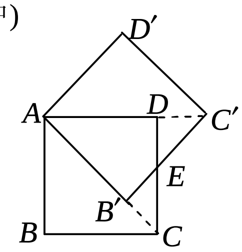
# 廖老师网上千题解答分类二十四、大纲平几

117、如图，将边长为 1 的正方形 ABCD 绕 A 点按逆时针方向旋转 45,至正方形 AB'C'D',则旋转前后两个正方形重叠部分的面积是多少?(初中)

解：如图

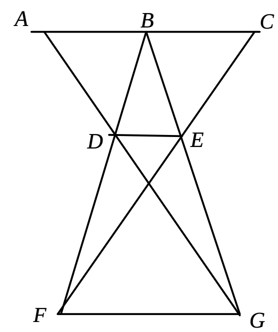



公共部分的面积＝$S_{\triangle ACD} - S_{\triangle CEB'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

299、已知$\angle CFG = \angle AGF$ ,ABC∥DE∥FG

求证 A、D、E、C 四点共圆

求证四边形 ADEC 的四个角在同一圆周上......




证明： 因 DE∥FG

故，$\angle GDE = \angle DGF$

而$\angle CFG = \angle DGF$

故$\angle GDE = \angle CFG$

因 ABC∥FG，

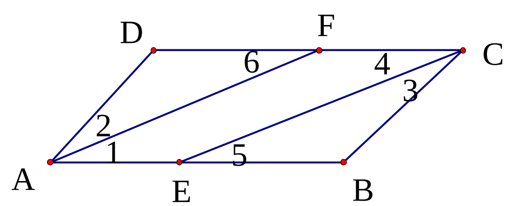
故$\angle CFG = \angle C$，

故$\angle GDE = \angle C$

故 A、D、E、C 四点共圆

301、求证：两对角平分线分别平行的四边形是平行四边形(初中)

证明：如图$\angle 1 = \angle 2$， $\angle 3 = \angle 4$ ， AF∥CE




因 AF∥CE

故$\angle 1 = \angle 5$， $\angle 4 = \angle 6$

故$\angle 2 = \angle 5$， $\angle 6 = \angle 3$

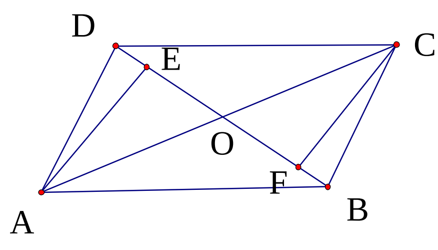
故$\angle D = \angle B$

同理可证$\angle A = \angle C$

因此四边形 ABCD 是平行四边形

303、对角线分别平分面积的四边形是平行四边形

证明：如图 $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BCD}$(初中)




作$AE \perp BD, CF \perp BD$，垂足分别是 E，F

则 AE=CF

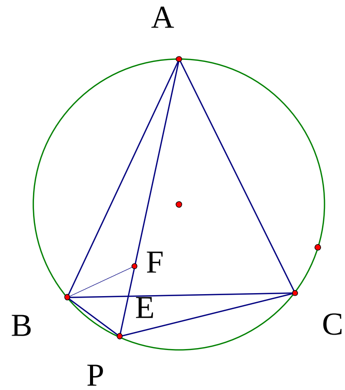
故$Rt\Delta AOE \cong Rt\Delta COF$

故 OA=OC

同理可证 OD=OB

因此四边形 ABCD 是平行四边形

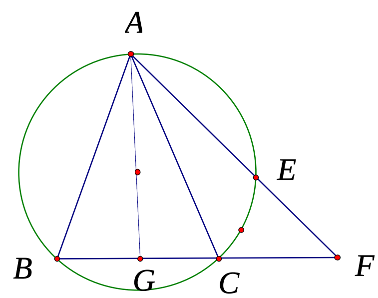
374、已知:如图,等边三角形 ABC,内接于圆 O,P 为弧 BC 上任一点,
求证:(1)PA=PB+PC
　　(2)PB、PC 是方程 $x^2$-PAx+PE(PB+PC)=0 的两个根.(初中难题)
证明：(1)取 PF=BP,连 BE
因为 $\angle APB = \angle ACB = 60°$
所以 $\Delta BPF$ 是等边三角形
所以 BF=BC
接下去可证出 $\Delta ABF$ 与 $\Delta BPC$ 全等
就有 AE=CP
所以 AF+PF=CD+BP 即
PA=PB+PC
(2)只要证
PB+PC＝PA（上面已证）
且 PB×PC＝PE(PB+PC)
只要证 PB×PC＝PE×PA
只要证 $\Delta PBE$ 与 $\Delta PAC$ 相似
自已想想
*一个口决：顺角找弧，顺弧找角，出等角




465、如图,已知三角形 ABC 中,AB=AC,过点 A 的直线与三角形 ABC 的外接圆圆 O 交于点 D,与 BC 延长线交于点 F,连接 DC、BD,并延长 BD 至 E.

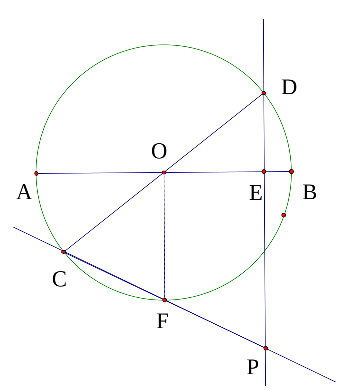
求证：$AF^2 - AB^2 = AF \cdot DF$(平几)

证明：因　$FDA$与 FCB 是圆的割线
故 $AF \bullet DF = FC \bullet FB$
作 $\Delta ABC$ 的高 $AG$,因为 $AB = AC$
所以 $BG = CG$
所以 $FC \bullet FB = (FG - CG) \cdot (FB + BG)$
$= (FG - BG) \cdot (FB + BG) = FG^2 - BG^2$
因为 $AF^2 - AB^2 = (FG^2 + AG^2) + (BG^2 + AG^2) = FG^2 - BG^2$
所以 $AF \bullet DF = FC \bullet FB = AF^2 - AB^2$




472、AB 为圆的定直径，ＣＤ为动直径，自Ｄ作ＡＢ的垂线ＤＥ，延长ＥＤ到Ｐ，使绝对值ＰＤ＝绝对值ＡＢ，求证直线ＣＰ必过一定点．(平几)
证明：取 PC 的中点 F，连 OF 设直线
因为点 $F$ 是 PC 的中点，因点 O 是 DC 的中点
所以 OF∥DP，OF$=\dfrac{1}{2}DP$
因为 $DP \perp AB$， $DP = AB$
所以 $OF \perp AB$， OF$=\dfrac{1}{2}AB$

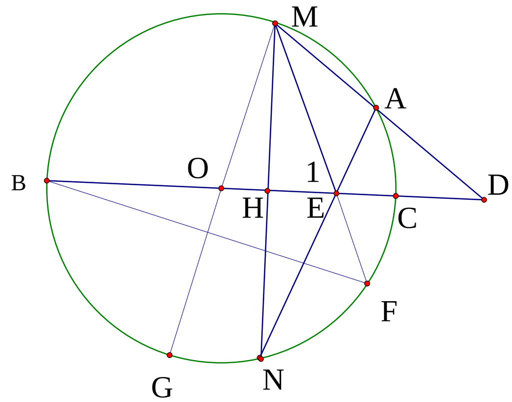
因此 $F$是定点



503、圆 O 直径 BC=$2\sqrt{3}$，.弧 AC 为 30°，弧 BF 为 30°，M 是弧 AF 上的一动点(除 A、F 外).在 MA 与 BC 相交 D.MN 垂直于 BC 于 H.连 AN 交 BC 于 E

(1)DO+EO 是定植;(2) $DO\cdot EO$ 是定植.

(1),(2)中有一个正确,请选出并求出其值. (平几)




答：(2)正确其值是 3

可以证明 $\Delta MOE \backsim \Delta MOE$

于是 $DO\cdot EO$ ＝OM$^2$=$(\sqrt{3})^2=3$

它们有一个公共角 $\angle MOD$

又能证 $\angle 1=\angle OMD$

理由是

$\angle 1=\angle B+\angle F$

$=\frac{1}{2}$弧 FC 度数+$\frac{1}{2}$弧 BM 度数

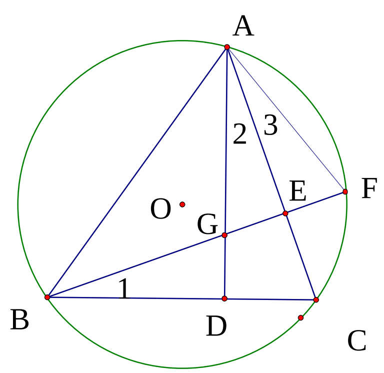
$=\frac{1}{2}$弧 AC 度数+$\frac{1}{2}$弧 GC 度数

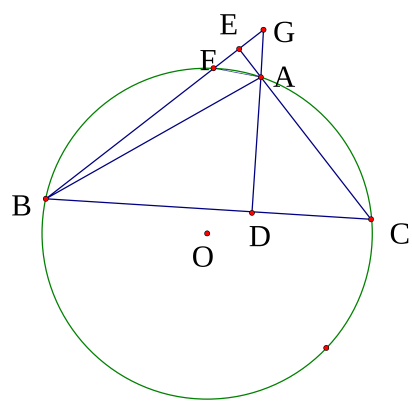
$=\frac{1}{2}$弧 AG 度数=$\angle OMD$

504、角 A 为锐角,AD、BE 为三角形 ABC 的高,BE 交 AD 于 G,交三角形 ABC 的外接圆于 F,

(1)判断线段 GE 与 FE 的数量关系.

(2)若角 A 为钝角,其他条件不变,(1)中的结论是否成立?并证明你的结论? (平几)




(1) GE=FE,原因是

$\angle 2=\angle 1=\angle 3$， $\angle AEG=\angle AEF=90°$

$AE=AE$ 因此 $\Delta AGE \backsim \Delta AFE$

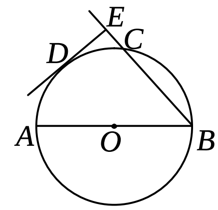
(2) 若角 A 为钝角,其他条件不变,(1)中的结论也成立

如图 2， $\angle G,\angle C$ 都与 $\angle GBC$ 互余因此 $\angle G=\angle C$

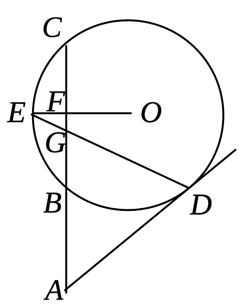
因为 $\angle AFE$ 是圆内接四边形 $AFBC$ 的外角

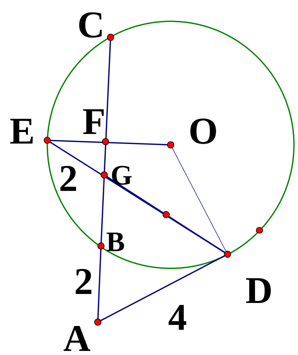
所以 $\angle AFE=\angle C$ ,于是 $\angle AFE=\angle G$ 下面好办了

591、AB 是圆 O 的直径,C 是圆 O 上一点,D 是弧 AC 的中点,
过 D 作 DE 垂直于 BC 于 E,
(1)求证:DE 是圆 O 的切线;
(2)若 DE=2,CE=1,求圆 O 的半径. (初中平几)



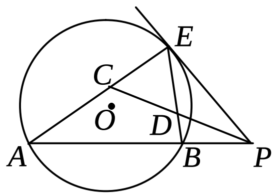

讲解:
（1）要证 DE 是圆 O 的切线，只要证 $DE \perp OD$
看到条件：$DE \perp BE$
想到定理：垂直于同一条直线的两条直线互相平行。
因此只要证：$OD \parallel BE$
想到公理：同位角相等两直线平行
于是转化为：证明 $\angle DOA = \angle ABE$
因为 D 是弧 AC 的中点,所以 $\angle DOA = \angle ABE$
（以上的过程可以说成：看条件想公式做转化）
(2)若 DE=2,CE=1,求圆 O 的半径
看到条件：DE=2,CE=1，就相当于看到了切线长 DE=2，割线 ECB 的一部分 CE=1
想到切割线公式，于是就可以求出 EB,进而求出 BC
接下去自已看，自已想，自已求。
642、如图,割线 ABC 与圆 O 相交于 B、C 两点,D 为圆 O 上一点,E 为弧 BC 的中点,OE 交 BC 于 F，DE 交 AC 于 G，角 ADG=角 AGD.
如果 AB=2,AD=4,EG=2,求圆 O 的半径. (初中平几)

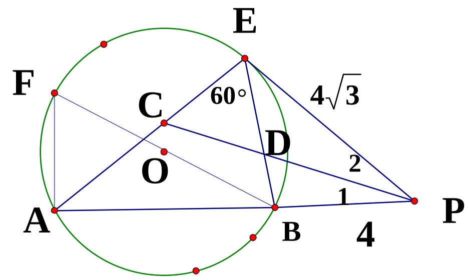



解：连 OD，
因为 E 为弧 BC 的中点
所以 $OE \perp CB$，所以 $\angle EGF + \angle GEF = 90°$
因为 $\angle EGF = \angle AGD$， $\angle GEF = \angle ODE$
所以 $\angle AGD + \angle ODE = 90°$
所以 $AD$ 是圆 O 的切线
于是 $AD^2 = AB \bullet AC$， $4^2 = 2AC$， $AC = 8$， $BC = 6$， $BF = FC = 3$
又 $AG = AD = 4$，故 $BG = 2$， $GF = 1$， $GC = 4$
在直角$\Delta EFG$中， $GF = 1$， $EG = 2$
所以 $EF = \sqrt{3}$，下面方法很多，
选用课本已知弓形高求半径的方法
设半径为 $r$，在直角$\Delta OFC$中
$OC^2 = OF^2 + CF^2$
于是有 $r^2 = (r - \sqrt{3})^2 + 3^2$，解得 $r = 2\sqrt{3}$

643、如图,圆 O 的割线 PBA 交圆 O 于 A、B，PE 切圆 O 于 E,角 APE 的平分线和 AE、BE 分别交于 C、D,PE=$4\sqrt{3}$,PB=4, $\angle AEB = 60^\circ$
求圆 O 的面积 (初中平几)




解：因为 PE 切圆 O 于 E

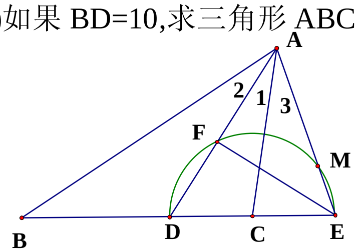
所以 $PE^2 = PB \bullet PA$，$(4\sqrt{3})^2 = 4PA$，$PA = 12$，$AB = 8$

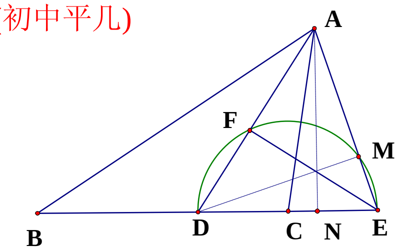
作直径 $BF$，连 AF，则 $\angle F = \angle AEB = 60^\circ$，$\angle FAB = 90^\circ$

于是 $\sin 60^\circ = \dfrac{AB}{BF}$，$BF = \dfrac{AB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$

圆 O 的半径 $r = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$，圆 O 的面积$= \pi r^2 = \dfrac{64}{3}\pi$

660、已知在三角形 ABC 中,AD 为角 BAC 的平分线,以 C 为圆心,CD 为半径的半圆交 BC 的延长线于点 E,交 AD 于点 F,交 AE 于 M，且角 B=角 CAE,FE:FD=4:3.
(1)求证:AF=DF;　(2)求角 AED 的余弦值;
(3)如果 BD=10,求三角形 ABC 的面积. (初中平几)




（1）证明：因为 $\angle 3 = \angle B$，$\angle 1 = \angle 2$

所以 $\angle 3 + \angle 1 = \angle B + \angle 2$

又因为 $\angle DAE = \angle 3 + \angle 1$，$\angle ADE = \angle B + \angle 2$，

所以 $\angle DAE = \angle ADE$，所以 $EA = ED$

因为 $DE$ 是半圆直径，所以 $EF \perp AD$，于是 AF=DF

（2）因为 FE:FD=4:3 所以可设 FE=4k，FD=3k

于是 AF=3k，EA=DE=5k,割线定理得，AF×AD＝AM×AE

因此 AM=$\dfrac{18k}{5}$，ME=$\dfrac{7k}{5}$，连 MD，则 $\angle DME = 90^\circ, \cos\angle AED = \dfrac{ME}{DE} = \dfrac{7}{25}$

（3）因为 $\angle 3 = \angle B$，$\angle AED = \angle AED$,所以△AEC∽△BEC

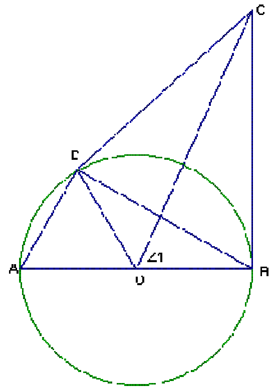
所以 $AE^2 = EC \bullet BE$，又 BD=10,于是 $25k^2 = \dfrac{5k}{2}(5k + 10)$，

$k = 2$，$DE = AE = 5k = 10$，$BC = 10 + 5 = 15$

作 $AN \perp BC$，N 为垂足。则 AN= $AE \sin\angle AEN = 10 \times \dfrac{24}{25} = \dfrac{48}{5}$

于是 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BC \times AN = \dfrac{1}{2} \times 15 \times \dfrac{48}{5}$ =72

664、已知:如图,AB 是圆 O 的直径,AD 是圆 O 的弦,BC 是圆 O 的切线,切点为 B.若 CD 是圆 O 的切线,则 OC//AD(初中平几)



证明：因为 BC 和 CD 都是圆 O 的切线

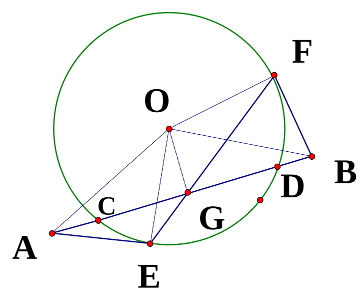
所以, OC 是$\angle BCD$的平分线，且$CB = CD$

所以 OC$\perp BD$

因为 AB 是圆 O 的直径，所以 AD$\perp BD$，

所以 OC//AD

665、已知:如图,线段 AB 和圆 O 交于 C、D, AC=BD,AE、BF 分别切圆 O 于 E、F,EF 交 CD 于 G.求证:(1)AE=BF;(2)OG 垂直于 CD(初中平几)




证明：(1)因为 AE 和 BF 都是圆 O 的切线

所以, $AE^2=AC\bullet AD=AC\bullet(AC+CD)$

$BF^2=BD\bullet BC=BD\bullet(BD+CD)$

因为 AC=BD

所以 $AE^2=BF^2$，AE=BF

（2）连 OE,OF

则$\angle AEO=\angle BFO=90°$,又 OE=OF, AE=BF

所以$\triangle AEO\cong\triangle BFO$

所以$AO=BO$，$\angle EOA=\angle FOB$

由$AO=BO$得$\angle OAB=\angle OBA$

由$\angle EOA=\angle FOB$得$\angle AOB=\angle EOF$

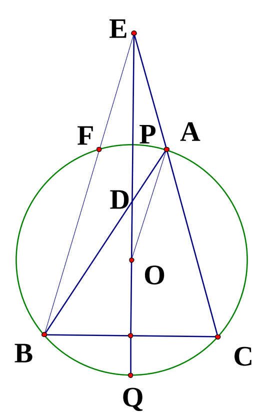
于是$\angle OAB=\angle OEG$

所以$OAEG$是圆内接四边形，所以，$\angle OGA=\angle OEA=90°$

所以 OG$\perp CD$ ，因为 AB 是圆 O 的直径

所以 AD$\perp BD$

808、如图,三角形 ABC 内接于圆 O,过圆心 O 作 BC 的垂线交圆 O 于点 P、Q,交 AB 于 D,QP 与 CA 的延长线交于点 E，求证：$OA^2=OD\bullet OE$(平几).




证明：连 BE 交圆 O 于 F

因 PQ 过圆心垂直 BC

于是 A、F 关于 PQ 对称，故弧 PF=弧 PA

因此$\angle AOP=\angle ABE$，又$\angle ADO=\angle BDE$

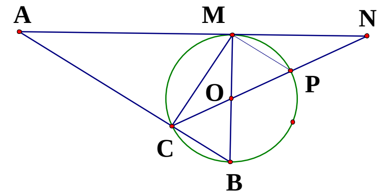
故$\angle OAD=\angle BED$，又$\angle BED=\angle AEO$

故$\angle OAD=\angle AEO$

于是$\Delta OAD\backsim\Delta AEO$

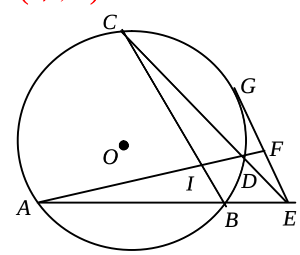
因此 $OA^2=OD\bullet OE$.

809、如图,AN 切圆 O 于 M，MB 是圆 O 的直径,
直线 NO 交圆 O 于 P、C 两点,BC 的延长线交直线
AN 于 A，连 MC,求证： (1)∠ A=∠MCO，
(2)PN•AC=MC•MN(平几)




证明：（1）因$\angle AMB=90°$
故$\angle A+\angle AMC=90°$，$\angle OMC+\angle AMC=90°$
故$\angle A=\angle OMC$
因∠MCO $=\angle OMC$，故∠A=∠MCO
（2）由∠A=∠MCO，∠MCO=∠PMN，得 MP∥AC
所以$\dfrac{MN}{NP}=\dfrac{AM}{PC}$
由$\Delta ACM\backsim\Delta CMB$得$\dfrac{AM}{PC}=\dfrac{AC}{MC}$，所以$\dfrac{MN}{NP}=\dfrac{AC}{MC}$

810、如图,已知圆 O 的两弦 AB 和 CD 的延长线交于 E,过 E 点作 EF//CB,交 AI 延长线于 F,过 F 作圆 O 的切线 FG,G 为切点,求证:EF=FG. (平几)




证明：因 EF//CB 故$\angle C=\angle FED$
因$\angle C=\angle A$
故$\angle A=\angle FED$
故$\Delta EFD\backsim\Delta AFE$
所以 $EF^2$=FD•FA
由切割线定理得 $FG^2$=FD•FA
于是 $EF^2$ =$FG^2$，EF=FG

857、(平几)
证明：在直角三角型中 两条直角边的平方的和等于斜边的平方
此题证法很多，我先给一种
已知：直角$\Delta ABC$中，$\angle ACB=90°$

证 1：$AC^2+BC^2=AC^2$

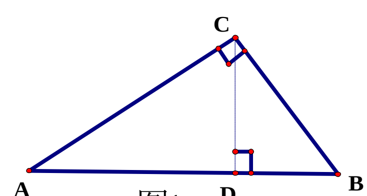


图1

证明：如图 1，作$AC\perp AB$于点 D
由射影定理得
$AC^2=AD\bullet AB$　　$BC^2=BD\bullet AB$
所以$AC^2+BC^2=AD\bullet AB+BD\bullet AB=AB(AD+BD)=AB^2$　　证毕
证 2：大正方形面积＝$c^2=2ab+(a-b)^2$
证 3：直角梯形面积＝$\dfrac{1}{2}(a+b)^2=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}c^2$
证 4：直角梯形面积＝$(a+b)^2=2ab+c^2$

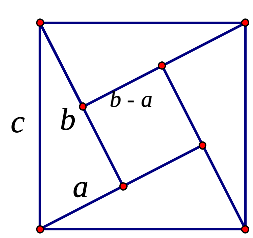


图2

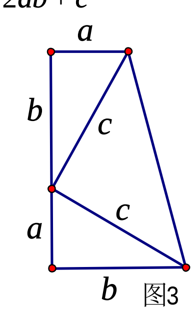


图3

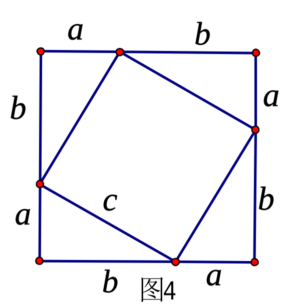


图4

967、(平几)

在△**ABC** 中是否存在一点 **P**，使得过点 **P** 的任意直线都将△**ABC** 分成面积相等的两部分？为什么？

解：假设存在一点 **P** 满足条件

则点 **P** 必是将△**ABC** 分成面积相等的两条直线的交点

因△**ABC** 中线等分面积

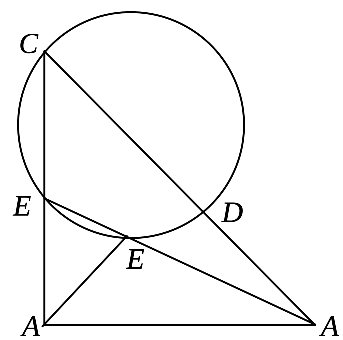
故点 **P** 是△**ABC** 的重心

但是过重心平行于一边的直线分△**ABC** 的面积比为 **4**：**5**

因此，符合条件的点 **P** 不存在

1043、(平几)

三角形 ABC 是等腰直角三角形，D 为斜边中点，过点 C,D 但不过 A 点的圆交 AC 于 E，连 BE 交圆于 F,求证：$AF$ ^ $BE$



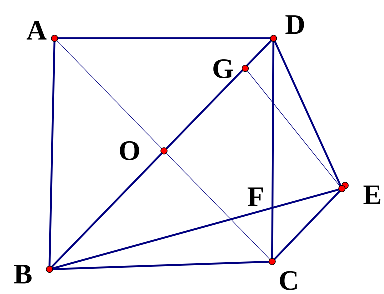

证明：$AB = AC = 1$，$BC = \sqrt{2}$

由割线定理得 $BF \bullet BE = BD \bullet BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1 = AB^2$

即 $\frac{BF}{AB} = \frac{AB}{BE}$，于是 $\Delta ABF \backsim \Delta EBA$，

故 $\angle AFB = \angle BFE = 90°$，即 $AF \perp BC$

1221、(平几)




如图正方形 ABCD 中，CE∥AD，BE=BD

求证：$\angle BDE = \angle BFC$

证明：连 AC 交 BD 于点 O，作 $EG \perp BD$ 于点 G

则 $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BE$，$CO \perp BD$

因 CE∥AD，$EG = CD = \frac{1}{2}BE$

故 $\angle EBG = 30°$

下面容易了

1289、(平几)

从三角形 ABC 的外接圆上一点 P 向三边 BC，CA，AB 所在直线作垂线，这三线分别与三角形 ABC 的外接圆交于 D，E，F，证明三角形 DEF 相似于三角形 ABC

证明：（顺角找弧，顺弧找角）

顺角 *DPF* 找弧 DF，顺弧 DF 找角 DPF

于是 $\angle DEF = \angle DPF$

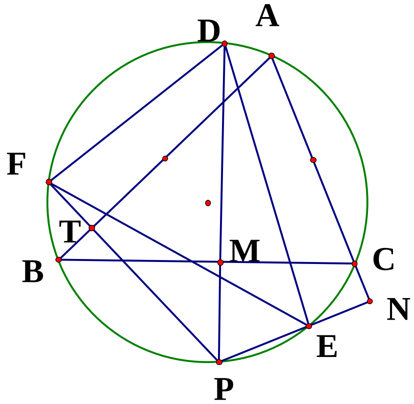
因为 $PT \perp AB$， $PM \perp BC$

所以则 BTPM 四点共圆

所以 $\angle DPF = \angle B$， 于是 $\angle DEF = \angle B$

同理可证， $\angle DFE = \angle BCA$

因此三角形 DEF 相似于三角形 ABC




1340

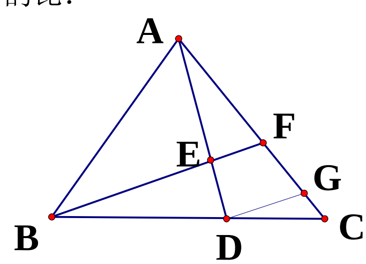
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22572&show=0

在三角形 ABC 中,点 D 在 BC 上,且 BD=kDC,点 E 在 AD 上，且 AE=*l*ED,连接 BE 并延长与 AC 交于点 F,求点 F 分有向线段 AC 的比.

解 1： $AF = lFG$， $CG = \frac{1}{k}FG$

$FC = (1+\frac{1}{k})FG$

$\frac{AF}{FC} = \frac{l}{1+\frac{1}{k}} = \frac{kl}{k+1}$




解 2：由梅氏定理

因 BEF 截 $\Delta ADC$ 故 $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{ED} \bullet \frac{BD}{BC} = l \times \frac{k}{1+k} = \frac{lk}{1+k}$