号 4 号 5 号要选 5 号，
从 1 号 2 号 3 号 4 号 6 号要选 6 号，……

解 4（错解）：
设有一排 10 个座位，分别为 1 到 10 号。
第一个败的坐 1 号座位，第二个败的坐 2 号座位，…
第 9 个败下的坐 9 号位，最后的胜者坐 10 号位

这样一共就有 C_{10}^5 种坐法。

现甲方 4 名队员被淘汰且最后战胜乙方，
则说明 10 号座位是甲方最后一名出场队员就坐，而 9 号座位是乙方最后一名出场队员就坐，这样有 $C_8^4\times1$ 种可能。因此，所求概率为 $\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{18}$

说明：当时这题在网上的讨论很激烈，我认为**解 4 中的每**一种坐法不是等可能的，因此是错解，这就是当时我为什么要给出解法 1 的原因。

616、已知$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_0}^2}{a_1}$的值是多少？(二式定理)(极限)

解：$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

$=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n$

则$a_0=f(0)=1+1+1+\cdots+1=n$

$a_1=1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_n^1=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_0}^2}{a_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+1)}=2$

703、已知集合 A={1,2,3,⋯,10}

设 A 的 3 个元素子集中,3 个元素的和分别为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$.求$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

(排列组合) (竞赛)

解：A 的 3 个元素的子集中

含元素 1 的集合有C_9^2个

含元素 2 的集合有C_9^2个

……　　……

含元素 10 的集合一样有C_9^2个

于是$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(1+2+3+\cdots+10)C_9^2=\dfrac{10\times11}{2}\times\dfrac{9\times8}{2}=1980$

705、证明：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$(二式定理)

证明：$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$　在$(1+x)^n(1+x)^n$的展开式中

x^n项$=C_n^0C_n^nx^n+C_n^1xC_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^2x^2C_n^{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_n^nx^nC_n^0$

$=[(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2]x^n$

在$(1+x)^{2n}$的展开式中x^n项$=C_{2n}^nx^n=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

于是$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

795、求 n 位十进制正整数数中，出现偶数个 5 的数（不包括没有 5 的数）的个数(数论) (排列组合)

解：

（1）n 位数中恰好 2 个 5

$C_n^2 \bullet 9^{n-2} - C_{n-1}^2 \bullet 9^{n-3}$

（2）n 位数中恰好 4 个 5：$C_n^4 \bullet 9^{n-4} - C_{n-4}^2 \bullet 9^{n-5}$

（3）n 位数中恰好 6 个 5：$C_n^6 \bullet 9^{n-6} - C_{n-1}^6 \bullet 9^{n-7}$

……

于是总个数

$= C_n^2 \bullet 9^{n-2} - C_{n-1}^2 \bullet 9^{n-3} + C_n^4 \bullet 9^{n-4} - C_{n-1}^2 \bullet 9^{n-5} + C_n^6 \bullet 9^{n-6} - C_{n-1}^6 \bullet 9^{n-7} + \cdots\cdots$

899、(排列组合)

问题：5 个球与 n 盒子的编号都分别是 1、2、3、4，5，把这 5 个球投入 5 盒子中每合 1 球，5 个球的编号与盒子编号全不相同的投法数是多少？

解：画树形图列出

1 号盒子投入 2 号球，有 11 种投法

1 号盒子投入 3 号球，也有 11 种投法

1 号盒子投入 4 号球，也有 11 种投法

1 号盒子投入 5 号球，也有 11 种投法

于是共有 44 种投法

899、(组合数学)(知识介绍) (高考不要求)

问题：5 个球与 n 盒子的编号都分别是 1、2、3、4，5，把这 5 个球投入 5 盒子中每合 1 球，5 个球的编号与盒子编号全不相同的投法数是多少？

讲解：1、先介绍一下容斥原理

（1）记号：把有限集 A 的元素的个数记为$|A|$，

如若 $A=\{a,b,c\}$，则$|A|=3$，若 $A=\{3,4,9,8\}$，则$|A|=4$

（2）两个集合的容斥原理（两个集合的并集的元素个数）

若 A_1, A_2 是 2 个有限集，则：$|A_1 \cup A_2| = (|A_1| + |A_2|) - (|A_1 \cap A_2|)$

（3）三个集合的容斥原理（三个集合的并集的元素个数）

若 A_1, A_2, A_3 是 3 个有限集，则：

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$

（4）n 个集合的容斥原理（n 个集合的并集的元素个数）

若 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 是 n 个有限集，则：

$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \cdots + A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|)$

$+(|A_1\cap A_2\cap A_n|+|A_1\cap A_2\cap A_3|+\cdots+|A_2\cap A_{n-1}\cap A_n|)-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$

（5）并集的补集的元素个数

若 n 个有限集 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 都是全集 S 的子集，则

则 $|C_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ 即

$|(C_SA_1)\cap(C_SA_2)\cap\cdots\cap(C_SA_n)|=|S|-(|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|)$

2、解决本题

把编号为 1、2、3、4、5 的 5 个球，投入编号为 1、2、3、4、5 的五个盒子中的投法共有 A_5^5 种，把这 A_5^5 种投法看成全集 S，则 $|S|=A_5^5$

设 A_1 是 1 号盒子投 1 号球的投法组成的集合， A_2 是 2 号盒子投 2 号球的投法组成的集合， A_3 是 3 号盒子投 3 号球的投法组成的集合， A_4 是 4 号盒子投 4 号球的投法组成的集合， A_5 是 5 号盒子投 5 号球的投法组成的集合，

则 $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=|A_5|=A_4^4$ ，集合有 C_5^1 个

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_2|=+\cdots=|A_4\cap A_5|=A_3^3$，交集有 C_5^2 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=\cdots=|A_3\cap A_4\cap A_5|=A_2^2$，交集有 C_5^3 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|=\cdots=A_1^1$，交集有 C_5^4 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=1$，交集有 C_5^5 个

由容斥原理

$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=C_5^1A_4^4-C_5^2A_3^3+C_5^3A_2^2-C_5^4A_1^1+C_5^5$

$=C_5^4A_4^4-C_5^3A_3^3+C_5^2A_2^2-C_5^1A_1^1+C_5^0=A_5^4-A_5^3+A_5^2-A_5^1+A_5^0$

于是 5 个球的编号与盒子编号全不相同的投法有

$|S|-(|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|)=A_5^5-(A_5^4-A_5^3+A_5^2-A_5^1+A_5^0)$

$=A_5^5-A_5^4+A_5^3-A_5^2+A_5^1-A_5^0=A_5^3-A_5^2+A_5^1-A_5^0=44$

3、一般的结论

n 个球与 n 盒子的编号都分别是 1、2、3、…，n，把 n 个球投入 n 盒子中每盒 1 球，n 个球的编号与盒子编号全不相同的投法数是：

$$A_n^n-A_n^{n-1}+A_n^{n-2}-\cdots+(-1)^nA_n^0$$

903、(组合数学) (高考不要求)

规定 $C_x^m=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-m+1)}{m!}$ 其中 $x\in R,m$ 为正整数，且 $C_x^0=1$，

这是组合数 C_n^m （m,n 为正整数且 $m\le n$）的推广

(1)是否能把组合数的两个性质推广到 C_x^m

(2)已知组合数 C_n^m 为正整数，证明：当 $x\in Z$，m 是正整数时，$C_x^m\in Z$

(1)答：在新规定下，性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 不能推广，因为当 $x\notin Z$ 时，C_x^{x-m} 没有意义了。

性质 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ 可推广到 $C_x^m+C_x^{m+1}=C_{x+1}^{m+1}$

(2)证明

当 $x\in Z$ 且 $x\ge m$ 时 C_x^m 就是常规的组合数，显然为正整数

当 $x\in Z$ 且 $0<x<m$ 时 C_x^m 就是常规的组合数，由推扩定义得

$C_x^m=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-m+1)}{m!}$，因为 $x(x-1)(x-2)(x-m+1)=0$，

于是 $C_x^m=0$ 为整数

当 $x\in Z$ 且 $x<0$ 时

$$C_x^m=\frac{x(x-1)(x-2)(x-m+1)}{m!}=\frac{-x(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+m-1)}{m!}\bullet(-1)^m$$

$=(-1)^m C_{-x+m-1}^m$ 也为整数

971、(排列组合)

集合 M={-2，0，1}，N={1,2,3,4,5},映射 f：M→N，使任意 x∈M，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，则这样的影射有多少个？

A 60 B 45 C 27 D 11

解：要确定 M={-2，0，1}到 N={1,2,3,4,5}的映射

就是要为 M 的三个儿子-2、0、1 在 N 中找对象

第一步：为 x=-2 找对象 f(-2), 要使

$x+f(x)+xf(x)=-2+f(-2)-2f(-2)=-2-f(-2)$ 为奇数

因此 $f(-2)$ 为奇数，f(-2)只能取 1、3、5 之一，故有 3 种选法

第二步：为 x=0 找对象 f(0), 要使 $x+f(x)+xf(x)=f(0)$ 为奇数

因此 $f(0)$ 也只能取 1、3、5 之一，故有 3 种选法

第三步：为 x=1 找对象 f(1), 要使 $x+f(x)+xf(x)=1+2f(1)$ 为奇数

因此 f(1)可取 N 中任何一个元素，故有 5 种选法

根据分步计数原理得：这样的影射有 3×3×5＝45 种

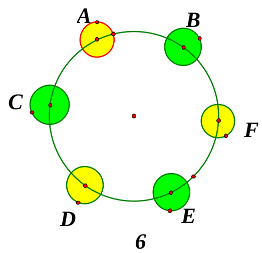
选 B

995、(排列组合) (竞赛)

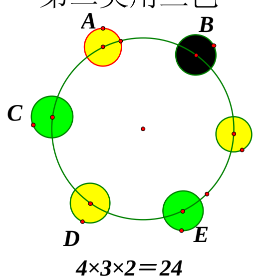
用 4 种颜色的珠子，穿成有 6 个珠子的项链，要求相邻珠子的颜色不同，4 种颜色可以不全用，求可以穿成多少种项链。

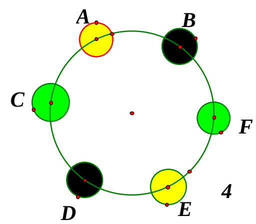
解 1：

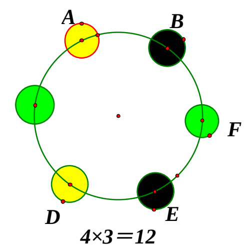
第一类用两色 $C_4^2=6$



第二类用三色

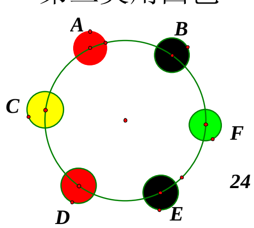


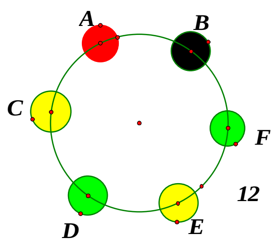


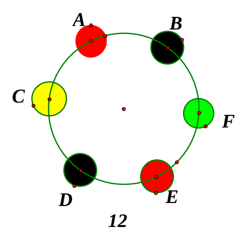


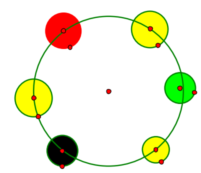
$C_4^1C_3^1C_2^1=24$　　$\dfrac{C_4^3\times 2}{2}=4$　　$C_4^3\times C_3^1=12$

第三类用四色









$A_4^4=24$　　$C_4^2=6$　　$\dfrac{A_4^4}{2}=12$　　$C_4^1=4$

合起来 92 种

解 2：(用 **Burnside 定理)** (组合数学) (知识介绍) (竞赛不要求)

正六边形的 12 阶对称群是

（1）（2）（3）（4）（5）（6），

（1　2　3　4　5　6），（165432）

（1　3　5）（2　4　6），（1　5　3）（2　6　4），

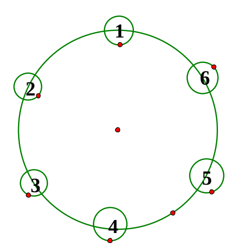
（1　4）（2　5）（3　6），

（1）（4）（2　6）（3　5），（2）（5）（1　3）（4　6），（3）（6）（2　4）（1　5），

（1　6）（2　5）（3　4），（1　2）（4　5）（3　6），（1　4）（2　3）（5　6），

①在置换（1）（2）（3）（4）（5）（6）中

不变的着色方法有（K-1）^{6}+（K-1）



②在置换（1　2　3　4　5　6）和（165432）中

不变的着色方法有 0 种

③在置换（1　3　5）（2　4　6），和（1　5　3）（2　6　4）中

不变的着色方法有种都有 $k(k-1)$ 种，于是共有 $2k(k-1)$种

④在置换（1　4）（2　5）（3　6）中不变的着色方法有种有 $k(k-1)(k-2)$ 种，

⑤在置换（1）（4）（2　6）（3　5），（2）（5）（1　3）（4　6）和（3）（6）（2　4）（1　5）中不变的着色方法有种都有 $k(k-1)(k-1)(k-1)$ 种，于是共有 $3k(k-1)^3$ 种

⑥在置换（1　6）（2　5）（3　4），（1　2）（4　5）（3　6），（1　4）（2　3）（5　6）中中不变的着色方法有 0 种

由 **Burnside 定理得不同的着色方法有：**

$$f(k)=\frac{(k-1)^6+(k-1)+2k(k-1)+k(k-1)(k-2)+3k(k-1)^3}{12}$$

$$=\frac{k^6-6k^5+18k^4-28k^3+23k^2-8k}{12}$$

当 $k=4$ 时， $f(4)=92$

1027、(排列组合)

设全集 U={1,2,3,4,5,6},集合 A、B 都是 U 的子集，若 A∩B={1,2,3},则 A、B 为"理想配集，记作(A，B).这样的"理想配集"(A，B)共有

A.7 个　 B.8 个　 C.27 个　 D.28 个

答案为 C

解 1：由于 A∩B={1,2,3}，故 A、B 都含有元素 1,2,3 此外无公共元素

我们考虑除元素 1,2,3 外集合 A、B 的其他元素，对 A 按含其他元素 4,5,6 的个数分成 4 类

第一类：A 中含 0 个{4,5,6}中的元素，则 B 中可集合{4,5,6}的任意子集中的元素，于是有 $C_3^0\bullet 2^3$ 个"理想配集"

第二类：A 中含 1 个{4,5,6}中的元素，则 B 中可剩下的 2 元素的任意子集中的元素，于是有 $C_3^1\bullet 2^2$ 个"理想配集"

第三类：A 中含 2 个{4,5,6}中的元素，则 B 中可剩下的 1 元素的任意子集中的元素，于是有 $C_3^2\bullet 2^1$ 个"理想配集"

第四类：A 中含 3 个{4,5,6}中的元素，则 B 中可剩下的 0 元素的任意子集中的元素，于是有 $C_3^3\bullet 2^0$ 个"理想配集"

综上所述，"理想配集"共有 $C_3^0\bullet 2^3+C_3^1\bullet 2^2+C_3^2\bullet 2^1+C_3^3\bullet 2^0=(2+1)^3=27$ 个

解 2：因为 A∩B={1,2,3}，所以 A 与 B 必同时含有 1,2,3，但不能同时含有 4,5,6，因此 4,5,6 的中任何一个或在 A 中，或在 B 中，或既不在 A 中也不在 B 中，于每个理想配集都确定了 4,5,6 的上述情况之一。于是用分步计数

第一步确定 4 的位置有 3 种，第二步确定 5 的位置有 3 种，第三步确定 6 的位置有 3 种.因此有 $3^3=27$

1028(排列组合) (高考不要求)

7 个人到 7 个地方旅游，甲不去 A 地，乙不去 B 地，丙不去 C 地，丁不去 D 地，共有多少种旅游方案？

解：7 个人到 7 个地方旅游的所有情况组成集合 S，则集合 S 中元素的个数是 $|S|=A_7^7$

设 A_1 是甲去 A 地组成的集合， A_2 是乙去 B 地组成的集合， A_3 是丙去 C 地组成的集合， A_4 丁去 D 地组成的集合

则 $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=A_6^6$ ，

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_2|=+\cdots=|A_3\cap A_4|=A_5^5$，交集有 C_4^2 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=|A_1\cap A_3\cap A_4|=|A_2\cap A_3\cap A_4|=A_4^4$，交集有 C_4^3 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=A_3^3$，交集有 C_4^4 个

由容斥原理，所求的方案数等于

$|S|-(|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|)=A_7^7-C_4^1A_6^6+C_4^2\mathrm{A}_5^5-C_4^3A_4^4+C_4^4\mathrm{A}_3^3$

$=A_3^3(7\times6\times5\times4-4\times6\times5\times4+6\times5\times4-4\times4+1)=2790$

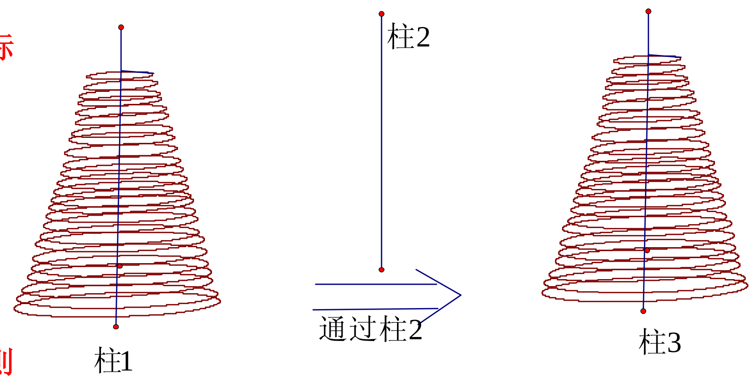
1031、(数列) (高考不要求)

传说在古老的印度，有一座神庙，据说它是宇宙的中心。在庙宇中放置了一块上面插有三根长木钉的木板，在其中的一根木钉上，从上至下被放置了 64 片直径由小至大的圆环形金属片。古印度教的天神指示他的僧侣们将 64 片的金属片移至三根木钉中的其中一根上。规定在每次的移动中，只能搬移一片金属片，并且在过程中必须保持金属片由上至下是直径由小至大的次序，也就是说不论在那一根木钉上，圆环形的金属片都是直径较小的被放在上层。直到有一天，僧侣们能将 64 片的金属片依规则从指定的木钉上全部移动至另一根木钉上，那麽，世界末日即随之来到，世间的一切终将被毁灭，万物都将至极乐世界

问题:请问把 64 片金属片都移到另一根木钉上最少的步骤是 $2^{64}-1$ 次吗?为什么?

1、理解题意：

（1）移动的目标



（2）移动的规则

规定 1：每次的移动中，只能搬移一片金属片

规定 2：每次的移动，必须保持金属片由上至下是直径由小至大的次序，即小在上大在下

（3）求解的问题：64 片金属片都移到另一根木钉上最少要移动的次数

2、解答过程：设 a_n 为 n 个盘子从柱 1 移到柱 3 所需移动的盘次。

（1）特殊试验：当 n=1 时，只需把柱 1 上的圆环直接移到柱 3 就可以了，$a_1=1$。

当 n=2 时，先将柱 1 上面的圆环移到柱 2 上去；然后将大圆环从柱 1 移到柱 3；最后，将柱 2 上的小圆环移到柱 3 上，共有 3 个次移动，故 $a_2=3$。这一过程可看成是借助柱 2 把柱 1 上的 2 个圆环移动到柱 3 上有 $a_2=3$ 次移动。

当 n=3 时，即柱 1 上有 3 个圆环时，先借助柱 3 把柱 1 上面的 2 个圆环移动到柱 2 上，有 $a_2=3$ 移动；再把柱 1 最下面的圆环移动到柱 3 上，有 1 次移动；最后借助柱 1 把柱 2 上的 2 个圆环移动到柱 3 上，有 $a_2=3$ 移动；

总共移动了 $a_2+1+a_2=7$ 次。

（2）一般规律：一般地，当柱 1 上有 n 个圆环时，先借助柱 3 把柱 1 上面的 $n-1$ 个圆环移动到柱 2 上，有 a_{n-1} 次移动；再把柱 1 最下面的圆环移动到柱 3 上，有 1 次移动；最后借助柱 1 把柱 2 上的 $n-1$ 个圆环移动到柱 3 上，有 a_{n-1} 次移动；总共移动 $a_{n-1}+1+a_{n-1}=2a_{n-1}+1$ 次。于是得到递推式 $a_n=2a_{n-1}+1$

（3）求通项公式：由 $a_n=2a_{n-1}+1$ 得，$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$

于是 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，公比为 $q=2$，首项是 $a_1+1=2$

故 $a_n+1=(a_1+1)\bullet q^{n-1}=2\bullet 2^{n-1}=2^n$，$a_n=2^n-1$，$a_{64}=2^{64}-1$

1036、(排列组合) (竞赛) (高考不要求)

已知 A={1,2,3,-⋯,14}，,B={a_1,a_2,a_3}，同时满足：

(1)B 是 A 的真子集（2）a_2-a_1≥3，a_3-a_2≥2 的集合 B 共有多少个？

解：把 a_1、a_2、a_3 当成三块隔板，要求在 a_1 与 a_2 之间至少两个球，a_2 与 a_3 之间至少 1 个球，

我们先在 a_1 与 a_2 之间放入 2 球，在 a_2 与 a_3 之间放入 1 个球。

问题转化成：在 a_1 的左边、a_1 与 a_2 之间、a_2 与 a_3 之间、a_3 的右边，这四个地方任意的投入 8 个相同的球，每个地方球数不限的投法数。

投法数 $C_{8+4-1}^{8}=C_{11}^{8}=C_{11}^{3}=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

答：集合 B 共有165个

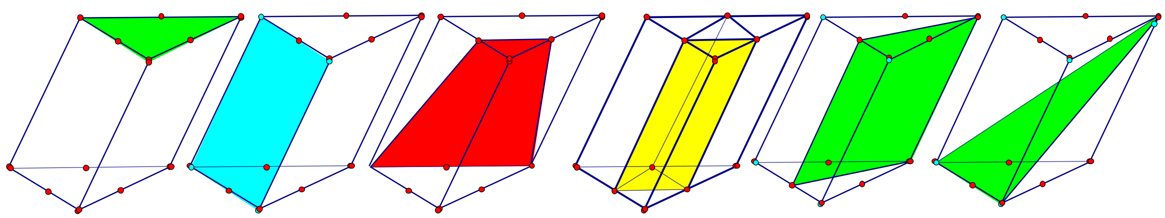
1037、(排列组合) (高考不要求)

从 12 个点（三棱柱的 6 个顶点，上、下底面 6 条边的 6 个中点）中，取出不共面 4 点的取法有多少种？

答案：378 种。

解：12 点取 4 点共有 $C_{12}^{4}=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2}=495$

四点共面的有下列 6 种情况



$2C_6^4=30$　$3C_6^4=45$　$6C_5^4=30$　3　3　6

不共面 4 点的取法有

495-30-45-30-3-3-6＝378

评注：这种题目做为列举训练题还行，做为考题太难了

1044、(排列组合) (高考不要求)

现有 n(n>2)人互相传球，已知开始时球在 A 手上，经过 k 次传球，球回到 A 处。问：可能的传球方式的种数 N

解：设经过 k 次传球球回到 A 处的传球种数为 a_k。则 $a_1=0$， $a_2=n-1$

经过 k 次传球是否能把球传回到 A 处，应先看经过 k-1 $(k\geq 2)$ 传球是不是传到 A 处而定。如果经过 k-1 次传球没有传 A 回到处，那么这样第 k 次就能传给 A 了，如果第 k-1 次传球传回到 A 处，那么第 k 次就不能传到 A 手中了。

先求经过 k-1 次任意传球的方法数：由于每 1 次传球都有 $n-1$ 种方法，因此 k-1 次任意传球有 $(n-1)^{k-1}$ 种传球方法。

下面把经过 k-1 次任意传球可分为两类：

第一类： 经过 k-1 次传球没有传 A 回到处，那么这样第 k 次就能传给 A 了，这就是经过 k 次传球，球回到 A 处的方法，方法数是 a_k 种

第二类：经过 k-1 次传球传回到 A 处，则第 k 次就不能传到 A 手中。经过 k-1 次传球传回到 A 处方法数有 a_{k-1} 种

因此 $a_k+a_{k-1}=(n-1)^{k-1}$

设 $a_k-A(n-1)^k=-[a_{k-1}-A(n-1)^{k-1}]$

$a_k+a_{k-1}=A(n-1)^k+A(n-1)^{k-1}=nA(n-1)^{k-1}$，于是 $nA=1$， $A=\dfrac{1}{n}$

$$a_k-\frac{(n-1)^k}{n}=-[a_{k-1}-\frac{(n-1)^{k-1}}{n}]$$

$$a_k-\frac{(n-1)^k}{n}=-[a_{k-1}-\frac{(n-1)^{k-1}}{n}]$$

$$a_k-\frac{(n-1)^k}{n}=[a_1-\frac{(n-1)}{n}](-1)^{k-1}=\frac{(n-1)}{n}](-1)^k$$

$$a_k=\frac{(n-1)^k}{n}+\frac{(n-1)}{n}(-1)^k$$

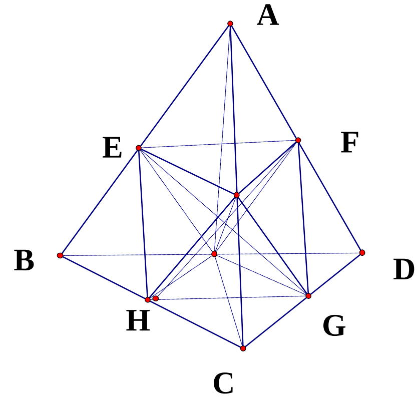
1052、(排列组合)(难题)

四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，其两两连线可组成异面直线的对数为

(A)83　　　(B)87　　　(C)91　　　(D)95

解：大家看看还有没有问题

其两两连线的线有四种：棱、面内中线、面内中位线、异面中点连线



第一类：棱与棱 3 对

第二类：棱与中位线有 6×6＝36 对

第三类：棱与中线有 4×6＝24 对

第四类：棱与对棱中点连线有 2×6＝12 对

第五类：中线与中线 $\dfrac{6\times 12}{2}$ 对

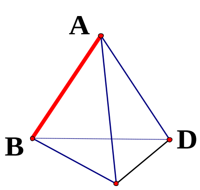
第六类：中线与中位线有 $7\times 12=84$ 对

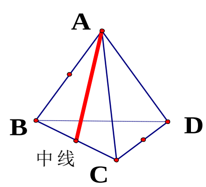
第七类：面内中线与对棱中点连线有 12×2 对

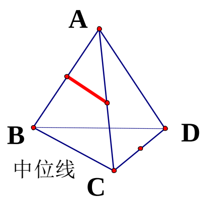
第八类：中位线与中位线 $\dfrac{4\times 12}{2}=24$ 对

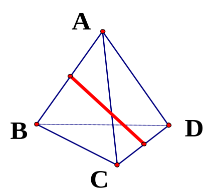
第九类：中位线与对棱中点连线有 12×1 对

共有 255 对

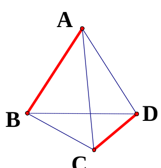




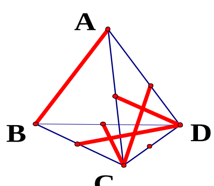




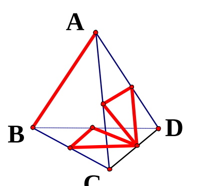
对棱中点连线



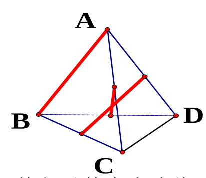
棱与棱3对



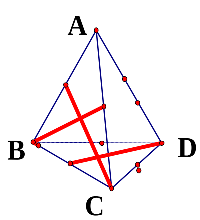
棱与中线有4=24对



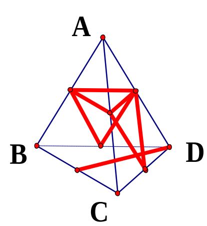
棱与中位线有6´6=36对



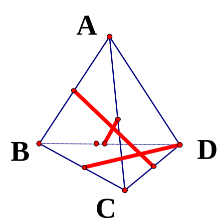
棱与对棱中点连线 2´6=12对



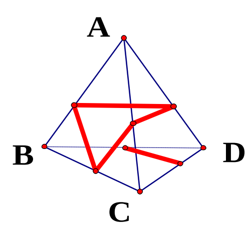
中线与中线 $\dfrac{6´12}{2}=36$对



中线与中位线有 $7´12=84$对



中线与对棱中点连线 $12´2=24$对



中位线与中位线 $\dfrac{12´4}{2}=24$对

共有 255 对，因此原题提供的选项是错的

附注：97 年高考题（理）：

四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，不同的取法共有(D)

A.150 种　　B.147 种　　C.144 种　　D.141 种

解：从 10 个点中任取 4 个，有 $C_{10}^{4}=210$ 种取法，其中 4 点共面的有

$4C_6^4+6+3=69$ 种．其中不共面的不同的取法共有 $210-69=141$ 种

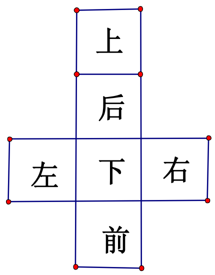
1084、(排列组合) (高考不要求)

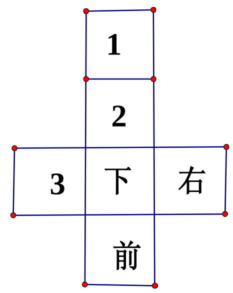
将正方体 AC 的 6 个面涂色,任何相邻两个面不同色,现在有 5 种不同的颜色,并且涂好了过顶点 A 的 3 个面的颜色,那么余下 3 个面的涂色方案共有几种？

解：设 5 种颜色分别为 1、2、3、4、5

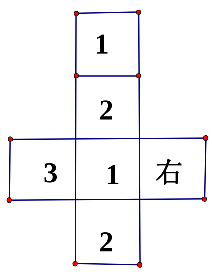
不妨设涂好了过顶点 A 的 3 个面分别为上、左、后的颜色为 1、2、3

余下 3 个面的涂色方案共有几种

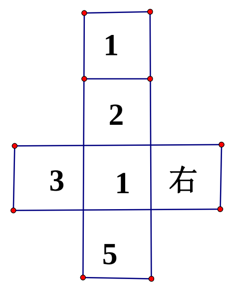




第一类下着 1 色：有 7 种



右可3、4、5



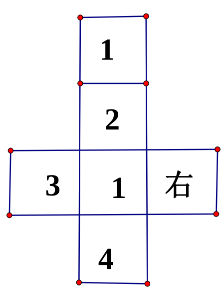
右可4、5

第二类下着 4 色：有 3 种

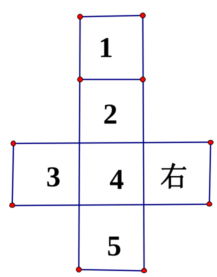
第三类下着 5 色

同第二类有 3 种

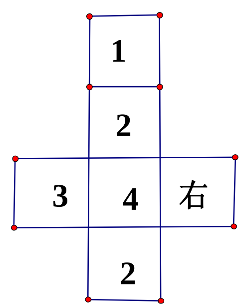
综上所述共有 13 种



右可3、5



右可3



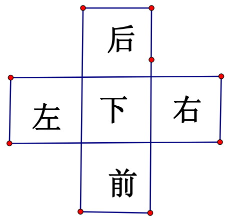
右可3、5

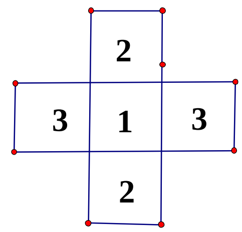
1085、(排列组合) (高考不要求)

正六面体：用 4 种颜色涂色，相邻 2 面颜色不同，涂色方法有多少种？

解：设 4 种不同颜色为 1、2、3、4

把正六面体去掉上底面其他面展开（如图）





（1）用 3 种不同颜色，并且 3 种颜色全用上

不妨设用颜色 1、2、3

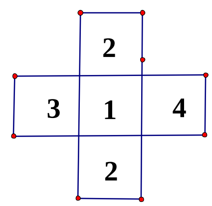
我们选定面上底面着颜色 1，则下底面只能着上颜色 1

四个侧面只能是如图的方法故只有 1 种着色方法，

由正方体的对称性，换成其他颜色，其着色结果是相同的。

因此 3 种颜色选定着色方法就定了

这一类有 $C_4^3=4$ 种方法



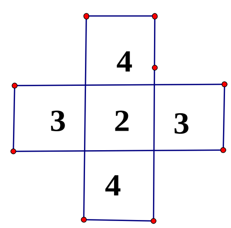
（2）用 4 种不同颜色，并且 4 种颜色全用上

我们选定面上底面着颜色 1，则

①当下底面着颜色 1 时，前后面左右面只有且只有

3 种色，必有两个面着相同的颜色，有 C_3^1 种着法

②当下底面不着颜色 1 时



当下底面着颜色 2 时，只能有 1 种着色方法

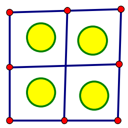
当下底面着颜色 3、或 4 时也一样，

故有 $C_3^1=3$ 种着色方法

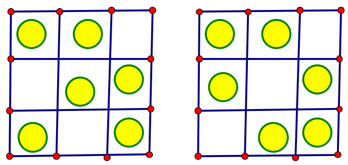
综上共有 10 种着色方法

1103、(排列组合) (高考不要求)

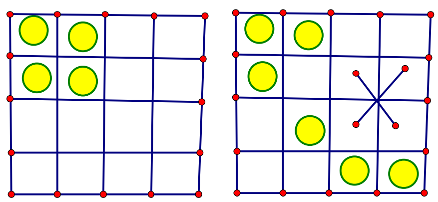
在 4×4 方格中，每行每列只能限涂黑两格，则不同的填图方法有多少种？请大家提示下，谢谢



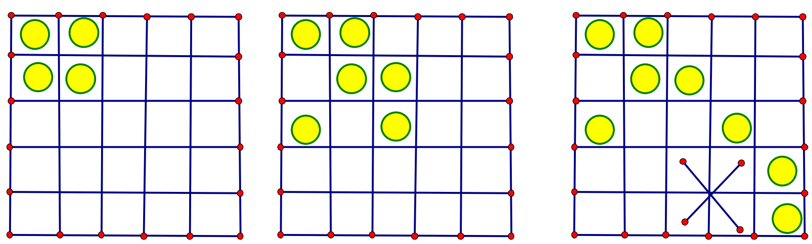
$a_2 = 1$



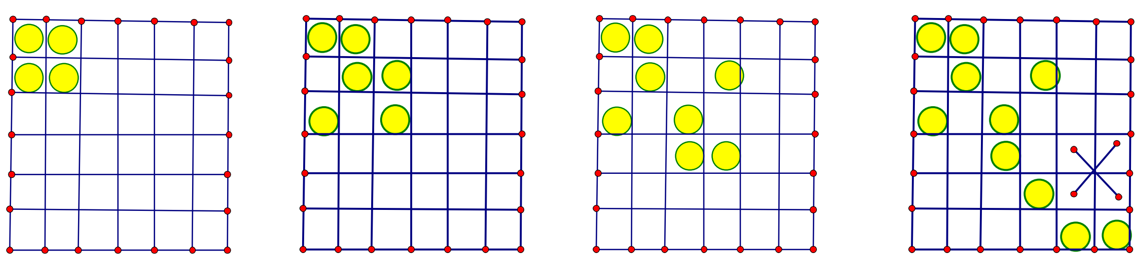
$a_3 = C_3^2 \times C_2^1 = 6$



$$a_4 = \frac{C_4^2 \times C_4^2}{2} a_2 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^1 \times 2 = 90$$



$$a_5 = C_5^2 \times C_4^1 a_3 + C_5^2 \times C_4^2 \times 2 \times C_3^1 a_2 + C_5^2 \times C_4^2 \times 2 \times C_3^2 \times 2 \times 2 = 2640$$



$$a_6 = C_6^2 \times C_5^1 a_4 + C_6^2 \times C_5^2 \times 2 \times C_4^1 a_3 + C_6^2 \times C_5^2 \times 2 \times C_4^2 \times 2 \times C_3^1 \times a_2$$
$$+ C_6^2 \times C_5^2 \times 2 \times C_4^2 \times 2 \times C_3^2 \times 2 \times 2 = 712800$$

1114、(排列组合)

相同的球投到不同的框

一、两个定理

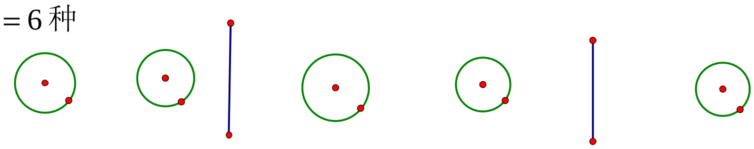
例 1、把 5 个相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球，求投法数。

解:（1）把 5 个相同的球排成一排，由于球是相同（不加以区分的）的于是只有一种排法

（2）在球与球之间选两个位置，安上两块隔板。安两块隔板的方法有 $C_5^2=10$ 种

（3）安上两块隔板后，5 个球按分成了 3 部分，左边的部分投入第 1 框，中间的部分投入第 2 框，右边的部分投入第 3 框。只有 1 种投法。

于是所求的投法数是 $C_4^2=6$ 种

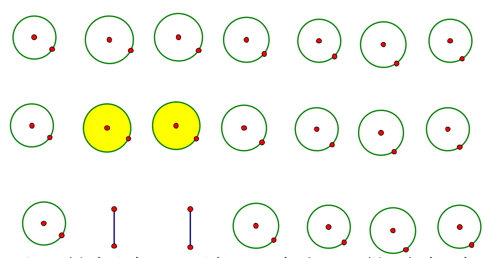


定理 1：把 n 个相同的球投到 m $(n\geq m)$ 个不同的框，每框至少 1 球，的投法数是 C_{n-1}^{m-1}

例 2（竞赛）、把 5 个相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限有几种投法？

解 1：把 5 个相同的球投与两块隔板都当成一排的 7 个圈，从这 7 个圈中选定 2 个圈，把这 2 个圈换成隔板，没有选到的圈换成球。这就相当于 1 种投法。

于是投法数有 C_7^2 种。



解 2：借 2 个球放入 3 个不同的框中，再把 5 个相同的球任意投入，这相当于把 8 个不同的球投入 3 个不同的框每框至少 1 球的投法数，于是投法数有 C_7^2 种。

定理 2（竞赛）：把 n 个相同的球投到 m 个不同的框，每框球数不限，的投法数是 C_{n+m-1}^{m-1}

例 3、一条长椅上有 9 个座位，若 3 个人坐，要求相邻 2 人之间至少有 2 个空椅子，则共有（　　　）种不同的坐法。

A、84　　　B、72　　　C、60　　　　D、48

解：　分步

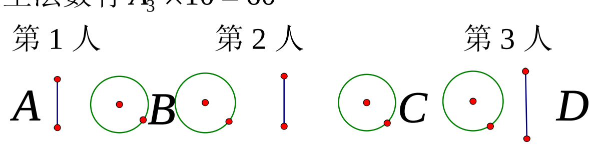
（1）先排好 3 个人有 A_3^3 种排法

（2）在第 1 人与第 2 人之间，在第 2 人与第 3 人之间，先各放上 2 个空位

（3）还有 2 个空位放入 A、B、C、D

由定理 2 得有 $C_{2+4-1}^{4-1}=10$ 种放法

由分步计数原理得坐法数有 $A_3^3\times10=60$

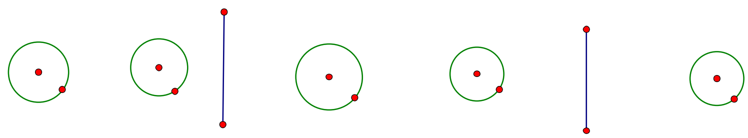


二、两个定理的联系

例 1 方程 $x+y+z=5$ 的正整数解有几个？

解：$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ 是方程 $x+y+z=5$ 一个正整数解

得到这样的正整数解，相当于把 5 个相同的球投到 x、y、z 这 3 个不同的框，每框至少 1 球的投法，于是方程 $x+y+z=5$ 的正整数解有 $C_4^2=6$ 个



例 2、(竞赛)、方程 $x+y+z=6$ 的有几个非负整数解有几个？

解：设 $x'=x+1, y'=y+1, z'=z+1$

方程 $x+y+z=6$（1）化为 $x'+y'+z'=9$（2）

由于方程（1）的非负整数解，与方程（1）的正整数解一一对应

方程（1）的正整数解的个数是 $C_8^2=28$

因此方程 $x+y+z=5$ 的非负整数解有 $C_8^2=28$ 个

方程 $x+y+z=6$ 的非负整数解的个数相当于把：相当于把 6 个相同的球投到 x、y、z 这 3 个不同的框，每框球数不限的投法数。由此可见用方程的正整数解与非负整数解的个数可以实现定理 1 到定理 2 的转化。

一样的道理，用方程的正整数解与非负整数解的个数可以实现定理 2 到定理 1 的转化。

正是因为如此，我们常常学习了定理 1 后，用此法去解决可化为定理 2 的问题，如果要搞竞赛最好这两个定理，及用方程的加限制条件的方程的整数解的个数互相转化的方法都要介绍给参赛者。

三、方程的整数解的个数转化的作用

例、设有四人掷骰子，每人各掷一次，问当所得点数之和为 17 时，共有多少种可能的情况？

解：这相当于把 17 个相同的球投给 4 个人，每人的球数都在 1 到 6 之间的投法数。就是方程 $x+y+z+t=17$（$x,y,z,t\in N$，$1\le x,y,z,t\le 6$）的解的个数

设 I 为 $x+y+z+t=17$ 的正整数解的全体，A_1 为 I 中满足 $x>6$ 的解的全体。

A_2 为 I 中满足 $y>6$ 的解的全体，A_3 为 I 中满足 $z>6$ 的解的全体，A_4 为 I 中满足 $t>6$ 的解的全体，

则 $|I|=C_{16}^3=\dfrac{16\times15\times14}{3\times2}=560$

$|A_1|$ 就是方程 $x+y+z+t=17$ 满足 $x\ge7$ 正整数解的个数，就是 $x'+y+z+t=11$ 的正整数解的个数就是故 $|A_1|=C_{10}^3$，同理 $|A_2|=|A_3|=|A_4|=C_{10}^3$

$|A_1 \cap A_2|$就是方程$x+y+z+t=17$满足$x\ge 7$且$y\ge 7$正整数解的个数，就是

$x'+y'+z+t=5$的正整数解的个数，就是故$|A_1 \cap A_2|=C_4^3$，同理

$|A_1 \cap A_2|=|A_1 \cap A_3|=|A_1 \cap A_4|=|A_2 \cap A_3|=|A_2 \cap A_4|=|A_3 \cap A_4|=C_4^3$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$就是方程$x+y+z+t=17$, $x>6$且$y>6$且$z>6$的正整数解的个数，

显然这样的解是 0 个

由容斥原理得就是方程$x+y+z+t=17$（$x,y,z,t\in N$, $1\le x,y,z,t\le 6$）的解的个数

是$C_{16}^3-C_4^1C_{10}^3+C_4^2C_4^3=560-480+24=104$

1115、不同的球投到不同的框

例 1、把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限，求投法数。

解：第 1 个数投框有 3 种投法，第 2 个球投框也有 3 种投法，第 3 个球，第 4 个球也一样，故共有$3^5=243$种投法。

定理 3：把 n 个不相同的球投到 m 个不同的框，每框球数不限，的投法数是m^n

例 2、把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球，求投法数。

解：设 I 为把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限的所有投法，A_1为第 1 个框为空框的投法，A_2为第 2 个框为空框的投法，A_3为第 3 个框为空框的投法则$|I|=3^5$，$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=2^5$

$|A_1 \cap A_2|=|A_1 \cap A_3|=|A_2 \cap A_3|=1^5$

由容斥原理得把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球的投法数为：

$3^5-C_3^1 2^5+C_3^2 1^5=243-96+3=150$

定理 4（竞赛）：把 n 个不相同的球投到 m$(n\ge m)$个不同的框，每框至少 1 球，的投法数是$S^{\#}(n,m)=m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}1^n$

1116、(排列组合) (高考不要求)

不同的球投到相同的框

例 1、把 5 个不相同的球投到 3 个相同的框，每框至少 1 球，求投法数。

解：设投法数为$S(5,3)$，则$3!S(5,3)=S^{\#}(5,3)=150$，于是$S(5,3)=\dfrac{S^{\#}(5,3)}{3!}=\dfrac{150}{6}=25$

定理 5、（竞赛）：把 n 个不相同的球投到 m$(n\ge m)$个相同的框，每框至少 1 球，的投法数是$S(n,m)=\dfrac{S^{\#}(n,m)}{m!}=\dfrac{m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}1^n}{m!}$

这个数叫做第二类斯特林数

例 2、把 5 个不相同的球投到 3 个相同的框，每框球数不限，求投法数。

解：0 个空框的投法数有$S(5,3)=25$

1 个空框的投法数有 $S(5,2)=15$

2 个空框的投法数有 $S(5,1)=1$

故共有 $S(5,3)+S(5,2)+S(5,1)=25+15+1=41$

定理 6:（竞赛）：把 n 个不相同的球投到 m $(n\ge m)$ 个相同的框，每框球数不限的（1）当 $n\ge m$ 时，投法数= $S(n,m)+S(n,m-1)+\ldots+S(n,1)$

（2）当 $n<m$ 时，投法数= $S(n,n)+S(n,n-1)+\ldots+S(n,1)$

1121、(排列组合)

今有人民币 5 分 4 张 ， 2 角 5 张 ， 5 角 3 张 ， 1 元 2 张， 最多可以构成多少种不同的币值？（0 元不算）

解:（1）设取 5 分 x 张，2 角 y 张，5 角 z 张，1 元 t 张

则币值＝5 x+20y+50z+100t

$0\le x\le 4$， $0\le y\le 5$， $0\le z\le 3$， $0\le t\le 2$

于是共有 (x,y,z,t) 共有 $5\times 6\times 4\times 3=360$ 种取法

（2）但是如下取法有相同的币值有 2 次重复要减去 1 次

当 $x=4$， $y=1$ 时，币值相同有 $4\times 3=12$ 种取法

当 $y=5$， $z=2$ 时，币值相同有 $5\times 3=15$ 种取法

当 $y=5$， $t=1$ 时，币值相同有 $5\times 4=20$ 种取法

当 $z=2$， $t=1$ 时，币值相同有 $5\times 6=30$ 种取法

（3）当 $y=5$， $y=2$， $z=1$ 时，币值相同有 5 种取法

在（1）中只是三次重复，但在（2）中却减去 3 次故要补上

（4）0 币值要减去

综上，币值有 $360-12-15-20-30+5-1=287$

1178、(排列组合)

若一个 m、n 均为非负数的有序数对(m、n)，在做 m+n 的加法时，各位均不进位则称(m、n)为“简单的有序实数对”，m+n 称为有序实数对(m、n)的值。则值为 2004 的“简单的有序实数对”的个数是(　　)

A、10　B、15　C、20　D、25

解：设 $m=\overline{a00d}$ 时， $n=\overline{e00h}$

因 $a+e=2$， 故 a,e 有 3 种取法　因 $d+h=4$，故 d,h 有 5 种取法

综上简单有序对个数有 $3\times 5=15$ 对

1182、(排列组合) (高考不要求) (竞赛)

8 个女孩和 2 5 个男孩围成一圈，任何两个女孩之间至少站两个男孩，共有多少种不同的站法（相对位置相同为相同站法）

让某女孩 A 固定不动

（1）先把 25 个男孩当成相同的球，让从 17 个男孩与 A 围成一圈，再让余下 7 个女孩把 17 个男陔插开有 A_{16}^{7} 种方法，接着让余下 8 个男孩放入 8 个框内。这样就定好了 25 个男孩的位置了

（2）让 25 个男孩在上面定好的位置上全排列有 A_{25}^{25} 就行了

于是共有 $A_{16}^{7}A_{25}^{25}$ 种方法

1184、(排列组合)

3 张 1 元币、4 张 1 角币、1 张 5 分币、2 张 2 分币，可组成多少种不同的币值（1 张不取，即 0 元 0 角 0 分不计在内）？

解：设 x 张 1 元币、 y 张 1 角币、 z 张 5 分币、 t 张 2 分币，

可组成多少种不同的币值＝$100x+10y+5z+2t$

其中 x 可取 0、1、2、3， y 可取 0、1、2、3，4

z 可取 0、1， t 可取 0、1、2

于是可组成多少种不同的币值有 $4\times5\times2\times3=120$ 种

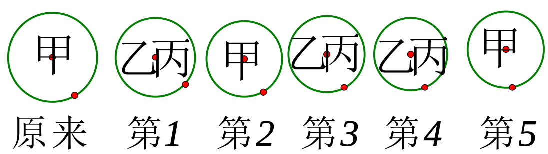
去掉 0 值共有 119 种

1189、(排列组合)

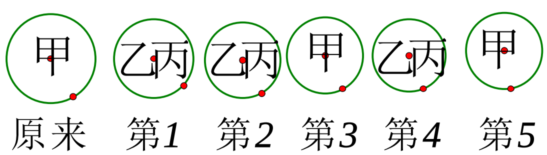
足球场上三人相互传球，由甲开始发出，作为第 1 次传球 ，经过 5 次传球后球仍回到甲，则不同的传球方法数是______

解 1：分类

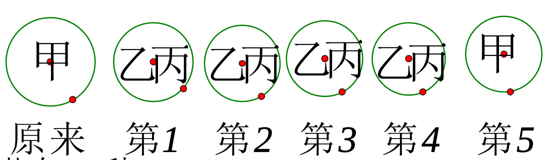
第 1 类：$2\times1\times2\times1\times1=4$



第 2 类：$2\times1\times1\times2\times1=4$

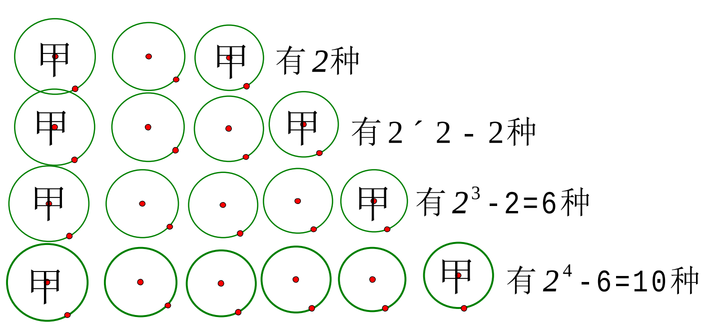


第 3 类：$2\times1\times1\times1\times1=2$



共有 10 种

解 2：递推排除法



1191、(排列组合) (竞赛)

5 对夫妇站成一排，让每对夫妇都不相邻，有多少种排法?

解：用容斥原理

5 对夫妇分别记作 a_i, b_i（$i=1,2,3,4,5$）

5 对夫妇站成一排的所有情况组成集合记为 S，则集合 S 中元素的个数是 $|S|=A_{10}^{10}$，

设 A_i（$i=1,2,3,4,5$）表示，第 i 对夫妇相邻，于是

每对夫妇都不相邻的排法数 $=m=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|$

则 $|A_1|=2!\cdot 9!$（$i=1,2,3,4,5$）有 C_5^1 个

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_2|=+\cdots=|A_4\cap A_5|=8!\cdot 2!\cdot 2!=8!\cdot 2^2$，交集有 C_5^2 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=\cdots=|A_3\cap A_4\cap A_5|=7!\cdot 2^3$，交集有 C_5^3 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\cdots=|A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=6!\cdot 2^4$，交集有 C_5^4 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=5!\cdot 2^5$ 交集有 C_5^5 个

由容斥原理，$m=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|$

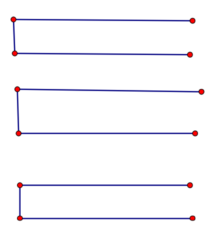
$=A_{10}^{10}-C_5^1 9!\cdot 2+C_5^2 8!\cdot 2^2-C_5^3 7!\cdot 2^3+C_5^4 6!\cdot 2^4-5!\cdot 2^5$

1201、(排列组合)

一个人把六根草紧握在手中,仅露出头和尾,然后请另一个人把六个头两两相接, 6 个尾也两两相接，求放开手后六根草恰好连成一个环的概率?先谢了.

解：在连好左端的前提下

右端的所有连结有

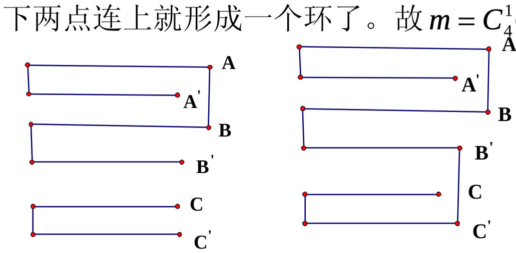


$$n=\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=\frac{15\times 6}{6}=15,$$

可形成一个环的连结有：

如图在 B,B',C,C' 中选 1 个与 A 连结有 C_4^1 种选法，若连上 AB，则在 C,C' 中选 1 个与 B' 连结有 C_2^1 种选法，再把剩下两点连上就形成一个环了。故 $m=C_4^1C_2^1=8$

于是 $P=\frac{m}{n}=\frac{8}{15}$



1204、(排列组合)

把 20 个相同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子里，要求每个盒子的小球数不少于编号数，那么不同的放法有多少？解答一下,谢谢了!

解：先在 1，2，3，4 号盒子里分别放入 0，1，2，3 个球

这样问题就转化成了把 14 个相同的小球放入编号为 1.2.3.4 的四个盒子里,要求每个盒子至少有 1 个小球的问题了。

于是有 $C_{13}^{3}=\dfrac{13\times12\times11}{6}=286$

1215、现在有红球 3 个，白球 3 个，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？

一、改 1：现在有相同的红球 3 个，相同的白球 3 个，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？

可按下面步骤学习

（一）相同的球投到不同的框

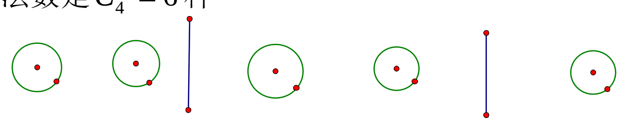
例 1、把 5 个相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球，求投法数。

解：（1）把 5 个相同的球排成一排，由于球是相同（不加以区分的）的于是只有一种排法

（2）在球与球之间选两个位置，安上两块隔板。安两块隔板的方法有 $C_5^2=10$ 种

（3）安上两块隔板后，5 个球按分成了 3 部分，左边的部分投入第 1 框，中间的部分投入第 2 框，右边的部分投入第 3 框。只有 1 种投法。

于是所求的投法数是 $C_4^2=6$ 种

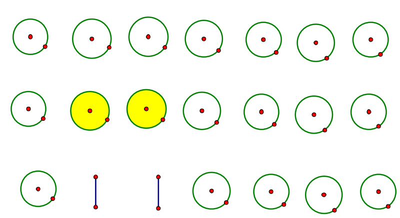


定理 1：把 n 个相同的球投到 m$(n\ge m)$ 个不同的框，每框至少 1 球，的投法数是 C_{n-1}^{m-1}

例 2（竞赛）、把 5 个相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限有几种投法？

解：把 5 个相同的球投与两块隔板都当成一排的 7 个圈，从这 7 个圈中选定 2 个圈，把这 2 个圈换成隔板，没有选到的圈换成球。这就相当于 1 种投法。

于是投法数有 C_7^2 种。



定理 2（竞赛）：把 n 个相同的球投到 m 个不同的框，每框球数不限，的投法数是 C_{n+m-1}^{m-1}

例 3、把 6 个相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限有几种投法？

解：从 8 圈中选 2 圈当隔板有 $C_8^2=28$

例 4、把 6 个相同的球投到 4 个不同的框，每框球数不限有几种投法？

解：从 9 圈中选 3 圈当隔板有 $C_9^3=84$

（二）容斥原理

例 1、在若干名歌舞演员中,有 7 人会唱歌,有 6 人会跳舞，有 3 人既会唱歌又跳舞，歌舞演员共有多少名

解答：7+6＝13，但是 3 个既会唱歌又跳舞，被算了两次，因此

歌舞演员有 13-3＝10（人）

例 2、求不超过 30 的正整数中是 2 的倍数或 3 的倍数的数共有多少个。

解：求不超过 30 的正整数中

2 的倍数有 2、4、6、…、30 共 15 个

3 的倍数有 3、6、9、…、30 共 10 个

既是 2 的倍数又 3 的倍数的（即 6 的倍数）有 6、12、…、30 共 5 个

因此答案是 15+10-5＝20（个）

定理 3：一个群体由两部分组成，第一部分有 a 个元素，第二部分有 b 个元素，第一部分与第二部分的公共部分有 c 个元素，那么这群体共有 a+b-c 个元素

一个群体由 3 部分组成，第一部分有 a 个元素，第二部分有 b 个元素，第三部分有 c 个元素，第一部分与第二部分的公共部分有 d 个元素，第一部分与第三部分的公共部分有 e 个元素，第二部分与第三部分的公共部分有 f 个元素，三部分的公共部分有 g 个元素，那么这群体共有有 a+b+c-d-e-f+g 个元素

……

例 3、5 个同学人排成一队要求甲不排在左端，乙不排在右端有几种排法？

解：$A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3 = A_3^3(20-8+1) = 6\times 13 = 78$

定理 4：全集 S 的子集 M 不符合两个条件 p 和 q，若符合条件 p 的子集为 P，符合条件 q 的子集为 Q，则子集 M 的元素的个数为：$|M| = |S| - |P| - |Q| + |P \cap Q|$

全集 S 的子集 M，不符合 3 个条件 p、q 和 r，若符合条件 p 的子集为 P，符合条件 Q 的子集为 R，则子集 M 的元素的个数为：

$$|M| = |S| - |P| - |Q| - |R| + |P \cap Q| + |P \cap R| + |Q \cap R| - |P \cap Q \cap R|$$

……

（三）解你的题目：现在有相同的红球 3 个，相同的白球 3 个，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？

解：（1）相同的红球 3 个分给 3 人，每人球数不限有 C_5^2 法，

相同的白球 3 个分给 3 人，每人球数不限有 C_5^2 法，

于是每人球数不限的分法数共有 $C_5^2\ C_5^2$ 法

（2）至少有 1 人无球的分法数有 $C_3^1C_4^1\ C_4^1$ - $C_3^2C_3^0\ C_3^0$（容斥原理）

于是每个人至少分到一个球的分法有 $C_5^2\ C_5^2 - C_3^1C_4^1\ C_4^1 + C_3^2C_3^0\ C_3^0 = 55$

二、改 2：现在有不同的红球 3 个，不同的白球 3 个，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？

此题就是 6 个不同的球，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？

可按下面步骤学习

（一）不同的球投到不同的框

例 1、把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限，求投法数。

解：第 1 个数投框有 3 种投法，第 2 个球投框也有 3 种投法，第 3 个球，第 4 个球也一样，故共有 $3^5 = 243$ 种投法。

定理 3：把 n 个不相同的球投到 m 个不同的框，每框球数不限，的投法数是 m^n

例 2、把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球，求投法数。
解：设 I 为把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框球数不限的所有投法，A_1 为第 1 个框为空框的投法，A_2 为第 2 个框为空框的投法，A_3 为第 3 个框为空框的投法则 $|I|=3^5$，$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=2^5$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1^5$

由容斥原理得把 5 个不相同的球投到 3 个不同的框，每框至少 1 球的投法数为：

$3^5-C_3^1 2^5+C_3^2 1^5=243-96+3=150$

定理 4（竞赛）：把 n 个不相同的球投到 m $(n\geq m)$ 个不同的框，每框至少 1 球，的投法数是 $S^{\#}(n,m)=m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}1^n$

（二）6 个不同的球，分别分给 3 人，问每个人至少分到一个球的分法有几种？
解：$3^6-C_3^1 2^5+C_3^2 1^4=540$

1216、(排列组合) (高考不要求)

求解错排问题的通式：$A_n^n-A_n^{n-1}+A_n^{n-2}-\cdots+(-1)^n A_n^0$ 是什么意思？怎么计算？
答：错排问题

把编号为 1、2、3、4、5 的 5 个球，投入编号为 1、2、3、4、5 的五个盒子中的投法共有 A_5^5 种，把这 A_5^5 种投法看成全集 S，则 $|S|=A_5^5$

设 A_1 是 1 号盒子投 1 号球的投法组成的集合， A_2 是 2 号盒子投 2 号球的投法组成的集合， A_3 是 3 号盒子投 3 号球的投法组成的集合， A_4 是 4 号盒子投 4 号球的投法组成的集合， A_5 是 5 号盒子投 5 号球的投法组成的集合，

则 $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=|A_5|=A_4^4$ ，集合有 C_5^1 个

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_2|=+\cdots=|A_4\cap A_5|=A_3^3$，交集有 C_5^2 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=\cdots=|A_3\cap A_4\cap A_5|=A_2^2$，交集有 C_5^3 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|=\cdots=A_1^1$，交集有 C_5^4 个

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=1$，交集有 C_5^5 个

由容斥原理

$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=C_5^1A_4^4-C_5^2A_3^3+C_5^3A_2^2-C_5^4A_1^1+C_5^5$

$=C_5^4A_4^4-C_5^3A_3^3+C_5^2A_2^2-C_5^1A_1^1+C_5^0=A_5^4-A_5^3+A_5^2-A_5^1+A_5^0$

于是 5 个球的编号与盒子编号全不相同的投法有

$|S|-(|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|)=A_5^5-(A_5^4-A_5^3+A_5^2-A_5^1+A_5^0)$

$=A_5^5-A_5^4+A_5^3-A_5^2+A_5^1-A_5^0=A_5^3-A_5^2+A_5^1-A_5^0=44$

（三）一般的结论

n 个球与 n 盒子的编号都分别是 1、2、3、…，n，把 n 个球投入 n 盒子中每盒 1 球，n 个球的编号与盒子编号全不相同的投法数是：

$$A_n^n - A_n^{n-1} + A_n^{n-2} - \cdots + (-1)^n A_n^0$$

1250、蜘蛛 Jam 给他的 8 只脚穿上袜子和鞋子，每只脚要先穿袜子才能穿鞋，那么不同的穿法总数为

A、$2\times 8!$　B、$2^8\times 8!$　C、$(8!)^2$　D、$\frac{16!}{2^8}$

解：设脚 1 至脚 8 的袜子分别为 abcdefgh，脚 1 至脚 8 的鞋子分别为 ABCDEFGH

对 abcdefghABCDEFGH 作全排列，但 Aa,aA 只是一种符合条件，于是要除以 2，其他也类似再除以 7 次 2，因此不同的穿法总数为$\frac{16!}{2^8}$

1294、(排列组合) (竞赛)

$1\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant 8$,a,b,c,d 均为整数,符合条件有几种?

解法 3：符合条件的选法有

a=2,b=2,c=6, d=7

a=3,b=4,c=8, d=8

……等等

我们把每个数的顺次加上 0，1，2，3

（2，2，6，7）就变成了（2，3，8，10）

（3，4，8，8）就变成了（3，5，10，11）

……

注意到

（2，3，8，10），（3，5，10，11），……

相当于是从 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 中选出四个不同元素的组合

于是符合条件的有 C_{11}^4 种

1295、(组合数学)

讲座　　生成函数之一

1、引例：1≤a≤b≤c≤d≤8,a,b,c,d 均为整数,符合条件有几种?

解：符合条件的选法有

a=2,b=2,c=6, d=7

a=3,b=4,c=8, d=8

……等等

我们把每个数的顺次加上 0，1，2，3

（2，2，6，7）就变成了（2，3，8，10）

（3，4，8，8）就变成了（3，5，10，11）

……

注意到

（2，3，8，10），（3，5，10，11），……

相当于是从 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 中选出四个不同元素的组合

于是符合条件的有 C_{11}^4 种

这个组合数叫做从 8 个不同的元素中可重复地选出 4 个个元素的组合数

一般地从求从 n 个不同的元素中可重复地选出 m 个元素的组合数是 C_{n+m-1}^m

2、生成函数

从 4 个 a ,3 个 b 选出 2 个元素的所有组合有 aa 、 ab 、 bb ， 组合数有 3 个

构造 $(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4)(1+bx+b^2x^2)$ ， 它的展开式中 x^2 项的系数是

$aa+ab+bb$ 各个加数正好是从 4 个 a ,3 个 b 选出 2 个元素的的所有组合。我们让 $a=b=1$，式子 $aa+ab+bb$ 中的每个组合就变成数字 1 了，相加得 3，就是组合的个数。于是从 4 个 a ,3 个 b 选出 2 个元素的组合数就是 $(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$ 展开式的中 x^2 项的系数。

同理，在展开式的中 x^3 项的系数，是选出 3 个元素的组合数，在展开式的中 x^4 项的系数

是选出 4 个元素的组合数。于是多项式 $(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$ 就决定了从 4 个 a ,3 个 b 选出 k（k=0,1,2,⋯,7）个元素的组合数，这些组合数次是 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，a_7。

我们把多项式 $(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$ 叫做数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$， a_7 的生成函数（或母函数）。

再例如数列 C_n^0， C_n^1， C_n^2， ⋯， C_n^n 的生成函数是 $(1+x)^n$

3、从 3 个不同的元素中可重复地选出 2 个元素的组合数

从 a， b， c 可重复地选出 2 个元素的所有组合有 aa 、 ab 、 ac 、 bb 、 bc 、

cc共 6 个构造式子

$$(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots)(1+bx+b^2x^2+a^3x^3+\cdots)(1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\cdots),$$

此式展开式中 x^2 项的系数是 $aa+bb+cc+ab+ac+bc$，它的各个加数正好是从 a，b，c 中可重复地选出 2 个元素的所有组合。我们让 $a=b=c=1$，式子 $aa+bb+cc+ab+ac+bc$ 中的每个组合就变成数字 1 了，相加得 6，就是组合的个数。于是从 a，b，c 可重复地选出 2 个元素的所有组合组合数就是 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3$ 展开式的中 x^2 项的系数。母函数 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3$ 可化为

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3=(\frac{1}{1-x})^3=(1-x)^{-3}=C_{-3}^0+C_{-3}^1(-x)+C_{-3}^2(-x)^2+C_{-3}^3(-x)^3+\cdots$$

于是所求的组合数 $=C_{-3}^2(-1)^2=\frac{(-3)(-4)}{1\times2}\times(-1)^2=6$ 即 $H_n^r==C_{-3}^3(-1)^3=10$

从三个不同的元素中可重复地选出 2 个元素的组合数是 x^2 项的系数。

$C_{-3}^2(-1)^2$

从三个不同的元素中可重复地选出 5 个元素的组合数是 x^5 项的系数。

$C_{-3}^5(-1)^5$

一般地，从三个个不同的元素中可重复地选出 r 个元素的组合数是 $C_{-3}^r(-1)^r$

4、从 n 个不同的元素中可重复地选出 r 个元素的组合数

一般地，从 n 个不同的元素中可重复地选出 r 个元素的组合数是 $C_{-n}^r(-1)^r$

$$C_{-n}^r(-1)^r=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}\times(-1)^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}\times(-1)^{2r}=C_{n+r-1}^r$$

从求从 n 个不同的元素中可重复地选出 r 个元素的组合数是 C_{n+r-1}^r

1355
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23675&show=0

印有 123456 点的骰子有多少种?

解:(1)先把 1 点刻好,则其对面有 5 种刻法,下四面是环形排列问题,有 **(**4 - 1**)!** = 6 种刻法，于是共有 30 种刻法

(2) 骰子中的 123456 是用点对称点表示,其中 145 点是中心对称的不论如何刻都是相同的，而 236 点有横纵两个方向的刻法

综上印有 123456 点的骰子共有 30×8=240 种

1381
http://bbs.pep.com.cn/thread-285432-1-1.html

足球场上三人相互传球,由甲开始发出,作为第 1 次传球 ,经过 7 次传球后,球仍回到甲,则不同的传球方法数是:

A. 12　　　　B.22　　　　C. 42　　　　D.52

每次传球有 2 种选择，故 n 次传球共有 2^n 种方法，设其中传到甲手上的有 a_n 种，则不传到传到甲手上的方法数就是下一次能传到有甲手上的方法数 a_{n+1}，于是 $a_n + a_{n+1} = 2^n$，于是

a1=0, a2=2, a3=2, a4=6, a5=10, a6=22, a7=42

当然这里可写出通通公式，一般的情形，见廖老师网上解答第 1044 题

1388
http://bbs.pep.com.cn/thread-286077-1-1.html
有 3 对夫妻排成一行
问夫妻不相邻的排法有几种?
A(6,6)-3A(2,2)A(5,5)+3A(2,2)A(2,2)A(4,4)-A(2,2)A(2,2)A(2,2)A(3,3)

1392
http://bbs.pep.com.cn/thread-285312-1-1.html

函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$满足$f[f(x)]=f(x)$，则这样的函数共有多少个？

解：当 $f(t)=t$，显然有 $f(f(t))=f(t)$

设 $f(t)=k(k\neq t)$时，则 $f(f(t))=f(k)$，又 $f(f(t))=f(t)=k$

于是 $f(k)=k$

所以在 1，2，3 中至少有一个的象是本身
1，2，3 的象全是本身的映射有 1 个

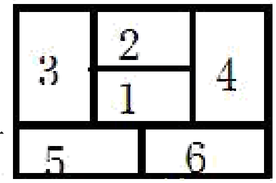
1，2，3 的恰有两个元素的象是本身的映射有 $C_3^2\times 2=6$ 个

1，2，3 的恰有 1 个元素的象是本身的映射有 $C_3^1=3$ 个

故共有 10 个满足条件的映射

1397

http://bbs.pep.com.cn/thread-287620-1-2.html



某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图）.现要栽种种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有__360 _________。（以数字作答）

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=287620&pid=2989442&page=1&extra=pageD1#pid2989442

如图，最多用 6 种颜色填充各个部分，相邻部分不得同色，共几种涂法？

我们老师讲的方法是：分 4 类（涂 6，5，4，3 种颜色）

但是每一类内部究竟改怎样计算，希望详解，谢谢大家。

解 1：先为 1 作色有 6 种方法，环形部分只能用 5 种颜色

设环形的有 n 块有 a(n)种着色方法，在 n 块的前提下插入新的一块得 n+1 块，

（1）若插入新的一块左右不同色就有 3 种着色方法，而原来的 n 块有 a(n)种着色方法，于是 n+1 块有 3a(n)种着色方法，

（2）若插入新的一块左右同色就有 4 种着色方法，而原来的 n 块有 a(n-1)种着色方法，于是 n+1 块有 4a(n-1)种着色方法.

a(n+1)= 4a(n-1) +3a(n) (n≥3)

a(2)=5×4=20, a(3)= 5×4×3=60

a(4)= 4 a(2)+3 a(3)=80+180=260,

a(5)= 4 a(3)+3 a(4)=240+780=1020

于是有 1020×6=6120 种

解 2：设 5 色为 n 块环形着色有 a_n 种着色方法，则 $a_n =\ 5\times4^{n-1}-a_{n-1}$ (n≥3)

$a_3=5\times4\times3=60$，$a_4=5\times4\times4\times4-60=260$

$a_5=5\times4\times4\times4\times4-260=1280-260=1020$

于是有 1020×6=6120 种

1412、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=288850&page=1#pid3001382

怎样用构造组合模型的方法证明 $\sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{n} = C_{n+m+1}^{n+1}$

构造一：当 n=5、m=4、时 $C_{n+m+1}^{n+1} = C_{n+m+1}^{m} = C_{10}^{4}$
设 10 人中有甲乙丙丁 4 人
从 10 人中选 4 人，可分为

（1）不选甲，C_9^4 种选法，（2）选甲不选乙，C_8^3 种选法

（3）选甲乙不选丙，C_7^2 种选法

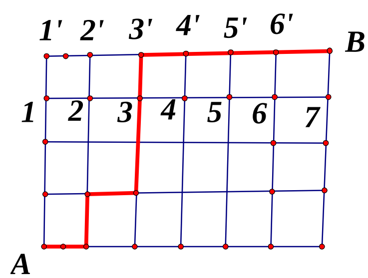
（4）选甲乙丙不选丁，C_6^1 种选法（5）甲乙丙丁都选到，就 1 种选法

于是 $C_{10}^4 = C_9^4 + C_8^3 + C_7^2 + C_6^1 + C_5^0$

也可写成 $C_{10}^6 = C_9^5 + C_8^5 + C_7^5 + C_6^5 + C_5^5$
一般情形类似

构造二：

如图从 A 到 B 的最短路径数为 C_{10}^{4}



可分为 7 类：
分别到 1、2、3、4、5、6、7 后先向上再向右走到 B，

走法数共有 $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3$

于是 $C_{10}^4 = C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 + C_9^3$

1421、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=290317&extra=pageD2&page=1

同时投掷三个骰子，点数之和为多少，这个数频率最大

解：每个骰子有 6 种点数，对应的多项式是 $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$，三个骰子的母函数是

$$f(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3=x^3(\frac{1-x^6}{1-x})^3=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}$$

3 点：x^3项＝x^3有 1 种

4 点：x^4项＝$x^3C_{-3}^1(-x)^1=3x^4$　有 4 种

5 点：x^5项＝$x^3C_{-3}^2(-x)^2=C_4^2x^4=6x^4$有6种

6 点：x^6项＝$x^3C_{-3}^3(-x)^3=C_5^3x^5=10x^4$有10种

7 点：x^7项＝$x^3C_{-3}^4(-x)^4=C_6^4x^7=15x^4$有15种

8 点：x^8项＝$x^3C_{-3}^5(-x)^5=C_7^5x^7=21x^7$有21种

9 点：x^9项＝$x^3[C_{-3}^6(-x)^6+C_3^1(-x^6)^1]=(C_8^6-C_3^1)x^9=25x^9$有25种

10 点：x^{10}项＝$x^3[C_{-3}^7(-x)^7+C_3^1(-x^6)^1C_{-3}^1(-x)^1]=(C_9^7-C_3^1C_3^1)x^{10}=27x^9$有27种

11 点：x^{11}项＝$x^3[C_{-3}^8(-x)^8+C_3^1(-x^6)^1C_{-3}^2(-x)^2]=(C_{10}^8-C_3^1C_4^2)x^{11}=27x^{11}$有27种

12 点：x^{12}项＝$x^3[C_{-3}^9(-x)^9+C_3^1(-x^6)^1C_{-3}^3(-x)^3]=(C_{11}^9-C_3^1C_5^3)x^{12}=25x^{11}$有25种

13 点：x^{13}项＝$x^3[C_{-3}^{10}(-x)^{10}+C_3^1(-x^6)^1C_{-3}^4(-x)^4]=(C_{12}^{10}-C_3^1C_6^4)x^{13}=21x^{11}$有21种

14 点：x^{14}项＝$x^3[C_{-3}^{11}(-x)^{11}+C_3^1(-x^6)^1C_{-3}^5(-x)^5]=(C_{13}^{11}-C_3^1C_7^5)x^{13}=15x^{11}$有15种

15 点：有10种

16 点：有6种

17 点：有3种

18 点：有1种

于是 10 点、11 点的频率最大，其最大值是 $\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$

1432

http://bbs.pep.com.cn/thread-291962-1-1.html

从 1，2，3，…，20 这 20 个自然数中，每次任取 3 个数，若所取三数中每两个数之间至少相隔两个自然数，则这样的数组有________个

再出两个类似的题目大家做一做

解：在一排 16 个位置中取 3 个位置，做上记号，在作了记号的 3 个位置的每两个位置之间再分别安上两个位置，这样就能保证作了记号的 3 个位置每两个位置之间至少相隔两个位置了。答 C(16,3)

练习

1、已知 A={1,2,3,-⋯,14}，,B={a_1,a_2,a_3}，同时满足：

(1)B 是 A 的真子集（2）a_2-a_1≥3，a_3-a_2≥2 的集合 B 共有多少个？

2、一条长椅上有 9 个座位，若 3 个人坐，要求相邻 2 人之间至少有 2 个空椅子，则共有（　　　）种不同的坐法。

A、84　　B、72　　C、60　　D、48

答：$C_5^3A_3^3=60$　答：C_{11}^3

1473、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=290128&extra=&page=1
ay520 同学说：最新的发现！！！排列＇组合一个公式！顶！！！

n 个人写了 n 张卡片,每人写了 1 张．每个人要和别人交换．有好多的方法？可以用下面的公式吗？
{[(1×3-1)×4+1]×5-1}×6+1……

括号外如果乘的是奇数则用减，偶数则用加．
n 就是人的个数，我举个列子．如果 n＝５，则 ［(１×３－１)×４＋１］×５－１＝４４种

答：(1)ay520 同学的发现完全正确，这是错排公式的一种重要形式，祝贺 ay520 同学

(2)设 n 位的错排数为 D_n，则 $D_n=(\mathrm{n}-1)(D_{n-2}+D_{n-1})(\mathrm{n}\ge 3), D_1=0, D_2=1,$

证明：n 位错排中第一位可排 2,，3，…，n

设 2 排在第一位的错排数的 M 个，则 $D_n=(\mathrm{n}-1)\mathrm{M}$

2 排在第一位的错排又可分为 1 排在第二位与 1 不排在第二位两种

1° 当 2 排在第一位且 1 排在第二位时，错排数=D_{n-2}

2° 当 2 排在第一位且 1 不排在第二位时，若把这个 1 当成 2，于是相当于 2，3，…，n 在第二位，第三位，…，第 n 位的错排，错排数=D_{n-1}

综上 M=$D_{n-2}+D_{n-1}$

于是 $D_n=(\mathrm{n}-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

(3) $D_n=\mathrm{n}D_{n-1}+(-1)^n(\mathrm{n}\ge 2), D_1=0$

证明：因为 $D_n=(\mathrm{n}-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$，所以 $D_n-\mathrm{n}D_{n-1}=(\mathrm{n}-1)D_{n-2}-D_{n-1}$

于是 $\{D_n-\mathrm{n}D_{n-1}\}$ 是等比数列，公比为-1，首项 $D_2-2D_1=1$

于是第 n-1 项 $D_n-\mathrm{n}D_{n-1}=(-1)^{n-2}=(-1)^n$

所以 $D_n=\mathrm{n}D_{n-1}+(-1)^n(\mathrm{n}\ge 2)$

(4) 证明 ay520 同学发现的新公式 D_n = {[(1×3-1)×4+1]×5-1}×6+1……

$$D_3=3D_2+(-1)^3=3\times1-1$$

$$D_4=4D_3+(-1)^4=4(3\times1-1)+1$$

$$D_5=5D_4+(-1)^5=5[4(3\times1-1)+1]-1$$

……

(5)用递推公式 $D_n=\mathrm{n}D_{n-1}+(-1)^n(\mathrm{n}\ge 2)$ 推导 $D_n=\mathrm{n}![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\mathbf{L}+\frac{(-1)^n}{n!}]$

推导：$D_n=\mathrm{n}D_{n-1}+(-1)^n=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)D_{n-2}+n(-1)^{n-1}+(-1)^n$

$$=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)D_{n-3}+\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(-1)^{n-2}+n(-1)^{n-1}+(-1)^n$$
$$=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\bullet\mathbf{L}\bullet 2D_1+\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\bullet\mathbf{L}\bullet 3(-1)^2$$
$$+\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\bullet\mathbf{L}\bullet 4(-1)^3+\mathbf{L}+n(-1)^{n-1}+(-1)^n$$
$$=\mathrm{n}![\frac{0}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}-\frac{(-1)^3}{3!}+\mathbf{L}+\frac{(-1)^n}{n!}]=\mathrm{n}![\frac{1-1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}-\frac{(-1)^3}{3!}+\mathbf{L}+\frac{(-1)^n}{n!}]$$
$$=\mathrm{n}![1+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\mathbf{L}+\frac{(-1)^n}{n!}]$$