廖老师网上千题解答分类二十三、概统

82、一个袋子有大小相同的 2 个白球，和 3 个黑球，一共摸 2 次，摸一次后放如袋子再摸第二次，求两次摸到不同颜色的球的概率

答：方法 1：可以分为第一次摸白第二次摸黑$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$与第一次黑第二次白两类$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

方法 2：把两次白，两次黑减掉$1-(\frac{2}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{12}{25}$

87、2004 年某省高考理工类报考学生有 20 万人，考试的成绩服从正态 N（360，280^2），若规定本科学生投档名额为 8 万人，那么可以估计本科投档成绩为多少分？已知：ø（0.25）＝0.6

解：设本科投档成绩为多少分 x 分

则 P（$x \ge x$)=1- P（$x < x$)=1- F(x)=1- $f(\frac{x-360}{280})$=8÷20

$f(\frac{x-360}{280})$=0.6， $\frac{x-360}{280}=\frac{1}{4}$， $x=430$

107、有奖售活动中，n 人得三等奖(n≥4)，三等奖奖品 4 种，每个三等奖获得者随便从 4 种奖品中挑选了一种，结果有一种奖品没人拿。问这种情况的概率是多少？

解：P=$\frac{C_4^3 3^n}{4^n}$

109、辆不同的车,排成 2 行 3 列展出，其中 2 辆来自同一厂的，则此 2 辆车前后或左右相邻的概率是多少？

解：$n=6!$， $m=C_3^1A_2^2A_4^4+C_4^1A_2^2A_2^2A_3^3+C_4^1A_2^2A_2^2A_3^3$， $P=\frac{m}{m}=\frac{1}{3}$

244、如题：为了防止意外，在矿内同时设有两种报警系统 A 与 B，每种系统单独使用时，其有效的概率是系统 A 为 0.92,系统 B 为 0.93.在 A 失灵的条件下，B 有效的概率为 0.85.在 B 失灵的条件下，求 A 有效的概率？(全概率高考不要求)

解：P(A)=0.92，P(B)=0.93,P(B|$\bar{A}$)=0.85

P(B)=P(AB)+ P($\bar{A}$B)= P(A)P(B|A) +P($\bar{A}$) P(B|$\bar{A}$)

0.93＝0.92× P(B|A)+0.08×0.85

故 P(B|A)＝0.937. P($\bar{B}$|A)＝1-0.937=0.063.

P(A|$\bar{B}$)=$\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)P(\bar{B}\mid A)}{P(\bar{B})}=\frac{0.93\times 0.063}{0.07}=0.837$

344、已知随机变量x 的分布列为$P(x=k)=\frac{ak}{3^k}(x=1,2,3,\cdots)$,则$a=$____

（高考不要求）

解：$P(x=k)=\frac{ak}{3^k}(n\in N+)$

设$S_k=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{k}{3^k}$（1） $\frac{1}{3}S_k=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{k}{3^{k+1}}$（2）

故$\frac{2}{3}S_k=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}-\frac{k}{3^{k+1}}$， $\frac{2}{3}\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$， $\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

因此$S_k=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{k}{3^k}+\cdots=\frac{3}{4}$

$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+\cdots+P(x=k)+\cdots$

$=a(\frac{0}{3^0}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{k}{3^k}+\cdots)=\frac{3a}{4}=1$ 故$a=\frac{4}{3}$

662、有 6 双不同尺码的鞋子，任取 4 只，求至少配成一双的概率。(排列组合)

解 1：有 6 双任取 4 只的取法数为$C_{12}^4=495$

恰好配成一双的取法数是：$C_6^1(C_5^2+C_5^2+C_5^1C_4^1)=240$

配成两双的取法数是：$C_6^2=15$， 故所求概率为$\frac{255}{495}=\frac{17}{33}$

解 2：有 6 双任取 4 只的取法数为C_{12}^4

不能配成一双的取法数是：$C_6^4\cdot 2^4$

不能配成一双的概率＝$\frac{C_6^4\cdot 2^4}{495}=\frac{16}{33}$

于是,至少配成一双的概率＝$1-\frac{16}{33}=\frac{17}{33}$

解法 3：6 双任取 4 只的取法数为C_{12}^4

不能配成一双的取法数是$\frac{12\times10\times8\times6}{4!}$

不能配成一双的概率＝$\frac{12\times10\times8\times6}{4!}/\frac{12\times11\times10\times9}{4!}$＝$\frac{8\times6}{11\times9}=\frac{16}{33}$

于是,至少配成一双的概率＝$1-\frac{16}{33}=\frac{17}{33}$

注：我喜欢的解法是解法 2

676、正方体六个面内的所有对角线中，互成 60 度角的对角线共有多少对？(排列组合)
答：每条面对角线都与相邻四个面的 8 条面对角线成 60 度，
共有 12 条面对角线，于是有 12×8 对
但是这样算，“每一对”都被算了两次，于是为 12×8/2 对
739、瓶中有 36 粒药片，现从中随意倒出若干粒（至少倒出一粒），“倒出药粒数目为奇数的概率”与“倒出药粒数目为偶数的概率”谁大谁小？(概率)
解：设 A={倒出药粒数目为奇数}，B={倒出药粒数目为偶数}

$$P(A)=\frac{C_{36}^{1}+C_{36}^{3}+C_{36}^{5}+\cdots+C_{36}^{35}}{N}，\quad P(B)=\frac{C_{36}^{2}+C_{36}^{4}+C_{36}^{6}+\cdots+C_{36}^{36}}{N}$$

因为 $C_{36}^{1}+C_{36}^{3}+C_{36}^{5}+\cdots+C_{36}^{35}=C_{36}^{0}+C_{36}^{2}+C_{36}^{4}+C_{36}^{6}+\cdots+C_{36}^{36}$

所以 $C_{36}^{1}+C_{36}^{3}+C_{36}^{5}+\cdots+C_{36}^{35}>C_{36}^{2}+C_{36}^{4}+C_{36}^{6}+\cdots+C_{36}^{36}$

于是 $P(A)>P(B)$

889、线段长度为 a,在线段上任取两点，将线段分为三段，求这三条线段组成三角形的概率

解：第一段的长度为 x，第二段的长度为 y，第三段的长度为 $1-x-y$，

所有基本事件组所对应的几何区域为 $\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,x+y<a\}$

此区域面积为 $\frac{1}{2}a^2$（图 1）
事件“所折三段构成三角形” 所对应的几何区域为

$\{(x,y)\mid x+y>a-x-y,x+(a-x-y)>y,y+(a-x-y)<x\}$

$=\{(x,y)\mid x+y>\frac{a}{2},y<\frac{a}{2},x<\frac{a}{2}\}$ 此区域面积为 $\frac{1}{8}a^2$（图 2）

故事件“三段构成三角形”的概率为 $p=\dfrac{\frac{1}{8}a^2}{\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{1}{4}$

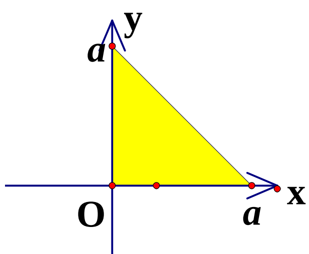


图 1

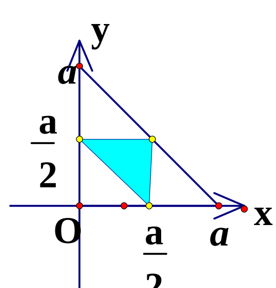


图 2

897、两人约会时间定在八点到十点之间.如果让其中某个人等待超过二十分钟则约会失败。求这次约会成功的概率

解： 用 x , y （分钟为单）分别表示甲乙二人到达的时刻，
于是有，所有基本事件组所对应的区域为

$\{(x,y)\mid 0\le x\le 120, 0\le y\le 120\}$，此区域面积为$120^2$

二人约会成功这一事件对应的区域为

$\{(x,y)\mid 0\le x\le 120, 0\le y\le 120, |x-y|<20\}$，此区域面积为$120^2-100^2$

于是约会成功这一事件的概率为 $p=\dfrac{120^2-100^2}{120^2}=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{11}{36}$

926、(概率)

甲乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是$\dfrac{2}{3}$和$\dfrac{3}{4}$，假设两人射击是否击中目标，相互之间没有影响，每次射击是否击中标，相互之间没有影响。
（1）求甲射击 4 次，至少 1 次未击中目标的概率
（2）求两人各射击 4 次，甲恰好击中两目标 2 次且乙恰好击中两目标 3 次的概率
（3）假设某人连续 2 次未击中目标则停止射击，问乙恰好射击 5 次后被中止射击的概率是多少？
解：设“甲射击一次击中目标”为事件 A，“乙射击一次击中目标”为事件 B，

则 $P(A)=\dfrac{2}{3}$， $P(B)=\dfrac{3}{4}$

（1）“甲射击 4 次，至少 1 次未击中目标”记为事件 C

则 $P(C)=1-P_4(4)=1-(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{65}{81}$

（2）“甲恰好击中两次目标 2 次且乙恰好击中两目标 3 次” 记为事件 D

则 $P(D)=P_4(2)P_4'(3)=C_4^2(\dfrac{2}{3})^2(\dfrac{1}{3})^2C_4^3(\dfrac{3}{4})^3(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{8}$

（3）“乙恰好射击 5 次后被中止射击” 记为事件 E

则 $\boldsymbol{P(E)=(1-}\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\boldsymbol{)}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{75}{1024}$

答：略

1026、 如何区分互斥事件与相互独立事件？

答：要弄清楚互斥事件与相互独立事件的概念
所谓的互斥事件是指：两个事件一个发生另一个必不发生
所谓的相互独立事件是指：一个事件的发生，对另一个事件是否发生不会产生影响。即一个事件的概率与另一个事件的概率没有关系。
若两个事件互斥，则这两个事件一个发生另一个必不发生，说明一个事件的的发生，对另一个事件是否发生会产生影响。因此这两个事件必然不是相互独立事件
相互独立的事件一个事件的发生另一个事件是否发生不会产生影响，当然这两个事件不可能是互斥的

1051、请教各位高二下 B 版组合一节有一道例题，P93 例 4 一个口袋内装有大小相同的 7 个白球和一个黑球，（1）问从口袋内取出三个球共有多少种不同的取法？

此问中白球是否完全相同？若是，那么取任意三个白球是否是一种结果？若不是，大小相同又是什么意思？望各位指教

答：本题"大小相同的 7 个白球"，在此处"大小相同"并不能认为是"完全相同"，应当成 7 个不同的球处理。

我想课本编写者是为等可能事件的概率题做个铺垫，估计此例出题者是取自于等可能事件的概率题，在等可能事件的概率题中要求取到每个球是等可能的，于是有"大小相同"之说。但出在此处却容易引起误会，这是出题者没有想到的

1073、有 10 个均匀材料做成，各面上分别标有数字 1,2,3,4,5,6 的正方体玩具，每次同时抛出，共抛 5 次，则至少有一次全都是同一各数字的概率是________.

解：1 次同时抛出全都是同一个数字的概率是 $p=(\frac{1}{6})^{10}$

于是抛 5 次，至少有一次全都是同一个数字的概率是

$$P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=1-P_5(0)=1-C_5^0[(\frac{1}{6})^{10}]^0[1-(\frac{1}{6})^{10}]^5$$

$$=1-[1-(\frac{1}{6})^{10}]^5$$

1087、考试时共有 **N** 张考签，**n** 个学生参加考试（**n** 大于 **N**），被抽过的考签立刻放回，求在考试结束之后，至少有一张考签没有被抽到的概率。

解：一次抽取每张考签被抽到的概率是 $\frac{1}{N}$

一次抽取每张没有被抽到的概率是 $1-\frac{1}{N}$

n 次抽取某张考签都没被抽到概率是 $(1-\frac{1}{N})^n$

n 次抽取某张考签被抽到概率是 $1-(1-\frac{1}{N})^n$

n 次抽取 N 张考签都被抽到概率是 $[1-(1-\frac{1}{N})^n]^N$

n 次抽取 N 张考签至少有一张考签没有被抽到的概率 **1-**$[1-(1-\frac{1}{N})^n]^N$

1104、问题：下列随机变量的分布列不属于二项分布的是（　）

A 某事业单位有 500 名在职人员，人事部门每年要对在职人员进行年度考核，2004 年度考核中每个考核优秀的概率是 0.15，设该单位在这一年里，各人年度考核优秀是相互独立的，考核优秀的人数为x；

B、位于某汽车站附近的一个加油站，在每次汽车出站后，该汽车到这个加油站加油的概率是 0.7,节日期间每天有 50 辆汽车开出该站，假设一天里汽车去该加油站加油是相互独立的，其加油的汽车数为x；

C、某射手射射击击中目标的概率为p，设每次射击是相互独立的，从开始射击到击中目标所需要的射击次数为x；

D、据中央电视台新闻台新闻联播报道，下周内在某网站下载一次数据，电脑被感染某种病毒，网站下载数据n次中被感染这种病毒的次数为x

答：(一)相关概念

1、重复试验：第二次试验是第一次试验的重复，或是第一次的再现

2、独立重复试验：在重复试验中，第二次试验不受第一次试验的影响

3、在 n 独立重复试验中事件 A 恰好发生 m 次的概率：在独立重复试验中，第一次试验的事件 A 发生的概率是 p，在第二次试验中事件 A 发生的概率是还是 p，……，在第 n 次试验中事件 A 发生的概率是仍然是 p；在 n 次试验中事件 A 恰好发生 m 次的概率等于$C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，记作$P_n(k)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

4、在 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率：在独立重复试验中，第一次试验的事件 A 发生的概率是 p，在第二次试验中事件 A 发生的概率是还是 p，……，在第 n 次试验中事件 A 发生的概率是仍然是 p；在 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率等于$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，记作$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

5、二项分布：如果随机变量x表示在 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，那么$P(x=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，我们称随机变量$x$服从二项分布。

6、几何分布：如果随机变量x表示在独立重复试验中事件 A 第一次发生时试验的次数，那么$P(x=k)=(1-p)^{k-1}p$，我们称随机变量x服从几何项分布。

(二)解答题目

1、A、对第一人考核可看成第一次试验，对第二人考核可看成第二次试验，第二次试验可看成是第一次试验的重复，……。在对每个人的考核中我们关注的事件 A 是“此人考核优秀”。随机变量x表示 500 次考核中考核优秀的人数，即随机变量x表示 500 次试验中事件 A 发生的次数，于是x服从二项分布。

2、C、在每一次射击中我们关注的事件 A 是“击中目标”。随机变量x表示表示在一次又一次的射击中第一次“击中目标”时射击的次数，于是x服从几何分布

3、B、D 都是二项分布。4 正确答案：C

1107、同时抛三枚骰子，向上的点数之和为8，且至少有一枚是一点的概率为______

解：设抛三枚骰子第一枚，第二枚，第三枚的点数分别为 x,y,z

则（x,y,z）的所有情况有6^3种，于是此试验基本事件个数$n=6^3$

设事件$A=\{$点数之和为 8，其中少有一枚是 1 点$\}$

点数之和为 8，其中少有一枚是 1 点的情况可分为 3 类

（1）当$x=1$时，因$x+y+z=8$于是

$y+z=7$于是有$\begin{cases}y=1\\z=6\end{cases}$，$\begin{cases}y=2\\z=5\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$，$\begin{cases}y=4\\z=3\end{cases}$，$\begin{cases}y=5\\z=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=6\\z=1\end{cases}$

共有 6 种情况

（2）当$y=1$时，同（1）也是有 6 种情况

（3）当$z=1$时，也是 6 种情况

于是事件A所含的基本事件有$6+6+6=18$个

但是注意到

（x,y,z）$=(1,1,6)$在（1）（2）各算了 1 次

（x,y,z）$=(1,6,1)$在（2）（3）中各算了 1 次

（x,y,z）$=(6,1,1)$在（1）（3）中各算了 1 次

于是事件A所含的基本事件应为$m=18-3=15$

所以$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$

1108、甲乙两人将一枚骰子各抛一次，用 a，b 分别表示甲乙所得的点数，记 P（a，b），用 A 表示“点 P（a，b）落在区域 x>0,y>0,x+y<4,内的事件”，则事件 A 的概率为？

解：因为（a，b）所有情况有6^2种，于是此试验基本事件个数$n=36$

点 P（a，b）落在区域 x>0,y>0,x+y<4,内可分为 2 类

（1）当$a+b=2$时有 1 种情况

（2）当$a+b=3$时有 2 种情况

故事件A所含的基本事件为$m=13$，因此，$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

1109、问题：同时抛三枚骰子，求下列事件的概率

（1）第一枚骰子点数大于 4，第二枚点数为偶数，第三枚点数为奇数

（2）第一枚骰子点数大于 4，第二枚点数为偶数

（3）第二枚点数为偶数

这个问题按古典概型，基本事件是什么，都是哪些？

答：（一）概念与公式

1、等可能试验：一次试验只可能出现有限个不同的试验结果，而出现所有这些不同结果的可能性是相等的试验叫做等可能试验。

2、基本事件及概率：等可能试验下的每个等可能的结果叫做基本事件，若等可能试验有 n 个基本事件，则每个基本事件的概率是 $\frac{1}{n}$

3、等可能事件及概率：等可能试验下的事件叫做等可能事件，设等可能试验有 n 个基本事件，如果事件 A 包含了其中的 m 个基本事件，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$。

4、古典概型：可利用等可能事件的概率公式解决的概率问题叫做古典概型

（二）等可能试验中基本事件的选择要有利于我们所要考察的事件。

一个试验：有限个等可能的结果，常常可以根据我们所要考察的事件的改变而改变。

(二)本题解答

设抛三枚骰子第一枚，第二枚，第三枚的点数分别为 x,y,z

则（x,y,z）的所有情况有 6^3 种，于是此试验基本事件个数 $n=6^3$

（1）设事件 $A=\{$第一枚骰子点数大于 4，第二枚点数为偶数，第三枚点数为奇数$\}$

于是事件 A 所含的基本事件（x,y,z）要求 $x>4$，y 为偶数，z 为奇数

因此事件 A 所含的基本事件的个数 $m_1=2\times3\times3$

故 $P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{2\times3\times3}{6^3}=\frac{1}{12}$

（2）解法 1：设事件 $B=\{$第一枚骰子点数大于 4，第二枚点数为偶数，第三枚点数任意$\}$

事件 B 所含的基本事件的个数 $m_2=2\times3\times6$

故 $P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{2\times3\times6}{6^3}=\frac{1}{6}$

解法 2：设事件 $B=\{$第一枚骰子点数大于 4，第二枚点数为偶数$\}$

由于我们所要考察的事件 B 与第三枚的情况无关，因此我们可以把此试验基本事件锁定于第一枚与第二枚的各种情况而不考虑第三枚的情况，基于这种考虑设第一枚，第二枚的点数分别为 x,y 则（x,y）的所有情况有 6^2 种，于是此试验基本事件个数 $n_1=6^2$（这里的一个基本事件含解法 1 中的 6 个基本事件），

事件 B 所含的基本事件的个数 $m_2'=2\times3$，故 $P(B)=\frac{m_2'}{n_1}=\frac{2\times3}{6^2}=\frac{1}{6}$

（3）解 1、设事件 $C=\{$第一枚点数任意，第二枚点数为偶数，第三枚点数任意$\}$

设第一枚，第二枚，第三枚的点数分别为 x,y,z

则（x,y,z）的所有情况有 6^3 种，于是此试验基本事件个数 $n=6^3$

事件A所含的基本事件（x,y,z）要求x任意，y 为偶数，z 任意
因此事件A所含的基本事件的个数$m_3=6\times3\times6$

故$P(A)=\frac{m_3}{n}=\frac{6\times3\times6}{6^3}=\frac{1}{2}$

解 2、设事件$C=\{$第一枚点数任意，第二枚点数为偶数$\}$
设第一枚，第二枚的点数分别为 x,y
则（x,y）的所有情况有6^2种，于是此试验基本事件个数$n_1=6^2$
（这里的一个基本事件含解法 1 中的 6 个基本事件）
事件C所含的基本事件（x,y）要求x任意，y 为偶数

因此事件C所含的基本事件的个数$m_3{'}=6\times3$，故$P(A)=\frac{m_3{'}}{n_1}=\frac{6\times3}{6^2}=\frac{1}{2}$

解 3、设事件$C=\{$第二枚点数为偶数$\}$
设第二枚的点数为 y，则 y 的所有情况有 6 种，于是此试验基本事件个数$n_2=6$
（这里的一个基本事件含解法 2 中的 6 个基本事件，含解法 1 中的 36 个基本事件）
事件C所含的基本事件 y 为偶数，
因此事件C所含的基本事件的个数$m_3{''}=3$

故$P(A)=\frac{m_3{''}}{n_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

此题解法 3 最简单，可见等可能试验中基本事件的选择要越有利于我们所要考察的事件，解法越简单，课本中的抽签问题也是如此。
问题：一个人用银行卡取款，他的最后一位密码忘记了，那么他按最后一位密码时，最多按两次就按对的概率是多少？

1123(概率)

甲乙两位同学做摸球游戏，游戏规则规定：两人轮流从一个放有 2 个红球，3 个黄球，1 个白球且有送颜色不同的 6 个小球的暗箱中取球，每次每人只取一球，每取出一个后立即回，另一个接着取，取出后立即放回，谁先取出红球，谁为胜者。甲现先取
（1）求甲摸球次数不超过三次就获胜的概率；（2）求甲获胜的概率。

解：（1）甲第一次摸就获胜的概率$P_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

甲第二次摸就获胜的概率$P_2=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$

甲第三次摸就获胜的概率$P_3=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{16}{243}$

甲摸球不超过 3 次就获胜的概率为$P_1+P_2+P_3=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{2}{243}+=\frac{81+36+2}{243}=\frac{119}{243}$

（2）甲获胜的概率为$P=P_1+P_2+P_3+\cdots=\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$

注第(2)问是一个几何分布(高考不要求)

1128、甲乙独立的对同一目标各射击一次,其命中的概率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中,则它是甲命中的概率是多少?

讲解：

1、介绍一下条件概率

（1）设投一枚骰子记事件 A={点数大于 1}，事件 B={点数小于 5}

则 $P(A)=\dfrac{5}{6}$， $P(B)=\dfrac{4}{6}$， $P(AB)=\dfrac{3}{6}$

（2）若知道了事件 B 已经发生求，求事件 A 发生的概率

由于在事件 B 已经发生的条件下，

试验基本事件只有 1 点，2 点，3 点，4 点，即 $n(B)=4$

其中事件 A 所含的基本事件有其中的 2 点，3 点，4 点，即 $n(AB)=3$

于是在事件 B 发生的条件下 A 发生的概率＝$\dfrac{n(AB)}{n(B)}=\dfrac{3}{4}$

(3)我们把“事件 B 发生的条件下 A 发生”这个新的事件记作事件”A|B”

上面所求的概率可记作 $P(A\,|\,B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

2、甲乙独立的对同一目标各射击一次,其命中的概率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中,则它是甲命中的概率是多少

解：记事件 A={甲命中}，事件 B={乙命中}，

则{已知目标被命中的条件下是甲命中}=事件 A|（A+B）

因为 $P(A)=0.6$， $P(B)=0.5$

所以 $P[A\,|\,(A+B)]=\dfrac{P[A(A+B)]}{P(A+B)}=\dfrac{P(A)}{P(A+B)}=\dfrac{P(A)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}=\dfrac{0.6}{1-0.4\times 0.5}=\dfrac{3}{4}$

3、条件概率主要是用来解决事件的积的概率

由 $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 得， $P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)$

问题 1：一个人用银行卡取款，他的最后一位密码忘记了，那么他按最后一位密码时，最多按两次就按对的概率是多少？

解：设事件 A={第一次按对}，事件 B={第二次按对}

则“最多选两次就按对”就是事件 $A+\overline{A}B$

因为 $P(A)=\dfrac{1}{10}$， $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$，

由于并且事件 A 与 $\overline{A}B$ 互拆，于是 $P(A+\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{5}$

问题 2：甲乙两位同学做摸球游戏，游戏规则规定：两人轮流从一个放有 2 个红球，3 个黄球，1 个白球且有送颜色不同的 6 个小球的暗箱中取球，每次每人只取一球，每取出一个后立即回，另一个接着取，取出后立即放回，谁先取出红球，谁为胜者。甲现先取，求甲摸球次数不超过三次就获胜的概率；

解：甲第一次摸就获胜的概率 $P_1=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

甲第二次摸就获胜的概率 $P_2=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$

甲第三次摸就获胜的概率 $P_3=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{16}{243}$

甲摸球不超过 3 次就获胜的概率为 $P_1+P_2+P_3=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{2}{243}+=\frac{81+36+2}{243}=\frac{119}{243}$

1129、事件的运算及其概率

1、事件的运算

设事件 **A={**掷一个骰子，点数大于 2**}，**事件 **B={**掷一个骰子，点数为偶数**}，**

则 **A={**3 点，4 点，5 点，6 点 **}，B={**2 点， 4 点，6 点**}**

（1）事件的积：事件 A 与 B 同时发生**={**4 点，6 点**}，**

这个事件叫做事件 A 与 B 的积，记作：事件 **AB**

（2）事件的和：事件 A 与 B 至少一个发生**={**2 点，3 点，4 点，5 点，6 点**}，**

这个事件叫做事件 A 与 B 的和，记作：事件 **A+B**

（3）事件的对立：事件 **B 不发生={**1 点， 3 点，5 点**}，**

这个事件叫做事件 B 的对立，记作：事件 $\overline{B}$

事件的积、和、对立叫做事件的运算，运算法则与集合的交并补类似。

2、事件的运算的概率公式

（1）和积的概率之间的关系

还是用上面的例子，$P(A)=\frac{4}{6}$，$P(B)=\frac{3}{6}$，$P(AB)=\frac{2}{6}$，$P(A+B)=\frac{5}{6}$

容易知道 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，可以画一个文图感受一下

（2）对立公式：$P(A)+P(\overline{A})=1$

3、互斥事件与独立事件

（1）引例：**设**事件 **A={**掷一个骰子，点数大于 4**},** B=**{**掷一个骰子，点数小于 3**}**

事件 **C={**掷一个骰子，点数为偶数**}**

不论骰子掷出多少点，事件 A 与 B 都不会同时发生，这样的两个事件叫互斥事件。**当**骰子掷出 6 点，事件 A 与事件 C 都发生了于是事件 A 与 C 不是互斥事件。

（2）定义：若事件 A、B 不能同时发生，则事件 A 与 B 叫做互斥事件。

（3）互斥事件和的概率公式：设事件 A 与 B 是互斥事件

则事件 AB 是不可能事件，于是 $P(AB)=0$

因此 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$

（4）互斥与对立的关系：对立必互斥，互斥未必对立。

4、独立事件

（1）引例：**设** A={投一个骰子，点数大于 2}，B={投一枚硬币，出现正面}

A 是否发生对事件 B 发生的情况没有影响，B 是否发生对事件 A 发生的情况也没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

（2）定义：如果事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

或 $\boldsymbol{P(B|A)=P(B)}$ 则称 A 与 B 互相独立

（3）性质：若 A 与 B 独立，则 A、$\overline{A}$之一与 B、$\overline{B}$之一也独立

（4）独立与互斥的关系：独立不互斥，互斥不独立。

5、独立事件积的概率 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$

用古典概型直接感受也行

A={投一个小骰子，点数大于 2}，B={投一个大骰子，点数为奇数}，

则 A B＝{小骰子点数大于 2 且大骰子点数为奇数}

则 A 与 B 是独立事件，$P(A)=\dfrac{4}{6}$，$P(B)=\dfrac{3}{6}$，$P(AB)=\dfrac{4\times3}{6\times6}=P(A)P(B)$

一般地若 A 与 B 是独立事件，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

注：很多大学课本以此式为独立事件的定义式

6、例题

甲．乙二射击运动员分别对一目标射击 1 次，甲射中的概率为 0．8，乙射中的概率为 0．9 求：

（1） 2 人都射中的概率？

（2） 2 人中恰有 1 人射中的概率？

（3） 2 人至少有 1 人射中的概率？

（4） 2 人至多有 1 人射中的概率？

讲解：设事件 **A={**甲射中 **},** 事件 **B={**乙射中**}则** $P(A)=0.8$，$P(B)=0.9$

（1）{甲乙 2 人都射中}=事件 AB

因为事件 **A 与 B** 相互独立，

所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.72$

（2）{ 2 人中恰有 1 人射中}=事件 $A\overline{B}+B\overline{A}$

因为事件 $A\overline{B}$与$B\overline{A}$ 相斥，A与$\overline{B}$独立，B与$\overline{A}$独立

所以 $P(A\overline{B}+B\overline{A})=P(A\overline{B})+P(B\overline{A})$

$=P(A)P(\overline{B})+P(B)P(\overline{A})=0.8\times0.1+0.9\times0.2=0.26$

（3）{ 2 人至少有 1 人射中}=事件 $A+B$

解法 1：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.9-0.72=0.98$

解法 2：$P(A+B)=1-P(\overline{A}\bullet\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.02=0.98$

解法 2：$P(A+B)=P(AB+A\overline{B}+B\overline{A})=0.72+0.26=0.98$

（4）解法 1：{ 2 人至多有 1 人射中}=事件 $\overline{AB}$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.72=0.28$

解法 2：{ 2 人至多有 1 人射中}=事件 $A\overline{B}+B\overline{A}+\overline{A}\bullet\overline{B}$

$P(A\overline{B}+B\overline{A}+\overline{A}\bullet\overline{B})=0.26+0.02=0.28$

1137、某人有 4 把钥匙,其中有 2 把能开门,现随机取 1 把钥匙开门,不能开门的就扔掉,问第二次才能打开门的概率是多少?如果试过的钥匙不扔掉,这个概率是多少?

讲解(1)看作排列问题:第一个位置只能在两把不能开门的钥匙中选一把,第二个位置只能在两把能开门的钥匙中选一把,

(2)看作独立事件同时发生看:第一次没打开概率为 1/2,第二次开门概率为 1/2.

解:（1）不能开门的就扔掉

解 1： $\frac{2}{4}\bullet\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

解 2：符合条件的取法：

考虑第一次与第二次开门的情况

第一次取不能开门的钥匙有 A_2^1 种取法，第二次取能开门的钥匙有 A_2^1 种取法

故 $m=4$，所有取法有 $A_4^2=12$，故 $P_1=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

（2）试过的钥匙不扔掉（第 2 次还可能取到）

$\frac{2}{4}\bullet\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

1138、某招呼站，每天均有 3 辆车开往省城南京的分为上、中、下等级的客车，某天袁先生准备在该招呼站乘车前往南京办事，但他不知道客车的车况，也不知道发车顺序。为了尽可能乘上上等车，他采取如下策略：先放过第一辆，如果第二辆比第一辆好则上第二辆，否则上第三辆，那么他乘上上等车的概率为_________

解：出车顺序共有上中下，上下中，中上下，中下上，下中上，下中上，共有 6 种情况

可乘上等车的情况有：中上下，中下上，下中上，共有 3 种情况

于是可乘上等车的概率 P=3/6=0.5

1139、(概率)

一个盒子里装有标号 1，2，3,……，10 的标签，今随机地选取两张标签，根据下列条件求两张标签上的数字为相邻整数的概率：

（1）标签的选取是无放回的;

（2）标签的选取是有放回的。

请写出过程,两种分别是有顺序还是无顺序?

解:（1）解 1：符合条条的取法（讲顺序）

第 1 张取 1 或 10，则第 2 张 1 种法，

第 1 张取 2-8，则第 2 张有 2 种取法

于是 $m=2\times1+8\times2=18$

所有的取法有 $n=A_{10}^2=90$，于是 $P=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$

解 2：符合条条的取法（不讲顺序）：

有 12，23，34，45，56，67，78，89，910 共 9 种

所有的取法有 $n = C_{10}^{2} = 45$，于是 $P = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

（2）解 1：符合条条的取法（讲顺序）

第 1 张取 1 或 10，则第 2 张 1 种法，

第 1 张取 2-8，则第 2 张有 2 种取法

于是 $m = 2\times1 + 8\times2 = 18$

所有的取法有 $n = 10^{2} = 100$，于是 $P = \frac{18}{100} = \frac{9}{10}$

1145、某种比赛的规则是 5 局 3 胜制，甲、乙两人在比赛中获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$

（1） 若前 3 局中乙以 2：1 领先，求乙获胜的概率；

（2） 若胜 1 局得 2 分，负 1 局得 -1 分，求甲得分 x 的数学期望。

解：（1）第 4 局乙的概率为 $P_1 = \frac{1}{3}$

第 4 局甲胜，第 5 局乙胜的概率为， $P_2 = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

是所求的概率为 $P = P_1 + P_2 = \frac{5}{9}$

(2)

甲胜局数	0	1	2	3	3	3
甲败局数	3	3	3	2	1	0
甲得分数 x	-3	-1	1	4	5	6

因此， $P(x=-3) = (\frac{1}{3})^3$， $P(x=-1) = C_3^1(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^2 \bullet \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$P(x=1) = C_4^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 \bullet \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$， $P(x=4) = C_4^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 \bullet \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

$P(x=5) = C_3^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) \bullet \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$， $P(x=6) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$

于是 $Ex = \frac{1}{27}\times(-3) + \frac{2}{27}\times(-1) + \frac{8}{81}\times1 + \frac{16}{81}\times4 + \frac{8}{27}\times5 + \frac{8}{27}\times6 = \frac{107}{27}$

1147、将一枚硬币连掷 5 次，如果出现 k 次正面的概率等于出现 k+1 次正面的概率，那么 k 的值为（　　）

A、0　B、1　C、2　D、3

解： $C_5^k(\frac{1}{5})^5 = C_5^{k+1}(\frac{1}{5})^5 \Rightarrow C_5^k = C_5^{k+1} \Rightarrow k = 2$

1148、在一次试验中随机事件 A 发生的概率为 P，设在$k(k\in N^*)$次独立重复试验中随机事件 A 发生k次的概率为P_k，那么$P_1+P_2+\cdots+P_n$等于（　　）

A、$\dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$　B、np　C、np^n　D、1

解：在 k 次试验中 A 发生 k 次的概率$P_k=p^k$

于是$P_1+P_2+\cdots+P_n=p+p^2+\cdots+p^n=\dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$

1149 一道数学竞赛试题，甲生解出它的概率为$\dfrac{1}{2}$，乙生解出它的概率为$\dfrac{1}{3}$，丙生解出它的概率为$\dfrac{1}{4}$，由甲、乙、丙三人独立解答此题只有一人解出的概率为_____

解：因为$P_{甲}=\dfrac{1}{2}$，$P_{乙}=\dfrac{1}{3}$，$P_{丙}=\dfrac{1}{4}$

所以恰有一个答对的概率为

$$P_{甲}\bullet\overline{P_{乙}}\bullet\overline{P_{丙}}+\overline{P_{甲}}\bullet P_{乙}\bullet\overline{P_{丙}}+\overline{P_{甲}}\bullet\overline{P_{乙}}\bullet P_{丙}=\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}\bullet\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$$

1150、(概率)

甲投蓝的命中率为 0.8，乙投蓝的命中率为 0.7，每人各投 3 次，每人恰好都投中 2 次的概率是______________

解：$P_3(2)P_3'(2)=C_3^2 0.8^2 0.2\times C_3^2 0.7^2 0.3\approx 0.169$

1151、(概率)

三支球队中，甲队胜乙队的概率为 0.4，乙队胜丙队的概率为 0.5，丙队胜甲队的概率为 0.6，比赛顺序是：第一局是甲队对乙队，第二局是第一局中胜者对丙队，第三局是第二局胜者对第一局中败者，第四局是第三局对第二局败者，则乙队连胜四局的概率为 ______________

解：第 1 局甲对乙，乙胜出的概率是$P_1=0.6$

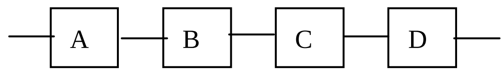
第 2 局乙对丙，乙胜出的概率是$P_2=0.5$

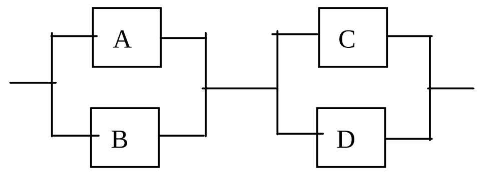
第 3 局乙对甲，乙胜出的概率是$P_3=0.6$

第 4 局乙对丙，乙胜出的概率是$P_4=0.5$

于是乙连胜 4 局的概率是$P=P_1P_2P_3P_4=0.6\times0.5\times0.6\times0.5=0.09$

1152、如下图，用 A、B、C、D 四类不同的元件连接成两个系统 N_1、N_2。当元件 A、B、C、D 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A、B 至少有一个正常工作，且 C、D 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作。已知元件 A、B、C、D 正常工作的概率依次为 0.8、0.9、0.9、0.7，分别求系统 N_1、N_2 正常工人作的概率 P_1、P_2.





解：设 A，B，C，D 正常工作的事件分别记做 A_1,A_2,A_3,A_4 于是

$P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.9,$
$P(A_3)=0.9, P(A_4)=0.7$

（1）记事件 M={系统 N_1 正常工作}，

于是 $M=A_1A_2A_3A_4$

由于 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立，因此

$$P(M)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0.8\times0.9\times0.9\times0.7\approx0.45$$

（2）记事件 T={系统 N_2 正常工作}，于是 $T=(A_1+A_2)(A_3+A_4)$

由于 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立，因此

$$P(T)=P(A_1+A_2)P(A_3+A_4)=[1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=(1-0.2\times0.1)(1-0.1\times0.3)=0.98\times0.97\approx0.95$$

1154、1～9 个数，平均分成三组，求每组的 3 个数成等差数列的概率？

解：1，2，3，4，5，6，7，8.，9

平均分成三组分法有 $\dfrac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}=280$ 种

每组可组成等差数列的方法有

（1）当 2 为其中一组的等差中项时，该组为（1，2，3），
余下两组要成等差数列只能是（4，5，6），（7，8.，9）

（2）当 3 为其中一组的等差中项时，该组为（1，3，5），
余下 6 个数为只能是 2，4，6，7，8.，9
余下两组要成等差数列只能是（2，4，6），（7，8.，9）

（3）当 4 为其中一组的等差中项时，除（2）外，还有一组为（1，4，7），
余下 6 个数为只能是 2，3，5，6，8.，9
余下两组要成等差数列只能是（2，5，8），（3，6.，9）

（4）当 5 为其中一组的等差中项时，除（1）（2）（3）外，还有一组为（1，5，9），和（3，5，7）
当一组为（1，5，9）余下 6 个数为只能有两组（2，3，4），（6，7，8.）
当一组为（3，5，7）余下 6 个数为只能有两组（1，2，4），（6，8，9.）
余下两组要成等差数列只能是（2，5，8），（3，6.，9）

故 $P=\dfrac{5}{280}=\dfrac{1}{56}$

1183、(概率)

人数 x / h	6	7	8
16	2	3	0
17	a	1	b

10 个人测量一个玻璃的长h和宽x，如下表，若$h=17$，$x=6$互不影响，

则$a=$______,$b=$_______

解： $a+b+6=10\Rightarrow a+b=4$

$P(h=17)=\dfrac{a+1+b}{10}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$， $P(x=6)=\dfrac{2+a}{10}$， $P(h=17且x=6)=\dfrac{a}{10}$

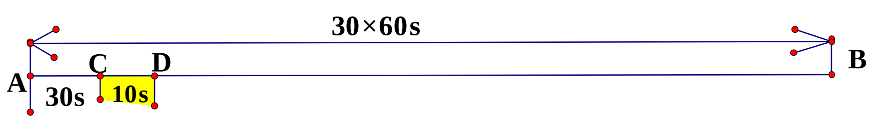
因为$h=17$与x=6 独立

所以 $P(h=17且x=6)=P(h=17)*P(x=6)$

于是$\dfrac{a}{10}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2+a}{10}$，解得$a=2$，$b=2$

1205、国家安全机关监听录音机录了两个间谍的谈话，发现 30min 长的磁带上，从开始 30s 处起，有 10s 长的一段内容包含两间谍犯罪的信息，后来发现，这段谈话被某工作人员擦掉了，该工作人员声称他完全是无意中按错了建，使从此处起往后的所有内容被擦掉了，那么由于按错了键使含犯罪内容的谈话被部分或全部擦掉的概率有多大？

解：



按错了键的所有情况可在 AB 之间的任意时刻，于是$T=30\times60s$

由于按错了键使含犯罪内容的谈话被部分或全部擦掉的情况只能在 AD 之间的任意时刻，于是$t=30s+10s=40s$

所求概率 $P=\dfrac{t}{T}=\dfrac{40}{30\times60}=\dfrac{1}{45}$

1207、(概率)**掷一枚硬币，若出现正面记 1 分，出现反面记 2 分，**

(1) 连续掷硬币 2 次，恰好得 3 分的**概率=_______**

(2) 连续掷硬币 3 次，恰好得 3 分的**概率=_______**

解： (1)$C_2^1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$**，(2)** $(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$

1212、有 8 位游客坐一辆旅游汽车随机到 3 个景点中的一个景点参观，如果某景点无人下车，该车就不停，求恰好有 2 次停车的概率。

解：每位游客到某个景点参观的概率都是$\frac{1}{3}$

恰好有 2 次停车说明 8 位游客只有到 2 个景点参观，并且每个景点至少有 1 个游客去。

A 游客到第 1 景点， B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 游客到第 2 景点的概率是 $(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^7=(\frac{1}{3})^8$， 于是恰有 1 个游客到第 1 景点， 7 游客到 2 景点的概率是 $C_8^1(\frac{1}{3})^8$，恰有 2 个游客到第 1 景点， 6 游客到 2 景点的概率是$C_8^2(\frac{1}{3})^8$，

……

于是 8 位游客到第 1 景点和到 2 景点的概率是

$(C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^7)(\frac{1}{3})^8=(2^8-2)(\frac{1}{3})^8$

同理 8 位游客到第 1 景点和到 3 景点的概率也是$(2^8-2)(\frac{1}{3})^8$

到第 2 景点和到 3 景点的概率是$(2^8-2)(\frac{1}{3})^8$

综上，所求的概率是$3(2^8-2)(\frac{1}{3})^8=\frac{254}{3^7}$

解 2：每次停车就是把若干个人送到某景点。恰好有 2 次停车说明 8 位游客只有到 2 个景点参观，并且每个景点至少有 1 个游客去。相当于8个不同的球投到 2 个不同的框每框至少一球的投法数$m=C_3^2(2^8-C_2^1)=3\times254$

8 个不同的球投到 3 个不同的框每框球数不限的投法数是$n=3^8$

于是所求的概率是$\frac{m}{n}=\frac{254}{3^7}$

1217、P(A)= $\frac{1}{2}$,P(B)= $\frac{3}{4}$,求 P(AB)的范围

解：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-P(AB)\le1$

于是$P(AB)\ge\frac{1}{4}$

$P(AB)\le P(A)=\frac{1}{2}$， $P(AB)\le P(B)=\frac{3}{4}$

于是$P(AB)\le\frac{1}{2}$

综上所述$\frac{1}{4}\le P(AB)\le\frac{1}{2}$

1238、某人有 5 把钥匙但忘记了开房门的是哪把，于是他不重复的试开，问
(1)3 次内打开房门的概率是多少
(2)如果 5 把内有两把能打开门，那么 3 次内把门打开的概率是多少？
解一

$(1)\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$ $(2)\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4+3+2}{10}=\frac{9}{10}$

解二

$(1)\frac{1}{A_5^1}+\frac{A_4^1}{A_5^2}+\frac{A_4^2}{A_5^3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ (2) $\frac{A_2^1}{A_5^1}+\frac{A_3^1A_2^1}{A_5^2}+\frac{A_3^2A_2^1}{A_5^3}=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$

1265 、某家庭电话在家中有人时,打进电话响第 1 声时被接的概率为 0.1,响第 2 声时被接的概率为 0.3,响第 3 声时被接的概率为 0.4, 响第 4 声时被接的概率为 0.1,那么电话在响前 4 声内被接的概率是多少?
解答：

（1）事件 A_i：响第第 i 声时被接(i=1,2,3,4)，响前 4 声内被接的概率

$$P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)$$
$$=0.1+(1-0.1)0.3+(1-0.1)(1-0.3)0.4+(1-0.1)(1-0.3)(1-0.6)0.1$$
$$=0.1+0.27+0.252+0.0252=0.6472$$

1303
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21753&show=550

某猎人在距离 100 米处射击一只野兔,命中率为 0.5,如果第一次射击未命中,则猎人第二次射击,但距离为 150 米；如果又未击中,则猎人进行第三次射击,并且此时距离为 200 米,此猎人命中率与距离的平方成反比,求猎人命中野兔的概率?
（2）距离 100 米处射击一只野兔,命中率为 0.5,如果第一次射击未命中,则猎人第二次射击,但距离为 150 米;

解：记事件“第 i 次击中动物”为事件 A_I（i =1,2,3），记事件“最多射击 3 次而击中动物”为事件 A . 于是 $P(A_1)=0.5$

因为 $p=\frac{k}{s}$， 当 $s=100$ 时 $p=0.5$， 于是 $0.5=\frac{k}{100}$， $k=50$

$p=\frac{50}{s}$， 故 $P(A_2)=\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$， $P(A_3)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$

$\because A=A_1+\overline{A_1}\bullet A_2+\overline{A_1}\bullet\overline{A_2}\bullet A_3$, 且 A_i（i =1,2,3）是独立事件,

A_1、$\overline{A_1}\bullet A_2$、$\overline{A_1}\bullet\overline{A_2}\bullet A_3$ 是互斥事件,

$$\therefore P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(B_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

1337
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22570&show=0

从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数，这个数不被 3 整除的概率为(　　)

A、$\frac{19}{54}$　　B、$\frac{35}{54}$　　C、$\frac{38}{54}$　　D、$\frac{41}{60}$

解：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9

分为 3 类：①0，3，6，9②1,4,7③2,5,8

无重复数字,且能被 3 整除的 3 位数有

$A_3^1A_3^2+2A_3^3+(C_3^1C_3^1C_3^1A_3^3+C_3^1C_3^1A_2^1A_2^2)=38A_3^3$

无重复数字，的 3 位数有 $A_9^1A_9^2$

能被 3 整除的概率=$\frac{38A_3^3}{A_9^1A_9^2}=\frac{19}{54}$

不能被 3 整除的概率=$1-\frac{19}{54}=\frac{35}{54}$，故选 B

1375
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=278581&extra=pageD1&page=3

这个题目文字表达需要改进

(1)小李每天吃 1 个蛋，或者吃鸡蛋或者吃鸭蛋,选用鸡蛋和鸭蛋的概率相同,现在冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋,求鸡蛋都被吃完而鸭蛋还剩下 3 个的概率？

当成独立重复试验,应是过必思的解答案

P9（6）=C（9　6）P^6(1-P)^3=C(9　6)(1/2)^9=21/128

(2)冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋，小李每次从中任取 1 个食用，每次食用每个蛋被取到的概率相同,求鸡蛋都被吃完而鸭蛋还剩下 3 个的概率？

当成不放回的逐一抽签问题,应是 fddxl　的答案

C（6,3）A(9,9)/A(12,9)=1/11

1375
http://bbs.pep.com.cn/thread-278795-1-2.html

设正四面体的四个顶点是 ABCD，各棱长为 1m，有一个小虫从 A 点开始按以下规则前进，在每一个顶点处用同样的概率选择通过这个顶点的三条棱之一，并一直爬到这个棱的尽头，求它爬了 8m 后恰好位于顶点 A 的概率

解:设走 n 米回到到 A 的概率为 $P(n)$,则, $P(1)=0$, $P(2)=\frac{1}{3}$

当 $n\geq 2$ 时， $P(n)=\frac{1}{3}[1-P(n-1)]$

故 $P(n)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}[P(n-1)-\frac{1}{4}]$， $P(n)-\frac{1}{4}=(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{3})^{n-1}$

$P(n)=\frac{1}{4}[1-(-\frac{1}{3})^{n-1}]$

于是 $P(8)=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3^7})=\frac{1093}{4374}$

1379
http://bbs.pep.com.cn/thread-285207-1-1.html
投掷一个均匀的硬币六次,正面不连着出现的概率为?答案是 21/64,但不知何解?

解：分类插空：无正面 1 种，有 1 正面 C_6^1 种，有 2 正面 C_5^2 种,有 3 正面 C_4^3 种，

故共有 $m=1+C_6^1+C_5^2+C_4^3=21$ 种

如有 3 正面，先放好 3 反面，然后从 4 个空隙取 3 个位置
1380
http://bbs.pep.com.cn/thread-283891-1-1.html

如图，$\frac{n(n+1)}{2}$ 个互不相等的数随机的排成一个三角形数阵，设 M(k)是从上往下数第 k 行中的最大的数,则 M(1)<M(2)<M(3)<...<M(n)发生的概率为多少?

解 1： $P=\dfrac{nA_{\frac{n(n-1)}{2}-1}^{n-1}(n-1)A_{\frac{n(n-1)}{2}-(n+1)}^{n-2}\cdots 2A_{2)}^{1}\bullet 1}{A_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

#
# #
# # #
# # # #

解 2： $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数的最大数排最下层的概率为 $\dfrac{nA_{\frac{n(n-1)}{2}-1}^{n-1}}{A_{\frac{n(n+1)}{2}}^{n}}=\frac{2}{n+1}$

同理

剩下的 $\frac{(n-1)n}{2}$ 个数的最大数排最下层的概率为 $=\frac{2}{n}$

剩下的 $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 个数的最大数排最下层的概率为 $=\frac{2}{n-1}$

……

最后第一层的概率为 $=\frac{2}{1+1}$

于是所求的概率是 $P=\frac{2}{n+1}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{2}{2}=\frac{2^n}{(n+1)!}$

1406、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=279601&page=1#pid2913610

4 男 4 女排成一排，求有且只有 2 个男生排在一起的概率

解： $P=\dfrac{A_4^2A_4^4A_5^3}{A_8^8}=\frac{3}{7}$

1431、

http://bbs.pep.com.cn/thread-291816-1-2.html

问题（1）：一盒子内装有 10 个乒乓球，其中 3 个旧的，7 个新的，从中任意取 4 个，则取到新球的个数的期望值是（　　）

问题（2）：一盒子内装有 10 个乒乓球，其中 3 个旧的，7 个新的，每次一球，取后放回，取 4 次，则取到新球的个数的期望值是（　　）

讲解：问题（1）就是超几何分布的期望，问题（2）就是二项分布的数学期望，下面说明一下这两个期望相等的原因：

由于"从中任意取 4 个，则取到 m 个新球的概率"与"每次一球，取后不放回，取 4 次，取到 m 个新球的概率"是相等的，于是问题（1）就转化为

问题（3）：一盒子内装有 10 个乒乓球，其中 3 个旧的，7 个新的，每次一球，取后不放回，取 4 次，取到新球个数学的期望值是（　　）

而问题（2）与（3）的数学的期望值都可转化为 4 次取球取到新球个数的数学期望之和，由于不管是（2）还是（3）每次取 1 球取到 1 个新球的概率都是 7/10，取到 0 个新球的概率都是 3/7，于是每次取 1 球取到新球的期望都是

1×（7/10）+0×（3/10）＝7/10

于是 4 次取球的期望之和都等于（7/10）×4＝2.8

1435、http://bbs.pep.com.cn/thread-292099-1-2.html

已知 A 箱内有红球 1 个和白球(n＋1)个，B 箱内有白球(n－1)个(n∈N，且 n≥2)，现随意从 A 箱中取出 3 个球放入 B 箱，将 B 箱中的球充分搅匀后，再从中随意取出 3 个球放入 A 箱，则红球由 A 箱移到 B 箱，再返回到 A 箱的概率

解：$P=\dfrac{C_{n+1}^{2}}{C_{n+2}^{3}}\bullet\dfrac{C_{n+11}^{2}}{C_{n+2}^{3}}$

1448、http://bbs.pep.com.cn/thread-290674-1-3.html

设棋子在正四面体 ABCD 的表面从一个顶点移向另外三个顶点是等可能的，现投掷骰子，根据其点数决定棋子是否移动。若投出的点数是奇数，则棋子不动；若投出的点数是偶数，则棋子移动到另一顶点。若棋子的初始位置在顶点 A，回答如下问题：投了三次骰子，棋子恰好在顶点 B 的概率是多少？

解：设投 n 次到 B 的概率是 $P(n)$，因为棋子从一个顶点移动到另一个顶点的概率是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，不动的概率是 $\frac{1}{2}$

所以 $P(1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$P(2)=\dfrac{1}{2}P(1)+\dfrac{1}{6}[1-P(1)]=\dfrac{1}{3}P(1)+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}$

$$P(3)=\frac{1}{2}P(2)+\frac{1}{6}[1-P(2)]=\frac{1}{3}P(2)+\frac{1}{6}=\frac{13}{54}$$

一般地有 $P(n)=\dfrac{1}{2}P(n-1)+\dfrac{1}{6}\{1-P(n-1)\}=\dfrac{1}{3}P(n-1)+\dfrac{1}{6}$，

$P(n)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}[P(n-1)-\dfrac{1}{4}]$，$P(n)-\dfrac{1}{4}=(-\dfrac{1}{12})(\dfrac{1}{3})^{n-1}$，

$$P(n)=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{3})^{n}]$$

1453、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=278581&extra=&page=1

冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋，小李每次从中任取 1 个食用，取用鸡蛋和鸭蛋的概率相同，求鸡蛋都被吃完而鸭蛋还剩下 3 个的概率？

答：这个题目文字表达需要改进,对此题的各种理解的感悟能加强出题与审题的严谨性

(1)小李每天吃 1 个蛋，或者吃鸡蛋或者吃鸭蛋，选用鸡蛋和鸭蛋的概率相同，现在冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋，求鸡蛋都被吃完而鸭蛋还剩下 3 个的概率？

解：当成独立重复试验,每天吃鸡蛋的概率都是 $\frac{1}{2}$，应是过必思的解答案

$$P_9(6)=C_9^6(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^3=\frac{21}{128}$$

(2)冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋，小李每次从中任取 1 个食用，每次食用,每个蛋被取到的概率相同,求鸡蛋都被吃完而鸭蛋还剩下 3 个的概率？

解：当成不放回的逐一抽签问题,应是 fddxl 的答案

$$P=\frac{C_6^3A_9^9}{A_{12}^9}=\frac{1}{11}$$

(3)小李每天吃 1 个蛋，或者吃鸡蛋或者吃鸭蛋,选用鸡蛋和鸭蛋的概率相同,现在冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋,求吃完最后一个鸡蛋,鸭蛋还剩下 3 个的概率？

解：当成独立重复试验,但第 9 个吃鸡蛋,同意 40 楼与 16 楼的意见

应是 $P=C_8^5(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^4=\frac{7}{64}$

(4) 冰箱中放有 6 个鸡蛋和 6 个鸭蛋，小李每次从中任取 1 个食用，每次食用,每个蛋被取到的概率相同，求当吃完最后一个鸡蛋时,鸭蛋还剩下 3 个的概率？

解：答案应是

$$P=\frac{C_6^3C_6^1A_8^8A_3^3}{A_{12}^{12}}=\frac{2}{33}$$

1454、
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=280665&extra=&page=1

在一次射击比赛中，某人连续射击 8 枪，只有 4 枪命中，而且其中有 3 枪是连续命中，求之一事件发生的概率是_______

答（ 1 ）按出题人的用意
因在一次射击比赛中，某人连续射击 8 枪，只有 4 枪命中，
可估此人每枪命中目标的概率是 1/ 2
如果是前 3 枪命中，第 8 枪命中，那么其概率是
（ 1 / 2 ）^8
象这样符合条件的情况有 C(5,2)种，故应是 5/64
（ 2 ）“因在一次射击比赛中，某人连续射击 8 枪，只有 4 枪命中，可估此人每枪命中目标的概率是 1/ 2 ”，是不科学的，我认为应给出此人每枪命中目标的概率，此题出的有问题。

1476、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292441&page=1#pid3034005

两名水平相当的棋手下棋，若甲棋手在 4 局中胜三局的概率为 P_1 ，乙棋手在 8 局胜 a 局的概率为 P_2 ，如果 $P_2>P_1$，则 a 的值为(　　)
A、4　　B、5　　C、6　　D、7

答：$P_2>P_1$，$P_2=C_8^a(\frac{1}{2})^8, P_1=C_4^3(\frac{1}{2})^4$，$C_8^a(\frac{1}{2})^8>C_4^3(\frac{1}{2})^4, C_8^a>64,$

只有 $C_8^4=70>64$ ＝70>64，于是 a=4

1478、若把各位数字按严格递增或严格递减顺序排列的数叫做"单调数"，
那么在 100，101，..... ，999 中，"单调数"的个数是多少个?
解：单调减 C(9,3)+C(9,2)
单调增 C(9,3)
所以为 2C(9,3)+C(9,2)

1479、条件概率
1、条件概率
（1）设投一枚骰子记事件 A={点数大于 1}，事件 B={点数小于 5}
则 $P(A)=\frac{5}{6}$， $P(B)=\frac{4}{6}$， $P(AB)=\frac{3}{6}$
（2）若知道了事件 B 已经发生求，求事件 A 发生的概率
由于在事件 B 已经发生的条件下，
试验基本事件只有 1 点，2 点，3 点，4 点，即 n=4
其中事件 A 所含的基本事件有其中的 2 点，3 点，4 点，即 m=3
于是在事件 B 发生的条件下 A 发生的概率＝$\frac{3}{4}$
(3)我们把“事件 B 发生的条件下 A 发生”这个新的事件记作事件”A|B”

上面所求的概率可记作 $P(A|B)=\frac{3}{4}=\frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$

公式变形 $\boldsymbol{P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)}$

$\boldsymbol{P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB)}$

2、例题

例 1、已知 1 杯中有 AB 两球,2 杯中也有 AB 两球.现从 1 杯和 2 杯中各取一球组成了 3 杯，若 3 杯中一定有 A 球,求第 3 杯中有 1 个 A 和 1 个 B 球的几概率?

解 1：3 杯中一定有 A 球的所有情况是 AB，BA，AA 三种情况（AB 是在第 1 杯中取 A，第 2 杯中取 B）

所以所求的概率是 $\frac{2}{3}$

解 2：设事件 M={3 杯中有 A 球}，事件 N={3 杯中 A、B 球各 1 个}

所求事件是“N|M”

因为 $P(M)=\frac{3}{4}$， $P(MN)=P(N)=\frac{2}{4}$，所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(N)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

例 2、甲乙独立的对同一目标各射击一次,其命中的概率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中,则它是甲命中的概率是多少

解：记事件 A={甲命中}，事件 B={乙命中}，

则{已知目标被命中的条件下是甲命中}=事件 A|（A+B）

因为 $P(A)=0.6$， $P(B)=0.5$

所以 $P[A|(A+B)]=\frac{P[A(A+B)]}{P(A+B)}=\frac{P(A)}{P(A+B)}=\frac{P(A)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}=\frac{0.6}{1-0.4\times 0.5}=\frac{3}{4}$

例 3、已知 1 杯中有 AB 两球，2 杯中是 AB 球的几率为 2/3,是 AA 球的几率为 1/3,现从 1 杯和 2 杯中各取一球组成了 3 杯,且 3 杯中一定有 A 球,求 3 杯中是 AB 球的几率是多少?

解：设事件 C={在甲杯中取 A 球}，事件 D={在乙杯中取 A 球}，

事件 M={3 杯中有 A 球}，事件 N={3 杯中 A、B 球各 1 个}所求事件是“N|M”

因为 $P(C)=\frac{1}{2},P(D)=\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

所以 $P(M)=P(C)+P(\overline{C})P(D)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$，

$P(MN)=P(N)=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\bullet\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$，

所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(N)}=\frac{\frac{3}{6}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$

3、条件概率的表述

表述 1：在事件 B 发生下求事件 A 的概率

表述 2：已知事件 B 发生，求事件 A 的概率

表述 3：在正品中一级产品占80%

例 4、已知某工厂一批产品，这批产品中有2% 的次品，而正品中一级产品占80%，求从这批产品中任取一件产品是一级产品的概率

解：设事件 A={取一件正品}，事件 B={取一件一级产品}

则 $P(A)=1-0.02=0.98,\ P(B\mid A)=0.80$

因为 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

所以 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.98\times 0.8=0.784$

因为 $P(AB)=P(B)$，所以 $P(B)=0.784$