廖老师网上千题解答分类二十五、超纲平几

8、已知：一三角形的两条角平分线相等，问此三角形是否为等腰三角形，如何证明

反证法：假设 AC<AB，则 $\angle 2<\angle 4$， $\angle 1<\angle 3$

过点 E 作 $EF//CD$,且$EF=CD$，则 CDFE 是平行四边行

因此$\angle 4=\angle 5$,于是$\angle 2<\angle 5$　　(1)

在$\triangle BCE$和$\triangle CBD$中，

$\because BC=CB, BD=CE, \angle 1<\angle 3$

$\therefore CD<BE$,又$\because CD=EF$

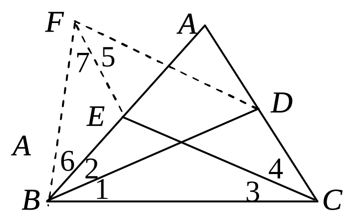
$\therefore EF<BE \therefore \angle 6<\angle 7$(2)

由(1)(2)得$\angle DBF<DFB \therefore DF<DB$

$\therefore CE<DB$与$CE=DB$矛盾

假设 AC>AB,同理可得矛盾

综上 AC＝AB



133、在一个非钝角三角形 ABC 中,AB>AC,角 B=45 度,O 和 I 分别是三角形 ABC 的外心和内心,且$\sqrt{2}$ IO=AB-AC,求 sinA　(联赛)

解：设外接圆半径为 R，内切圆半径为 r

则 $IO^2=R^2-2Rr$（公式）

$\because 2IO^2=(c-b)^2$

$\therefore (c-b)^2=2(R^2-2Rr)$

$c^2-2bc+b^2=2R^2-4Rr$

又$b^2=(2R\sin B)^2=2R^2$

故$c^2-2bc=-4Rr$

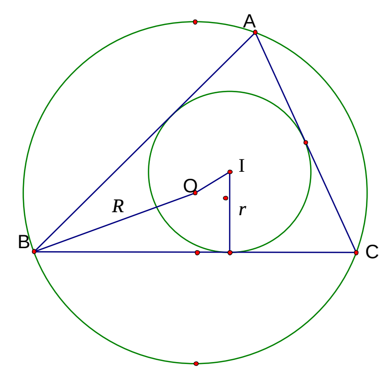
$$Rr=\frac{c(2b-c)}{4}$$

$$\because r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2bc\sin A}{a+b+c}=\frac{2ac\sin B}{a+b+c}$$

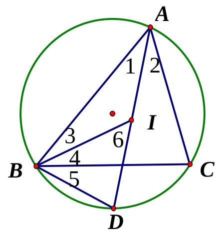
$$\therefore \frac{2bc\sin A}{a+b+c}\bullet R=\frac{c(2b-c)}{4}\Rightarrow\frac{b^2}{a+b+c}=\frac{(2b-c)}{4}$$

$$\frac{2ac\sin A}{a+b+c}\bullet R=\frac{c(2b-c)}{4}\Rightarrow\frac{a^2}{a+b+c}=\frac{(2b-c)}{4}$$

故$a=b$所以$A=B=45°$,sinA$=\frac{\sqrt{2}}{2}$



133(附注 1),已知 I 是 $DABC$ 的内心，AI 的延长线交 $DABC$ 的外接圆于点 D,求证： $BD = ID$

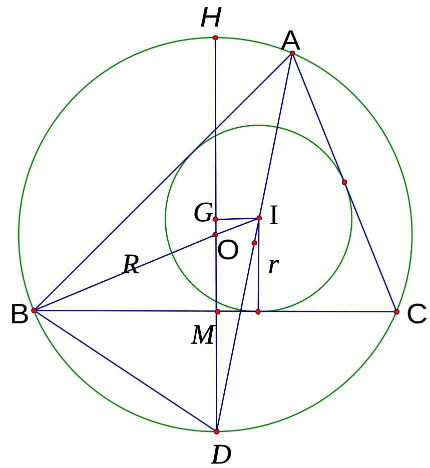


证明：因 $\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$， $\angle IBD = \angle 4 + \angle 5$

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 5, \angle 3 = \angle 4$

故 $\angle 6 = \angle IBD$，于是 $BD = ID$

(附注 2)、已知,O 和 I 分别是三角形 ABC 的外心和内心,设三角形 ABC 外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，求证 $IO^2 = R^2 - 2Rr$



证明：作 ΔABC 的外接圆直径 $HD \perp BC$

则弧 BD=弧 DC

$\therefore \angle BAC = \angle CAD$,连 AD，则 AD 过内心 I

Q $\angle DBI = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = \angle BID$

$\therefore DB = DI$

由余弦定理得

$IO^2 = OD^2 + ID^2 - 2OD \bullet ID \bullet \cos\angle IDO$

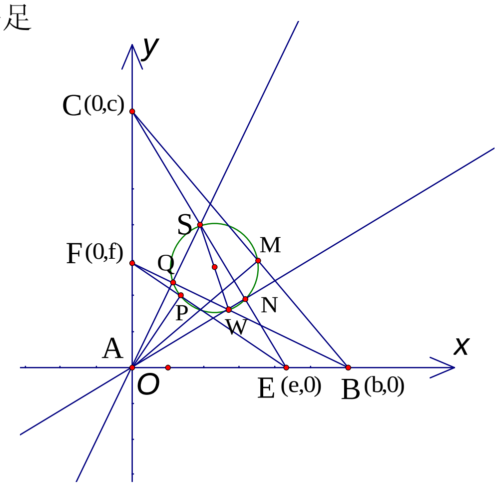
$= R^2 + BD^2 - 2R \bullet DG = R^2 + DM \bullet DH - 2R \bullet DG$

$= R^2 + 2R \bullet DM - 2R \bullet DG$

$= R^2 - 2R(DG - DM) = R^2 - 2R \bullet GM = R^2 - 2Rr$

252、直角三角形 ABC 中,E,F 分别是直角边 AB,AC 上的任意点,自 A 向 BC,CE,EF,FB 引垂线,垂足分别是 M,N,P,Q

证明: M,N,P,Q 四点共圆



证明：如图建立直角坐标系

设 $B(b,0)\ C(0,c)\ E(e,0)\ F(0,f)$

Q $AN \perp CE$

$\therefore$ 直线 AN 的方程为 $y = \frac{e}{c}x$（1）

Q 直线 BF 的方程为 $\frac{x}{b} + \frac{y}{f} = 1$（2）

联立（1）（2）得直线 AN 与直线 BF 交点 $W(\frac{bcf}{be+cf}, \frac{bef}{be+cf})$

同理得直线 AQ 与直线 CE 交点 $S(\frac{cef}{be+cf}, \frac{bec}{be+cf})$

因为 $\angle WQS = \angle WNS = 90°$,故 Q, N 在以 WS 为直径的圆上，此圆的方程是

$$(x - \frac{bcf}{be+cf})\ (x - \frac{cef}{be+cf}) + (y - \frac{bef}{be+cf})\ (y - \frac{bec}{be+cf}) = 0 \text{（3）}$$

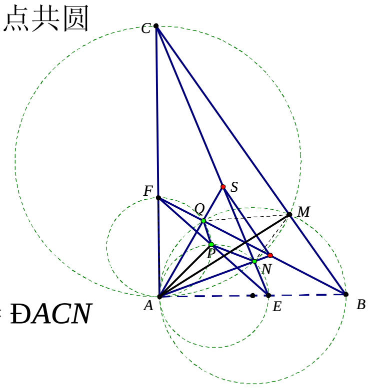
$\because AM \perp BC \therefore$ 直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{b}{c}x$（4）

$\because$ 直线 BC 的方程为 $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{c}=1$（5）

联立（4）（5）得交点 $M(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2},\dfrac{b^2c}{b^2+c^2})$ 代入（3）式

左边=0=右边，故点 $M(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2},\dfrac{b^2c}{b^2+c^2})$ 在 WS 为直径的圆上

同理可证点 P 也在 WS 为直径的圆上,综上， M,N,P,Q 四点共圆



证法 2：　连 MQ、MN

因为 $\angle AQB=\angle AMB=90°$

所以 A、B、M、Q 在以 AB 为直径的圆上

因为 $CA \perp AB$,故 CA 是此圆的切线,于是 $\angle AMQ=\angle SAC$

同理 A、C、M、N 在以 AC 为直径的圆上,于是 $\angle AMN=\angle ACN$

所以 $\angle QMN=\angle AMQ+\angle AMN=\angle SAC+\angle ACN=\angle QSE$

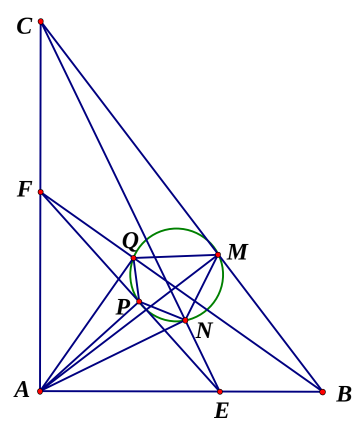
因此 Q、S、M、N 四点共圆(1)
因为 A、F、Q、P 在以 AF 为直径的圆上

所以 $\angle QPF=\angle QAF$,同理 $\angle NPE=\angle NAE=\angle ACE$

于是 $\angle QPF+\angle NPE=\angle QAF+\angle ACE=\angle QSN$

故 $\angle QPN+\angle QSN=180°$,Q、S、N、P 四点共圆(2)

由(1)(2)得 M,N,P,Q 四点共圆



证法 3：　因为 $\angle AQB=\angle AMB=90°$

所以 A、B、M、Q 在以 AB 为直径的圆上

因为 $CA \perp AB$,故 CA 是此圆的切线,于是 $\angle AMQ=\angle QAC$

因为 $\angle AQF=\angle APF=90°$

所以 A、F、P、Q 四点共圆

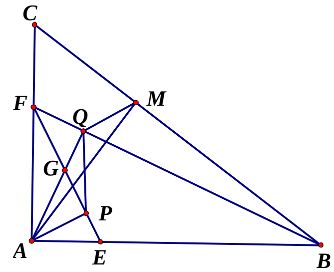
$\angle FPQ=\angle QAC$,于是 $\angle AMQ=\angle FPQ$

同理 $\angle AMN=\angle ACE=\angle NAE=\angle NPE$

所以 $\angle QPN+\angle QMN=\angle QPN+\angle FPQ+\angle NPE=180°$,于是 M,N,P,Q 四点共圆

252(附注) 直角三角形 ABC 中,E,F 分别是直角边 AB,AC 上的任意点,自 A 向 BC, EF,FB 引垂线,垂足分别是 M,P,Q，AQ 与 EF 交于 G

证明: M,P,G,Q 四点共圆



因为 $\angle AQB = \angle AMB = 90°$

所以 A、B、M、Q 在以 AB 为直径的圆上

因为 $CA \perp AB$,故 CA 是此圆的切线,于是 $\angle AMQ = \angle QAC$

因为 $\angle AQF = \angle APF = 90°$

所以 A、F、P、Q 四点共圆

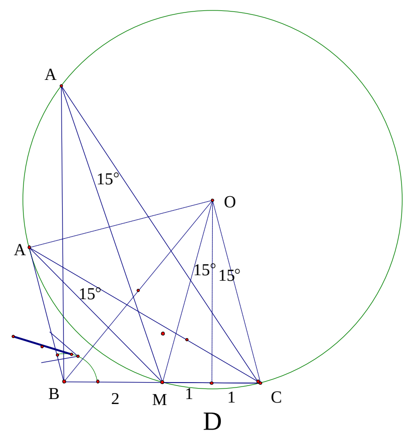
$\angle FPQ = \angle QAC$,于是 $\angle AMQ = \angle FPQ$

因此 M,P,G,Q 四点共圆

281、M 是△ABC 的 BC 边上的中点，∠MAC=15°，求∠B 的最大值

解：作出对 MC 的圆周角为$15°$的弧设 BM=MC=2，则

OD=MD $\tan 75°$=2+$\sqrt{3}$，



$$\tan\angle OBD = \frac{OD}{BC} = \frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

半径 $OM = \dfrac{1}{\sin 15°} = \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2} = OA$

由切割线定理得 $AB = \sqrt{BC \bullet BM} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\tan\angle ABO = \frac{OA}{AB} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

故 $\tan\angle ABM = \dfrac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}{1-\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = -2-\sqrt{3}$ 于是∠B 的最大值 105°

359、蝴蝶定理：C 是⊙O 的弦 AB 的中点，过 C 点引⊙O 的两弦 DG、EF，连结 DE 交 AB 于 P，连结 FG 交 AB 于 Q。求证：CP=CQ。(联赛)

证明：作 FF_1∥AB，交圆 O 于点 F_1，连 C F_1，PF_1

则 $\angle CF_1F=\angle F_1CP$， $\angle CFF_1=\angle FCQ$

作弦 AB 的垂线 OM，则它必过弦中点 C，

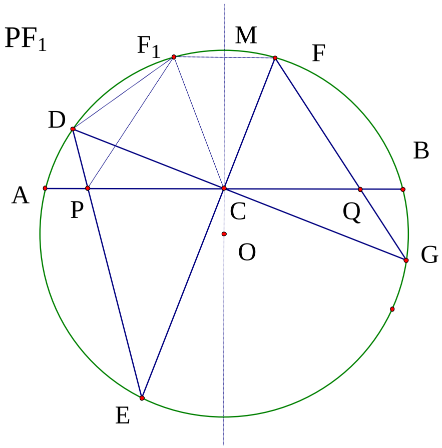
设 OM 与 FF_1 交于 M，因为 FF_1∥AB

所以 OM 是 FF_1 的垂直平分线。

故 CF_1＝CF

所以 $\angle CF_1F=\angle CFF_1$

故 $\angle CF_1F=\angle F_1CP=\angle CFF_1=\angle FCQ$ （1）



∵D、F_1、F、E 共圆

∴ $\angle CFF_1$与 $\angle EDF_1$互补

∴ $\angle F_1CP$与 $\angle EDF_1$互补

∴D、F_1、C、P 共圆

∴ $\angle F_1PC=\angle F_1DC$

∵D、F_1、F、G 共圆　∴ $\angle F_1DC$与 $\angle F_1FG$互补

∵FF_1∥AB　∴ $\angle FQC$与 $\angle F_1FG$互补

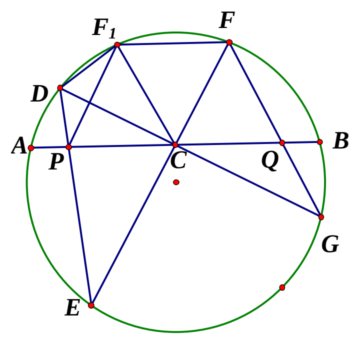
∴ $\angle F_1DC=\angle FQC$ 故 $\angle F_1PC=\angle FQC$

因此 $\Delta F_1PC\cong\Delta FQC$， 故有 CP=CQ

359(附注) C 是⊙O 的弦 AB 的中点，过 C 点引⊙O 的两弦 DG、EF，连结 DE 交 AB 于 P，连结 FG 交 AB 于 Q。弦$F_1F//AB$,求证：$DF_1CP\cong DFCQ$

证明： $F_1F//AB$，C 是 AB 中点

于是 CF_1＝CF， $\angle CF_1F=\angle CFF_1$



∵D、F_1、F、E 共圆

∴ $\angle CFF_1$与 $\angle EDF_1$互补

∵ $\angle CFF_1$=$\angle PCF_1$

∴ $\angle PCF_1$ 与 $\angle EDF_1$互补

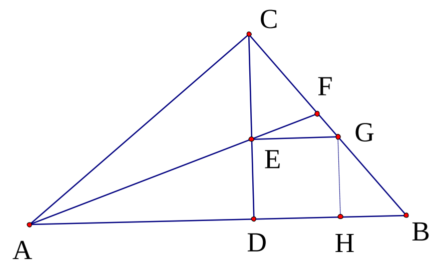
因此 D、F_1、C、P 共圆

于是$\angle CF_1P=\angle CDP=\angle CFQ$

因此$DF_1CP\cong DFCQ$

361、在直角三角形ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，CD垂直于AB于点D,AF平分角CAB,交CD于点E,交CB于点F，且EG//AB,交CB于点G,求证：CF=GB.（竞赛）

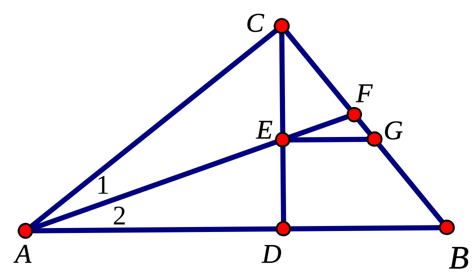
证明：$CF=AC\bullet\tan\frac{1}{2}\angle BAC$



$$BG=\frac{GH}{\sin\angle B}=\frac{ED}{\sin\angle B}=\frac{AD\tan\frac{1}{2}\angle BAC}{\sin\angle B}$$

$$=\frac{AC\sin\angle ACD\tan\frac{1}{2}\angle BAC}{\sin\angle B}=AC\bullet\tan\frac{1}{2}\angle BAC$$

故$CF=BG$



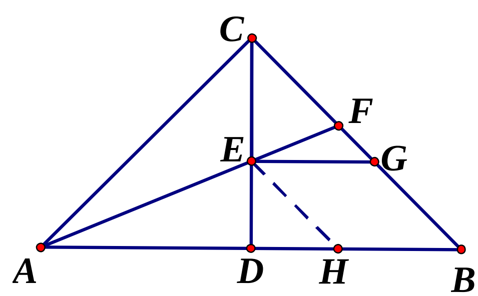
证2:因$\angle 1=\angle 2, EG//AB$，

故$\frac{BG}{CG}=\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow\frac{BG}{BC}=\frac{AD}{AC+AD}$

$\frac{CF}{FB}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{CF}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$

要证$CF=BG$，只要证$\frac{AD}{AC+AD}=\frac{AC}{AB+AC}\Leftrightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}\Leftrightarrow AC^2=AD\times AB$

此式显然成立



证3：作EH//CB,交AB于G

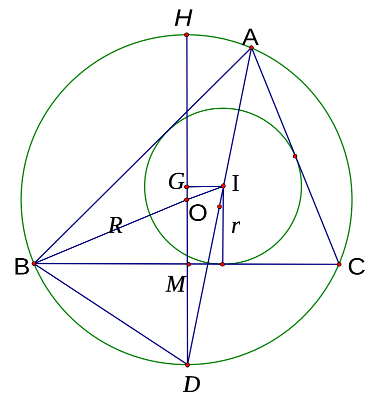
则$\angle AHE=\angle B=45^\circ=\angle ACE$

又$\angle CAE=\angle HAE$，AE=AE

于是$\triangle AEH\cong\triangle AEC$

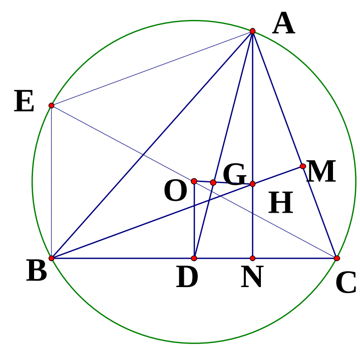
故EH=CE,又CE=CF 于是CF=CE 故CF=EH
四边形EHBG是平行四边形，于是EH=GB
因此，CF=GB

398、求证：在三角形中内切圆（r）与外接圆（R）满足 ： $R \geq 2r$, （当此三角形为正三角形不等式去等号）证明：设三角形 ABC 的内心和外心分别为 I 与 O
由欧拉公式得 $IO^2 = R^2 - 2Rr \geq 0$
证明：作 ΔABC 的外接圆直径 $HD \perp BC$
则弧 BD=弧 DC
$\therefore \angle BAC = \angle CAD$,连 AD，则 AD 过内心 I
$\because \angle DBI = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = \angle BID$
$\therefore DB = DI$
由余弦定理得
$IO^2 = OD^2 + ID^2 - 2OD \bullet ID \bullet \cos\angle IDO$
$= R^2 + BD^2 - 2R \bullet DG = R^2 + DM \bullet DH - 2R \bullet DG$
$= R^2 + 2R \bullet DM - 2R \bullet DG$
$= R^2 - 2R(DG - DM) = R^2 - 2R \bullet GM = R^2 - 2Rr$

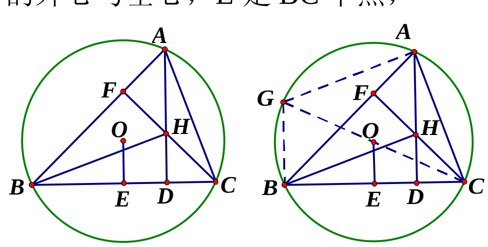


964、(平几) (竞赛)

求证：三角形外心，重心，垂心在一条线上
证明：如图 O 与 H 分别是 ΔABC 的外心与垂心
D 是 BC 中点，BM、AN 是高线
连 CO 延长交 ΔABC 的外接圆于点 E，
则 $EA \perp AC$，又 $BM \perp AC$
故 $EA \,//\, BM$，同理 $EB \,//\, AN$
于是四边形 EBHA 是平行四边形。故 AH=BE
因为在 ΔEBC 中，$OD = \frac{1}{2}EB$
所以 $OD = \frac{1}{2}AH$，连 OH 交中线 AD 于点 G
因 $OD \perp BC$， $AN \perp BC$
故 $OD \,//\, AN$，于是 $\frac{AG}{GD} = \frac{AH}{OD} = 2$
因此 G 是 ΔABC 的重心
由此得三角形外心 O，重心 G，垂心 H 在一条线上
并且 $\frac{OG}{GH} = \frac{OD}{AH} = \frac{1}{2}$
三角形外心，重心，垂心所在的直线叫做欧拉线



964(附注**)**、**O** 与 H 分别是是 ΔABC 的外心与垂心，E 是 BC 中点，
求证： $OE = \frac{1}{2}AH$
证明：作直径 CG，连 GA,GB
则四边形 GBHA 是平行四边形。
故 AH=GB
又 $OE = \frac{1}{2}GB$,故 $OE = \frac{1}{2}AH$

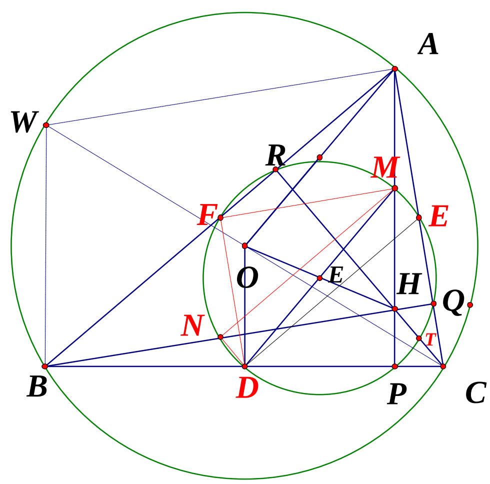


996、(平几) (竞赛)

请证明九点共圆定理：以三角形的垂心和外心的连线中点为圆心，以外接圆的半径的一半为半径的圆经过该三角形三边的中点，三个顶点与垂心的连线的中点以及三个垂足。

已知：D、E、F 是边的中点，P、Q、R 是高足，M、N、T 是顶点与垂心的连线的中点

求证：上述九点共圆，且此圆的圆心是外心 O 与垂心 H 连线的中点，半径为外接圆的半径的一半



证明：因 $\angle APD = 90°$

故以 MD 为直径的圆过 P 点，

由中位线定理得，DF∥AC ，FM∥BQ

因 $BQ \perp AC$，故 $\angle DFM = 90°$，

故 F 在以 MD 为直径的圆上

同理可证点 E、N 也在以 MD 为直径的圆上

由中位线定理得，DN∥CR ，DE∥AB

因 $CR \perp AB$，故 $\angle NDE = 90°$

又 $\angle NQE = 90°$，于是 $\angle NQE = \angle NDE$

因此，Q 点在以 MD 为直径的圆上

同理可证，R 点在以 MD 为直径的圆上

于是得 D、E、F、P、Q、R、M、N、T 九点共圆

下面证明此圆的圆的圆心是外心 O 与垂心 H 连线的中点，半径为外接圆的半径的一半：

连 CO 延长交 ΔABC 的外接圆于点 W，

则 $WB \perp BC$，又 $AP \perp BC$

故 $WB \parallel AP$，同理 $WA \parallel BQ$

于是四边形 AWBH 是平行四边形。故 AH=BE，且 AH∥BE

因此 $OD = AM$，且 $OD \parallel AM$

于是四边形 AMOD 是平行四边形，于是 MD =OA

连 MD 交 OH 于点 E，

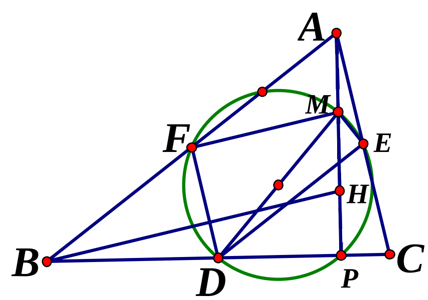
因为 $OD = MH$，且 $OD \parallel MH$

于是 E 是 MD 的中点，也是 OH 的中点。

996 (附注)D,E,F 分别 $DABC$ 是三边中点,H 是垂心，M 是 AH 的中点

求证：D,E,F,P,M 五点共圆

证明方法：D,E,F,P,M 五点都在以 DM 为直径的圆上

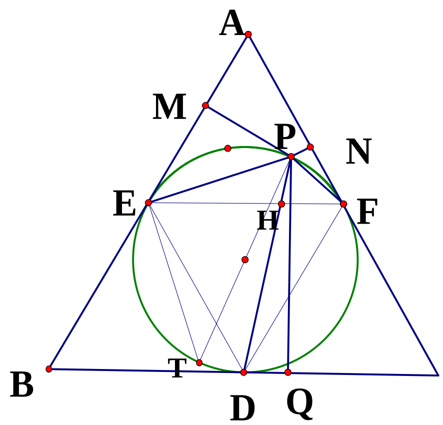


1021、设正三角形 ABC 的内切圆与三边 BC,AB,AC 的切点分别是 D,E,F,若劣弧 EF 上任意一点 P 到三边距离分别为 p,q,r.证明:$\sqrt{p}+\sqrt{r}=\sqrt{q}$

证明：过 P 作 AB 的垂线段 PM，则 $PM=p$

作直径 PT，连 PE、ET，内切圆直径为 d

易证 $\Delta PME \backsim \Delta PET$，因此 $PE^2=PM \bullet PT=pd$



于是 $PE=\sqrt{pd}$，同理 $PF=\sqrt{rd}$， $PD=\sqrt{qd}$

连 EF 交 PD 于点 H，设正 ΔEFD 边长为 a，
易证 $\Delta PED \backsim \Delta EHD$

因此 $\dfrac{EH}{PE}=\dfrac{ED}{PD}$， $EH=\dfrac{ED \bullet PE}{PD}=\dfrac{a \bullet PE}{PD}$

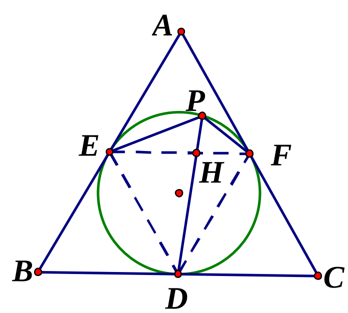
同理 $FH=\dfrac{a \bullet PF}{PD}$

于是 $EH+FH=\dfrac{a(PE+PF)}{PD}=a$

故 $PE+PF=PD$， $\sqrt{pd}+\sqrt{rd}=\sqrt{qd}$， $\sqrt{p}+\sqrt{r}=\sqrt{q}$

1021(附注 1) 正三角形 ABC 的内切圆与三边 BC,AB,AC 的切点分别是 D,E,F, P 是劣弧 EF 上任意一点，求证：PD=PE+PF

证明：连结 EF 与 PD 交于 H,连 ED,FD，
设正三角形 ABC 边长为 a
易证 $\Delta PED \backsim \Delta EHD$



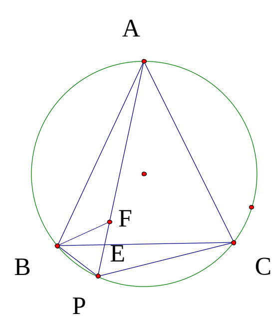
因此 $\dfrac{EH}{PE}=\dfrac{ED}{PD}$， $EH=\dfrac{ED \bullet PE}{PD}=\dfrac{a \bullet PE}{PD}$

同理 $FH=\dfrac{a \bullet PF}{PD}$

于是 $EH+FH=\dfrac{a(PE+PF)}{PD}=a$

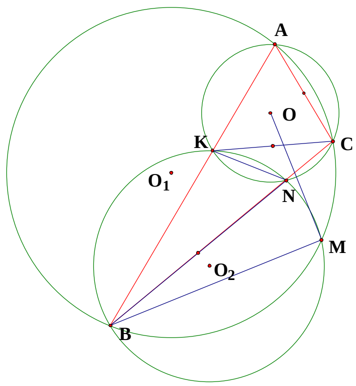
故 $PE+PF=PD$

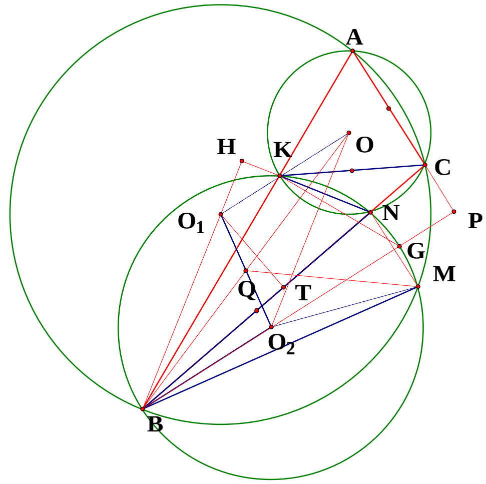
1021(附注 2)已知:如图,等边三角形 ABC,内接于圆 O,P 为弧 BC 上任一点,
求证: PA=PB+PC
证明：取 PF=BP,连 BE
因为 $\angle APB=\angle ACB=60°$
所以 ΔBPF 是等边三角形
所以 BF=BC
接下去可证出 ΔABF 与 ΔBPC 全等
就有 AE=CP
所以 AF+PF=CD+BP 即
PA=PB+PC



1045、(平几) (竞赛)

如图， 圆 O 过 A、C 与 AB、BC 分别相交于 K、N，ΔABC 的外接圆与 ΔKBN 的外接圆交于 B、M，求证 $OM \perp BM$





证明：设 ΔABC 的外接圆与 ΔKBN 的外接圆的圆心分别为 O_1 和 O_2

（1）第一步证明 $O_1O \parallel BO_2$

连 BO_2 并延长交 AC 于点 P，交圆 O_2 于点 G

因 A、K、N、C 四点共圆，B、K、N、G 四点共圆，

故 $\angle BAP = \angle BNK = \angle BGK$

因 BG 过圆心 O_2

故 $\angle BGK + \angle ABP = 90°$， 于是 $\angle BAP + \angle ABP = 90°$， 故 $BP \perp AC$

因 AC 是圆 O_1 和圆 O 的公共弦

故 $O_1O \perp AC$， 因此 $O_1O \parallel BO_2$

（2）第二步证明 $O_2O \parallel BO_1$

连 BO_1 并延长交 AC 于点 H，取 BC 的中点 T 连 O_1T， 则 $O_1T \perp BC$

因 A、K、N、C 四点共圆，BC 是圆 O_1 的弦

故 $\angle BNK = \angle BAC = \angle BO_1T$

因 $BP \perp AC$

故 $\angle BO_1T + \angle O_1BT = 90°$， 于是 $\angle BNH + \angle HBN = 90°$， 故 $BH \perp KN$

因 KN 是圆 O_2 和圆 O 的公共弦

故 $O_2O \perp KN$， 因此 $O_2O \parallel BO_1$

(3)第三步证明 $OM \perp BM$

由（1）（2）得四边形 BO_2OO_1 是平行四边形，

设其对角线 BO 与 O_1O_2 交于点 Q。

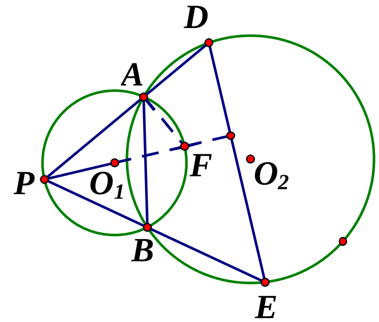
因 BM 是圆 O_1 和圆 O_2 的公共弦

故 O_1O_2 是 BM 的垂直平分线，因此 $QM = BQ = QO$

故 $OM \perp BM$ 证毕！

1045(附注 1)连心线垂直平分共公弦

1045(附注 2)连心线垂直平分共公弦



如图 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 A,B 两点，P 点在 $\odot O_1$ 上

PA,PB 的延长线交 $\odot O_2$ 于点 D,E

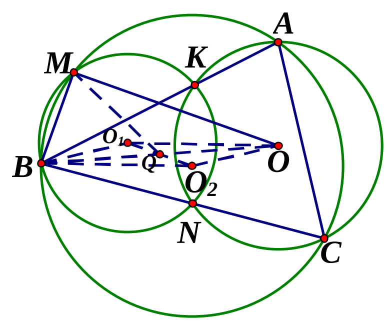
求证：$PO_1 \perp DE$

证明：延长 PO_1 交 $\odot O_1$ 于点 F,连 AF,

因为 $\angle O_1PE + \angle E = \angle BAF + \angle PAB = 90°$

于是 $PO_1 \perp DE$

1045，证法 2



由(附注 2)得，$CO_1 \perp AB$,又 $OO_2 \perp AB$

故 $BO_1 // O_2O$，同理 $BO_2 // O_1O$

于是四边形 B O_2 O O_1 是平行四边形

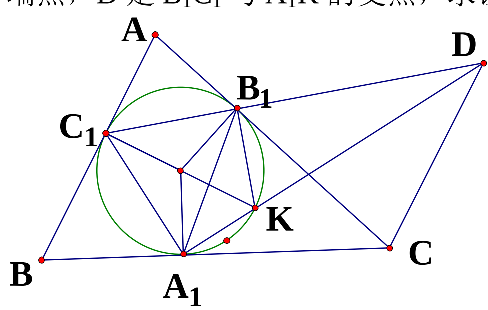
连 BO，O_1O_2 交于 Q 点，则 $BQ = QO$

又 Q 在 BM 的中垂线 O_1O_2 上，于是 $BQ = QM$

因此 $QM = BQ = QO$，故 $OM \perp BM$

1048、(平几) (竞赛)

三角形 ABC 的内切圆切边 AB,AC,BC 分别于 C_1,B_1,和 A_1，设 K 是过 C_1 的内切圆直径的另一端点，D 是 B_1C_1 与 A_1K 的交点，求证 $CD=CB_1$



证 1：设内切圆半径为 r

$\angle B_1C_1K = \frac{1}{2}\angle A$，$\angle B_1KD = \angle B_1C_1A_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90° - \frac{1}{2}\angle C$

$DB_1 = B_1K \bullet \tan\angle B_1KD = 2r\sin\angle B_1C_1K \bullet \cot\frac{1}{2}C$

$= 2r\sin\frac{1}{2}\angle A \bullet \cot\frac{1}{2}C$

$C_1B_1 = 2r\sin\frac{1}{2}\angle B_1IC_1 = 2r\cos\frac{1}{2}\angle A$

$\frac{DB_1}{CB_1} = \frac{2r\sin\frac{1}{2}\angle A \bullet \cot\frac{1}{2}\angle C}{2r\cos\frac{1}{2}\angle A} = \tan\frac{1}{2}\angle A \bullet \cot\frac{1}{2}\angle C$（1）

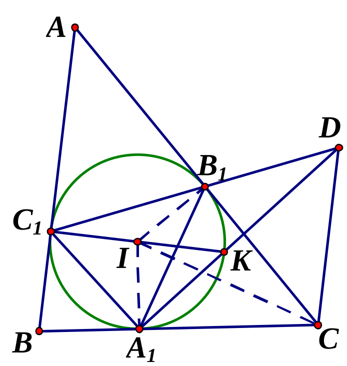
因为$CB_1 = r\cot\frac{1}{2}\angle C$， $AB_1 = r\cot\frac{1}{2}\angle A$，

于是$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{r\cot\frac{1}{2}\angle C}{r\cot\frac{1}{2}\angle A} = \tan\frac{1}{2}\angle A \bullet \cot\frac{1}{2}\angle C$（2）

由（1）（2）得$\frac{DB_1}{CB_1} = \frac{CB_1}{AB_1}$， 故$\Delta CB_1D \backsim \Delta AB_1C_1$

因$AB_1 = AC_1$， 故$CB_1 = CD$

证 2：设 I 是内切圆圆心，连 IC,IA_1



因$\angle C_1A_1D = \angle IA_1C = 90°$, $\angle DC_1A_1 = \angle A_1IC$

故$\frac{DA_1}{C_1A_1} = \frac{CA_1}{IA_1}$,又$\angle CA_1D = \angle IA_1C_1$

故$DCA_1D \backsim DIA_1C_1$,又$IC_1 = IA_1$

故$CA_1 = CD$,又$CA_1 = CB_1$

于是$CB_1 = CD$

1049、(平几) (竞赛)

已知等腰梯形 ABCD 中，AB 平行 CD，又ΔBCD 的内切圆切 CD 于 E，F 是∠DAC 的角平分线上的一点，且 EF 垂直 CD，三角形 ACF 的外接圆交 CD 于 G，求证三角形 AFG 是等腰三角形

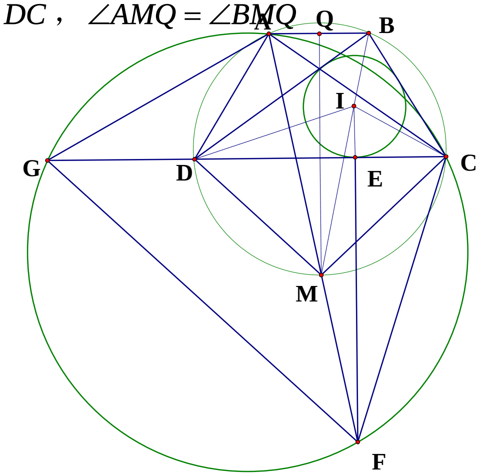
证 1：设ΔBCD 的内切圆圆心为 I，

设 BI 的延长线交等腰梯形 ABCD 的外接圆于点 M，则 M 是弧 DMC 的中点，

因 AF 是∠DAC 的角平分线，于是 M 在也在 AF 上。

于是 MC=MD=MI，MA=MB

取 AB 中点 Q，连 MQ 则 $MQ \perp AB$， $MQ \perp DC$， $\angle AMQ = \angle BMQ$



因 $FI \perp DC$， 故 MQ∥IF

因此 $\angle MIF = \angle IMQ = \angle MFI$， 故 MF=MI

于是 MF=MC

所以 $\angle ADC = \angle AMC = 2\angle AFC = 2\angle AGC$

于是 $\angle AGC = \angle GAD$

又因为 $\angle FGC = \angle FAC = \angle FAD$

所以 $\angle FGA = \angle FAG$

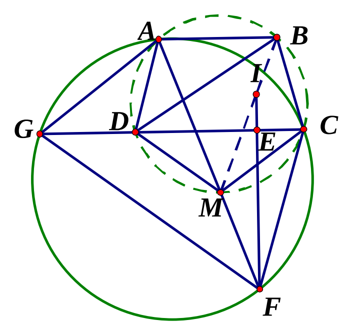
所以三角形 AFG 是等腰三角形

证 2：设ΔBCD 的内切圆圆心为 I，

设 AF 交等腰梯形 ABCD 的外接圆于点 M，连 BM

则 M 是弧 DMC 的中点，

，于是 MA=MB，BM 平分$\angle DBC$,BM 过 I 点



于是 MI=MC

因 AB//DC,IF⊥DC,故 IF⊥AB

于是 MI=MF

故 MC=MF,于是$\angle MFC = \angle MCF$

又$\angle ADC = \angle AMC$， $\angle AFC = \angle AGC$

于是$\angle MCF = \angle GAD$

故$\angle AGC = \angle GAD$

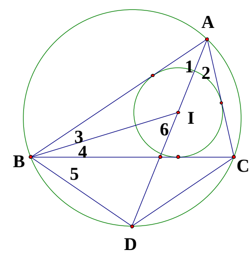
又因为$\angle FGC = \angle FAC = \angle FAD$

所以$\angle FGA = \angle FAG$

所以三角形 AFG 是等腰三角形

1049(附注 1)如图，已知 I 是是ΔABC的内心，

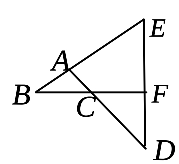
AI 的延长线交ΔABC的外接圆于点 D，求证：DI=DB=DC



证明：因$\angle 6 = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 5 + \angle 4 = \angle IBD$

故 $DI = DB = DC$

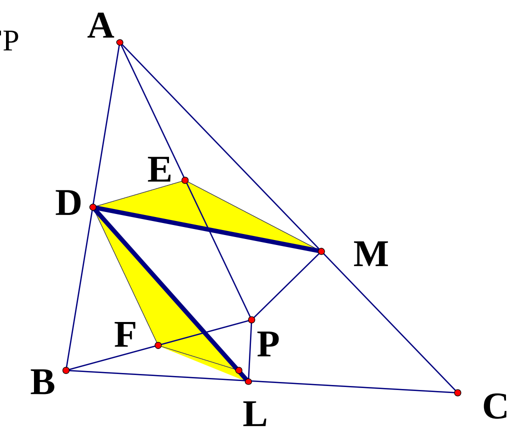
1049(附注 2) 若 AB=AC,ED ^ BC 于 F,则 AD=AE



1050、(平几) (竞赛)

在三角形 ABC 内部取一点 P，在边 AC 和 BC 上各取一点 M 与 L，使得∠PAC=∠PBC，∠PLC=∠PMC=90°，求证:如果 D 是边 AB 的中点，则 DM=DL

证明：取 AP 中点 E 连 EM、ED，取 BP 中点 F 连 DF、FL，



因 DE 是 ΔABP 的中位线，故 DE∥FP，DE=FP

于是四边形 PEDF 是平行四边形

故∠DEP=∠PFD，EP=DF

因∠PLC=∠PMC=90°

故 EM=EP=AE，FL=FP=FB

于是 DE=FL，EM=DF

在等腰 ΔAEM 中，∠PEM=2∠PAC

在等腰 ΔBFL 中，∠PFL=2∠PBL

∠PAC=∠PBC

所以∠PEM=∠PFL

于是∠DEM=∠LFD

因此 $\Delta DEM \cong \Delta LFD$，故 DM=DL

1050 (附注 1)三角形的中位线等于第三边的一半

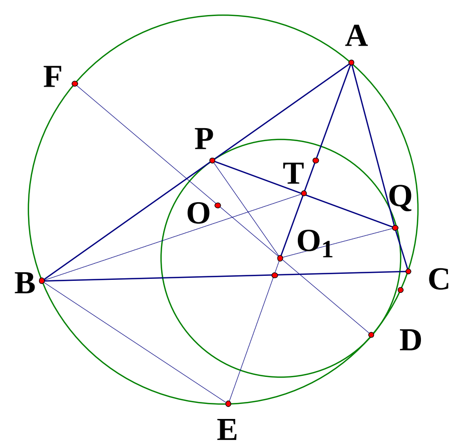
1050 (附注 2)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

1053、(平几) (竞赛)

圆 O_1 内切于圆 O，在 O 上取一点 A(非切点),作圆 O 的弦 AB、AC 分别切圆 O_1 于 P、Q，连结 BC、PQ，证明：三角形 ABC 的内心 I 位于 PQ 中点.

证明：设圆 O、圆 O_1 的半径分别为 R、r，两圆的切点为 D

作连心线 O_1 O 交圆 O 于点 F，延长 A O_1 交圆 O 于点 E，连 BE、O_1 P、O_1 Q



$BE = 2R\sin\angle BAE = \dfrac{2Rr}{O_1A}$

设 A O_1 交 PQ 于 T，$\angle TAC = \angle TAB$（1）

因 AP、AQ 分别是圆 O_1 的切线，

故 T 是 PQ 中点，且

设 $ET = x$，

因为 $O_1E \bullet O_1A = O_1F \bullet O_1D$

所以 $(x - O_1T) \bullet O_1A = r(2R - r)$

$x \bullet O_1A - O_1T \bullet O_1A = r(2R - r)$

又 $O_1T \bullet O_1A = r^2$

于是 $x \bullet O_1A = r(2R - r) + r^2 = 2Rr$，$x = \dfrac{2Rr}{O_1A}$

故 $BE = ET$

所以 $\angle EBT = \angle ETB$，即 $\angle EBC + \angle CBT = \angle TAB + \angle TBA$

因 $\angle EBC = \angle TAC = \angle TAB$

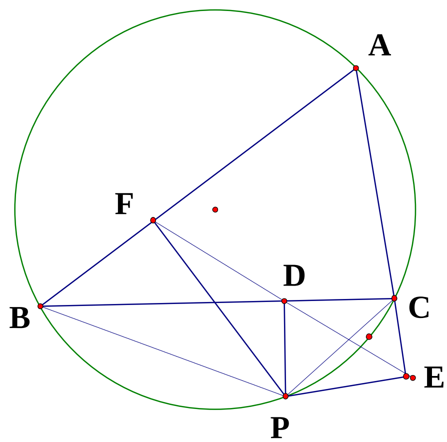
故 $\angle CBT = \angle TBA$ （2）

由（1）（2）得 T 是三角形 ABC 的内心 I

1061、(平几) (竞赛)

已知：点 P 是 ΔABC 的外接圆上的任意一点，过点 P 分别作 ΔABC 三边的垂线垂足分别为 D、E、F，求证：D、E、F 三点共线

证明：连 DE、DF、BP、PC



因 $\angle PDC = \angle PEC = 90°$

故 P、D、C、E 四点共圆

故 $\angle PDE = \angle PCE$

因 P、B、A、C 四点共圆

故 $\angle PCE = \angle PBF$

于是 $\angle PDE = \angle PBF$

因 P、B、F、D 四点共圆

故 $\angle PBF$ 与 $\angle PDF$ 互补

因此 $\angle PDE$ 与 $\angle PDF$ 互补

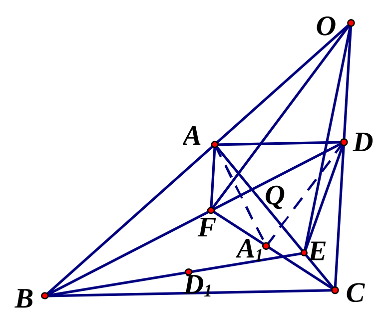
因此 D、E、F 三点共线

直线 DEF 叫做西姆松线

1153、(平几) (竞赛)

已知：如图，梯形 ABCD,BA 与 CD 延长线交于 O，$\angle AFD = \angle DFC$，$\angle AED = \angle AEB$，求证：$OE = OF$

证明：设 AC 与 BD 交于 Q



因 $\angle AFD = \angle DFC$

故 A 关于 BD 的对称点 A_1 在 CF 上,连 D A_1

则 $AD = DA_1$，　$FA = FA_1$

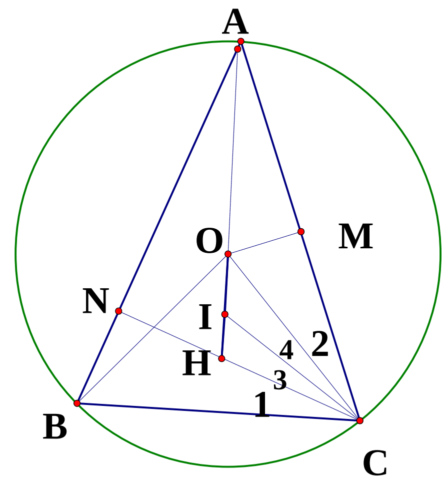
因 $\dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{OD}{OC}$

于是 $\dfrac{FA_1}{FC} = \dfrac{OD}{CC} \Rightarrow OF // DA_1 \Rightarrow \dfrac{OF}{DA_1} = \dfrac{OC}{DC}$，故 $\dfrac{OF}{DA} = \dfrac{OC}{DC}$

同理 $\dfrac{OE}{DA} = \dfrac{OB}{AB}$,，又 $\dfrac{OC}{DC} = \dfrac{OB}{AB}$，因此 $\dfrac{OF}{DA} = \dfrac{OE}{DA} \Rightarrow OE = OF$

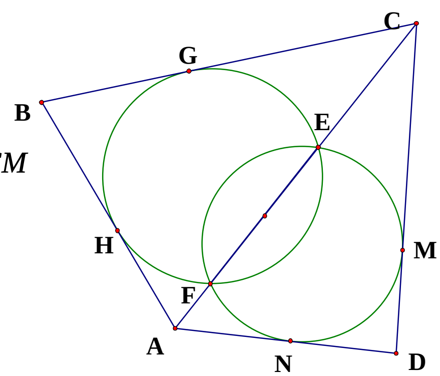
注：这是一个平行与对称的精典题目

1159、(平几)
在三角形 ABC 中，如果内心 I，外心 O 和垂心 H 不重合且在同一直线上，求证：ABC 为等腰三角形。



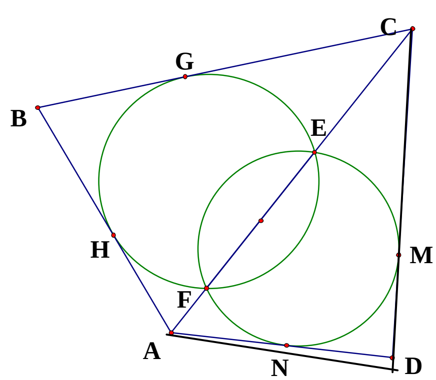
证：　$\angle MOC = \angle ABC$
故 $\angle 1 = \angle 2$，于是 $\angle 3 = \angle 4$
推出 $\dfrac{CH}{CO} = \dfrac{HI}{OI}$，同理 $\dfrac{BH}{BO} = \dfrac{HI}{OI}$
于是 $CH = BH$
于是得证

1161、(平几) (竞赛)
（1999 IMO 预选题）某圆分别与凸四边形 ABCD 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点，与对角线 AC 相交于 E、F 两点。问 ABCD 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过 E、F 两点，且分别与 DA、DC 的相切，证明之。
答：充要条件是 AB+CD= AD + BC



(1)证必要性
设 AD 与 CD 与圆切于 N 和 M
则 DM=DN，$CG^2 = CE \cdot CF = CM^2 \Rightarrow CG = CM$
同理 AH=AN
故 AB+CD＝AH+HB+DM+CM
AN+BG+DN+CG＝BC+AD
即 AB+CD= AD + BC

(2)证充分性；设 AB+CD= AD + BC
过 E 与 F 作圆与 CD 切于 M,，
假设此圆与 AD 相离，则过 A 作 AQ 与圆相切于 N 交 CD 于 Q
由必要性知
AB+CQ= AQ + BC
又 AB+CD= AD + BC
于是 CD- CQ= AD-AQ
即 DQ= AD-AQ 与三角形两边之差小于第三边
矛盾，于是排除此圆与 AD 相离
同理可排除此圆与 AD 相交
综上此圆与 AD 相切



1162、在三角形 ABC 中，D 是 BC 中点，分别延长 BA，CA 到 E，F 使 DE=DF，过 E、F 分别做 AB，AC 的垂线交于 P，求证∠PBE=∠PCF

简证：作 $CM \perp PE$于点M

所以 PFCM 四点共圆

所以$\angle PCF = \angle PMF$

同理，$DN = DF$，$\angle PBE = \angle PNE$

取 EM 中点 G,于是 DG∥BE

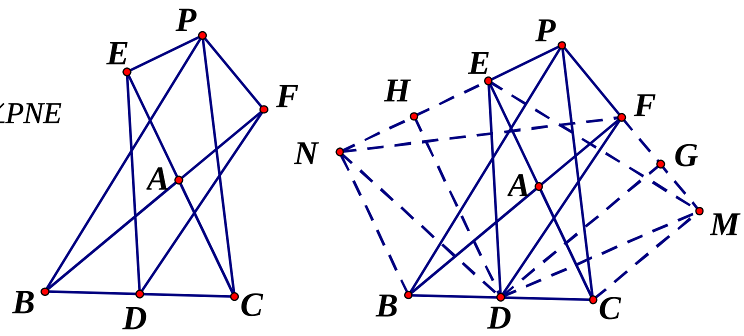
故$DG \perp EM$，$DE = DM$

由$DE = DM = DF = DN$

得 NFEM 四点共圆

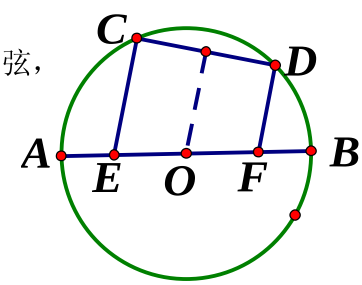
于是$\angle PMF = \angle PNE$

故有∠PBE=∠PCF



1162(附注)，如图 E,F 在圆 O 的直径 AB 上，CD 是圆的弦，

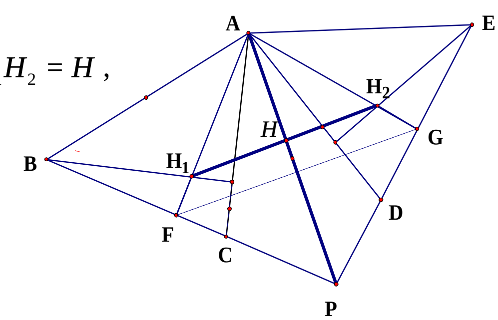
$CE \perp CD, DF \perp CD,$求证：OE=OF



1163、(平几) (竞赛)

（伊朗竞赛题）有两个锐角三角形 ABC，ADE，其中∠BAC=∠DAE，BC，ED 延长后交于 P，点 H_1，H_2 分别是三角形 ABC，ADE 的垂心，求证，$H_1H_2 \perp AP$ 的充要条件是 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$

证明：先证必要性



证明：先证必要性，设$H_1H_2 \perp AP$, $AP \cap H_1H_2 = H$,

因$AG \perp PE$ 故有PHH_2G四点共圆

于是$AH \cdot AP = AH_2 \cdot AG$

同理$AH \cdot AP = AH_1 \cdot AF$

$AH_2 \cdot AG = AH_1 \cdot AF$

因H_2是$\triangle ADE$垂心，故$\triangle H_2AE$与$\triangle ADE$外接圆半径相等，设圆半径为 R

$$AH_2 = 2R\sin\angle AEH_2 = 2R\cos\angle DAE = \frac{AE}{\sin\angle DAE}\cdot\cos\angle DAE$$

$$AH_2 \cdot AG = \frac{AE}{\sin\angle DAE}\cdot\cos\angle DAE \cdot AG = \frac{2S_{\triangle ADE}}{\sin^2\angle DAE}\cdot\cos\angle DAE$$

同理 $AH_1 \cdot AG = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{\sin^2\angle BAC}\cdot\cos\angle BAC$,又$\angle BAC = \angle DAE$

于是$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE}$

(2)证充分性：设 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$， 由(1)知 $AH_2\cdot AG=AH_1\cdot AF$

于是 H_1H_2GF 四点共圆，所以 $\angle AH_2H_1=\angle AFG$

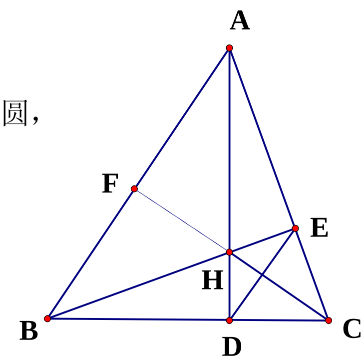
又 $AFPG$ 四点共圆，所以 $\angle AFG=\angle APG$

于是 $\angle AH_2H_1=\angle APG$， 因此 $HPGH_2$ 四点共圆

故 $AP\perp H_1H_2$

1213、(平几)求证三角形三条高交于一点

证明：如图：AD，BE，是△ABC 的高。设 AD 与 BE 相交于点 H，连 CH 并延长交 AB 于 F。



因 $AD\perp BC$， $BE\perp AC$

故 $\angle HDC+\angle HEC=180^\circ$， $\angle AEB=\angle ADB$

故 D，H，E，C 四点共圆，A，B，D，E 四点共圆，

于是 $\angle DHC=\angle DEC=\angle ABD$

故 B，D，H，F 四点共圆，

于是 $\angle AFH=\angle HDB=90^\circ$

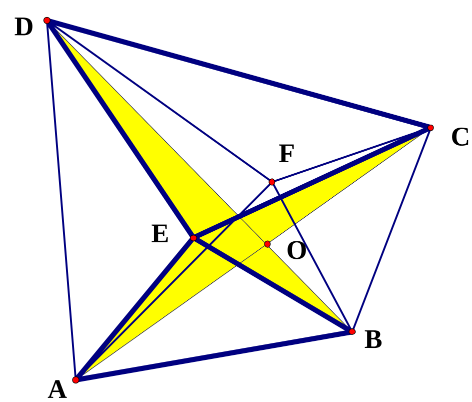
所以 $CF\perp AB$

可见 CF 是 AB 上的高

因此三角形三条高交于一点

1230、平面上有一凸四边形 ABCD 及其内部两点 E、F，满足 AE=BE，CE=DE，∠AEB=∠CED，AF=DF，BF=CF，∠AFD=∠BFC。求证：$\angle AFD+\angle AEB=180^\circ$

提示：连 AC、BD 交于 O



$\triangle AEC\cong\triangle BED$

故 $\angle EAO=\angle OBE$

于是 ABOE 四点共圆

因此， $\angle AEB=\angle AOB$

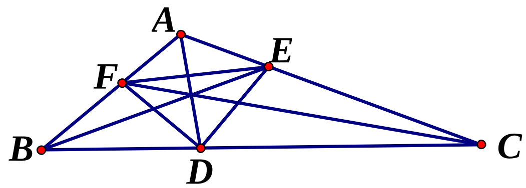
同理， $\angle AFD=\angle AOD$

于是 $\angle AFD+\angle AEB=180^\circ$

1278、(平几) (竞赛)

已知：如图，三角形 ABC 中，AD、BE、CF 为角平分线，求证：三角形 DEF 为直角三角形的充要条件是三角形 ABC 有一个角是 120 度

先证充分性：设 $\angle BAC = 120°$



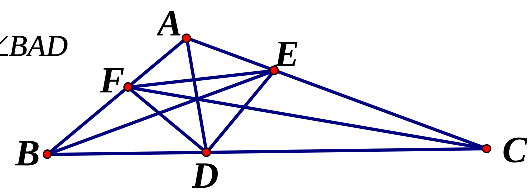
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin 120°} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin 60°} = \frac{AD}{BD}$$

于是 DF 平分 $\angle ADB$，

同理 DE 平分 $\angle ADC$ 于是 $ED \perp FD$

必要性：已知 $ED \perp FD$，求证：$\angle BAC = 120°$

下面用反证法证明：假设 $\angle BAC > 120°$，则



$$\sin\angle BAC < \sin 120° = \sin 60° < \sin\frac{1}{2}\angle BAC = \sin\angle BAD$$

即 $\sin\angle BAC < \sin\angle BAD$

故 $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC} > \dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAD} = \dfrac{AD}{BD}$，

于是 $\angle ADF > \dfrac{1}{2}\angle ADB$，同理 $\angle ADE > \dfrac{1}{2}\angle ADC$，

故 $\angle ADF + \angle ADE > \dfrac{1}{2}(\angle ADB + \angle ADC)$，即 $\angle EDF > 90°$ 与 $ED \perp FD$ 矛盾

假设 $\angle BAC < 120°$，同理可证 $\angle EDF < 90°$ 也与 $ED \perp FD$ 矛盾

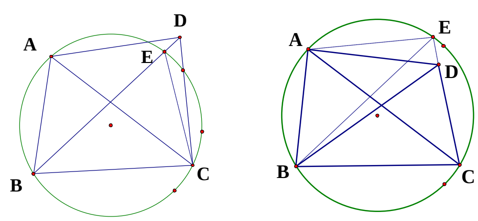
综上所述 $\angle BAC = 120°$

证毕

1285、(平几)

在平面四边形ＡＢＣＤ（按顺序连接）中，已知 $\angle BAC = \angle BDC$，求证四点ＡＢＣＤ共圆（多谢）

用反证法



证明：作出三角形 ABC 的外接圆 O

（1）假设点 D 在圆 O 外，设 BD 与圆 O 交于点 E。

则 $\angle BEC = \angle BAC$，$\angle BEC > \angle BDC$，故 $\angle BAC > \angle BDC$

这与已知相矛盾

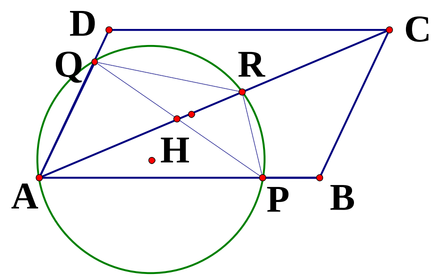
（2）假设点 D 在圆 O 内，同理可证 $\angle BAC < \angle BDC$，这也与已知相矛盾

综上所述，点 D 在圆 O 上，于是 ABCD 四点共圆

注：同样的方法可证，在平面四边形ＡＢＣＤ（按顺序连接）中，若 $\angle BAD + \angle BCD = 180°$，则ＡＢＣＤ四点共圆

1286、设 PQ 分别为平行四边形 ABCD 的边 AB，AD 上的点，三角形 APQ 的外接圆交对角线 AC 于 R，证明：$AR\bullet AC=AQ\bullet AD+AP\bullet AB$

证明：连 PQ，PR，QR
由托勒密定理得



$AR\bullet PQ=AQ\bullet PR+AP\bullet QR$（1）

因 $\angle PRQ=180°-\angle PAQ=\angle B$

$\angle PQR=\angle PAR=\angle BAC$

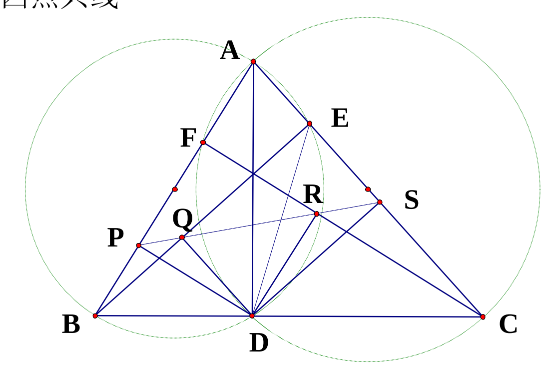
故 $\Delta PQR\backsim\Delta CAB$，于是 $QR=kAB$，$PQ=kAC$，$PR=kBC=kAD$

代入（1）式得 $AR\bullet kAC=AQ\bullet kAD+AP\bullet kAB$

故有 $AR\bullet AC=AQ\bullet AD+AP\bullet AB$

注：托勒密定理是圆内接四边形对角线的乘积，等于两组对边乘积的和

1287、(平几) (竞赛)
设三角形 ABC 的三条高为 AD，BE，CF，过 D 作 AB，BE，CF，CA 的垂线垂足分别为 P、Q、R、S，证明这四点共线
证法 1：（直接证）



因为 $\angle BPD=\angle BQD=90°$

于是 PBDQ 四点共圆

故 $\angle PQD+\angle PBD=180°$

因为 $\angle AEB=\angle ADB=90°$
于是 ABDE 四点共圆
$\angle PBD=\angle DES$

因为 $\angle AQE+\angle DSE=90°+90°=180°$

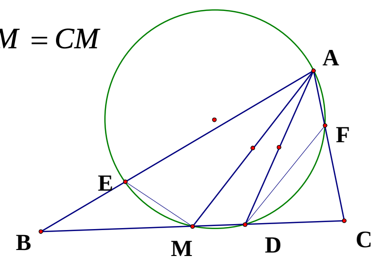
于是 QDSE 四点共圆，$\angle DES=\angle DQS$

因此 $\angle PQD+\angle DQS=180°$，故 P、Q、S 三点共线

同理可证 P、Q、R 三点共线，于是 PQRS 四点共线
证法 2：（用西姆松定理）
证明：因为 $\angle AEB=\angle ADB=90°$，于是 ABDE 四点共圆
因为圆上的点 D，在 ΔABE，三边的射影分别是 P、Q、S
由西姆松定理得，P、Q、S 三点共线
同理可证 P、Q、R 三点共线，于是 P、Q、R、S 四点共线
(1287 注)西姆松定理:圆上的点在内接三角形三边的射影三点共线

1288、设三角形 ABC(AB 不等于 AC)的角 A 的平分线与边 BC 交于 D，M 为 BC 中点，过点 A，D，M 的圆与 AB，AC 的交点分别为 E，F，证明 BE=CF

证明：（用圆幂定理）



因为 $BE \bullet BA = BM \bullet BD$， $CF \bullet CA = CD \bullet CM$， $BM = CM$

所以 $\dfrac{BE}{CF} \bullet \dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BD}{CD}$

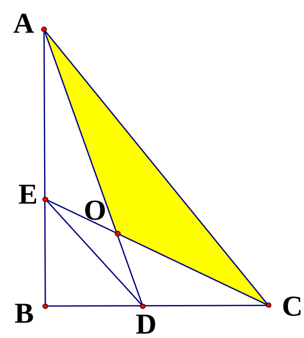
因为 AD 平分 $\angle BAC$

所以 $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BD}{CD}$， 故 $\dfrac{BE}{CF} = 1$

(1288 注)圆幂定理:圆的两条弦被交点分成的两条线段的乘积相等

1290、在 $Rt DABC$中，∠B=90°，∠A，∠C 的平分线 AD，CE 交于 O，证明三角形 AOC 的面积是四边形 AEDC 面积的一半

证明 1：（设基本量用比例）设 $S_{\Delta OAC} = 1$



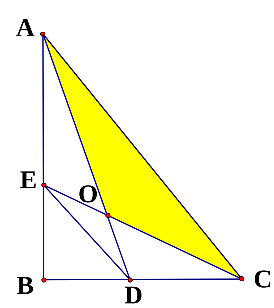
因 $\dfrac{S_{\Delta AEO}}{S_{\Delta OAC}} = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BE}{BC} = \tan\dfrac{C}{2}$， 故 $S_{\Delta AEO} = \tan\dfrac{C}{2}$

因 $\dfrac{S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta DOE}} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{BD}{AB} = \tan\dfrac{A}{2}$， 故 $S_{\Delta EOD} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

因 $\dfrac{S_{\Delta CDO}}{S_{\Delta OAC}} = \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BD}{AB} = \tan\dfrac{A}{2}$， 故 $S_{\Delta ODC} = \tan\dfrac{A}{2}$

$$
\begin{aligned}
\text{于是 } S_{AEDC} &= 1 + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} \\
&= 1 + \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right) + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} \\
&= 1 + \tan 45^\circ\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right) + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 2
\end{aligned}
$$

证明 2：设 $AB = c, AC = b, BC = a$



$$\frac{S_{DOAC}}{S_{DAEO}} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC+BC}{AB}, \frac{S_{DOAC}}{S_{DAEC}} = \frac{AC+BC}{AB+AC+BC} = \frac{a+b}{a+b+c},$$

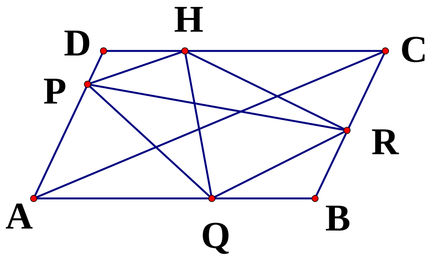
$$\frac{S_{DACE}}{S_{DBCE}} = \frac{AC}{BC}, \frac{S_{DACE}}{S_{DABC}} = \frac{AC}{BC+AC} = \frac{b}{a+b}，\text{于是 } \frac{S_{DOAC}}{S_{DABC}} = \frac{b}{a+b+c}$$

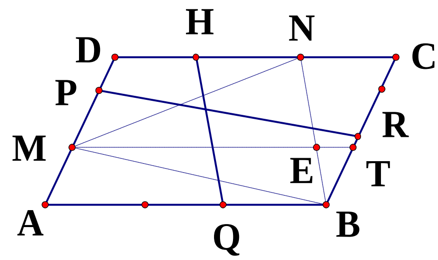
$$\frac{BE}{AE} = \frac{a}{b}, \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}, \frac{BE}{c} = \frac{a}{a+b}, \frac{BD}{a} = \frac{c}{b+c}, BE = \frac{ac}{a+b}, BD = \frac{ac}{b+c},$$

$$\frac{S_{DBDE}}{S_{DABC}} = \frac{BE \times BD}{b \times c} = , \frac{S_{DBDE}}{S_{\text{四边形}AEDC}} = 1 - \frac{c(b+c)}{b(a+b)} = \frac{b(a+b)-c(b+c)}{b(a+b)} = \frac{b(a+b)-c(b+c)}{b(a+b)}$$

1291、(平几)

已知平行四边形的内接四边形面积等于它的一半，求证 ：内接四边形至少有一条对角线与原平行四边形的一组对边平行





证明:（公式,，平移，看图）

设内接四边形 PQRH 的对角线夹角为q,对角线 PR=m，HQ=n，平行四边形 ABCD 面积为 S

因为平行四边形的内接四边形面积等于它的一半

故$\frac{1}{2}mn\sin q=\frac{1}{2}S$ ，

假设内接四边形 PQRH 的对角线，都不平行于原平行四边形的边

则平移 PR 到 BM，平移 QH 到 BN，BM、BN 不与边重合，连 MN

于是$\frac{1}{2}mn\sin q=S_{\Delta MBN}$， $S_{\Delta MBN}=\frac{1}{2}S$ （1）

作 MT∥AB，则$S_{\Delta MBN}=S_{\Delta MNE}+S_{\Delta MBE}<S_{\Delta MNT}+S_{\Delta MBT}=\frac{1}{2}S$与（1）式矛盾

于是假设错误，故原命题成立

1293、三角形 ABC，AC=BC，M 为 AB 中点，FG 过 M，三角形 CFG 与三角形 ABC 有相同的内心， 求证：A，G，B，F 四点共圆

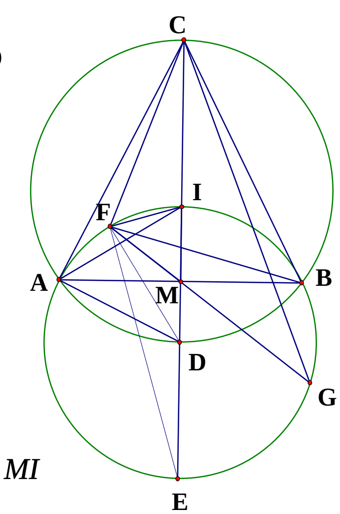
证明： 如图设 I 是两个三角形的内心

设ΔABC的外接圆与 CM 的延长线交于 D 点，连 AD

由垂径定理的逆定理知 CD 是ΔABC的外接圆的直径，于是 AD⊥AC

由内心的性质得，$DA=DI=DB$

以 D 为圆心以 DI 为半径作圆 D，它与直线 CM 的延长线交于 E 点，下面证明 F 点在圆 D 上，



连 FI，AI，则$\frac{MI}{IC}=\frac{FM}{FC}=\frac{AM}{AC}$

因$AM^2=DM\bullet MC=DM(EC-EM)$

$$AM^2=AD^2-DM^2=(AD-DM)(AD+DM)=EM\bullet MI$$

于是$DM(EC-EM)=EM\bullet MI$

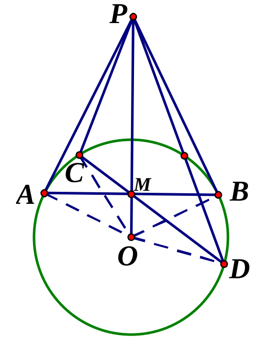
$$DM\bullet EC=DM\bullet EM+EM\bullet MI=EM(DM+MI)=EM\bullet DI=EM\bullet AD$$

于是 $\dfrac{EM}{EC}=\dfrac{DM}{AD}=\dfrac{AM}{AC}$，故 $\dfrac{EM}{EC}=\dfrac{MI}{IC}$

所以 FE 是 ΔCFM 的外角平分线，又 AI 是 ΔCFM 的内角平分线

故 $\angle EFI=90^\circ$，因此 F 在圆 D 上，同理可证 G 也在圆 D 上，

因此 A，G，B，F 四点共圆



1293(附注 1)PA,PB 是圆 O 的两条切线，A,B 是切点，

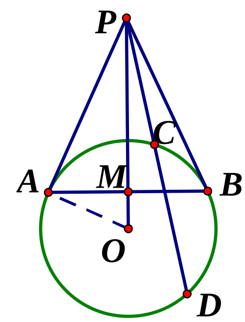
M 是 AB 的中点，圆 O 的弦 CD

求证：P,C,O,D 四点共圆且 $\angle CPO=\angle DPO$

证明：因 $MC\cdot MD=MA\cdot MB$, $MO\cdot MP=MA\cdot MB$

故 $MC\cdot MD=MO\cdot MP$，于是 P,C,O,D 四点共圆

因 OC=OD,于是 $\angle CPO=\angle DPO$



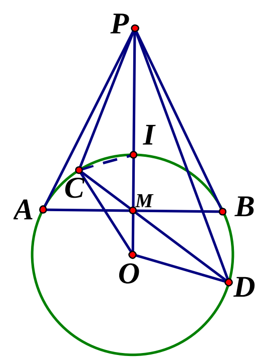
1293(附注 2)PA,PB 是圆 O 的两条切线，A,B 是切点，

M 是 AB 的中点，PCD 是圆 O 的割线

求证：O,M,C, D 四点共圆

证明：$PA^2=PC\cdot PD$, $PA^2=PM\cdot PO$,

故 $PC\cdot PD=PM\cdot PO$，于是 O,M,C, D 四点共圆



1293(附注 3)PA,PB 是圆 O 的两条切线，A,B 是切点，

M 是 AB 的中点，圆 O 的弦 CD，OP 与圆 O 交于 I

求证： I 是 ΔPCD 的内心

证明：由附注 1 知， P,C,O,D 四点共圆

且 $\angle CPO=\angle DPO$

因 $\angle CIO=\angle CPO+\angle PCI$

$\angle OCI=\angle OCD+\angle MCI=\angle DPO+\angle MCI$

$\angle CPO=\angle DPO$

故 $\angle PCI=\angle MCI$

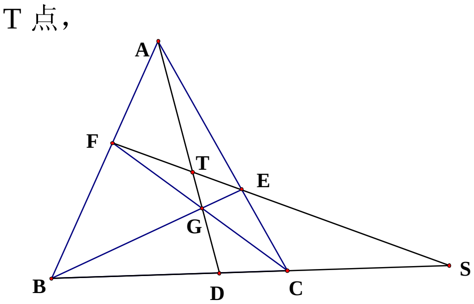
于是 CI 是 $\angle PCD$ 的角平分线

因此，I 是是 ΔPCD 的内心

1297、已知；三角形 ABC 中，D、E、F 分在三边上，

且 AD、BE、CF 交于一点 G。FE、AD 交于 T 点，

求证：$\dfrac{AT}{TG}=\dfrac{AD}{DG}$



证明：$\dfrac{AT}{TG}=\dfrac{AF}{FB}\bullet\dfrac{EB}{EG}$，$\dfrac{DG}{AD}=\dfrac{BF}{AB}\bullet\dfrac{CG}{CF}$

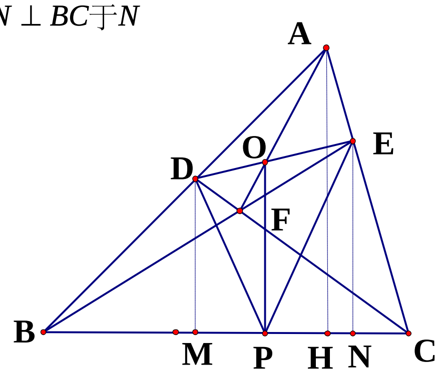
于是 $\dfrac{AT}{TG}\bullet\dfrac{DG}{AD}=\dfrac{AF}{CF}\bullet\dfrac{CG}{EG}\bullet\dfrac{EB}{AB}=1$

所以 $\dfrac{AT}{TG}=\dfrac{AD}{DG}$

(1297 附注)几个式子由梅涅劳斯定理而得

1298、已知:锐角三角形 ABC，D、E 为 AB、AC 上任意两点，BE、CD 交于 F，AF、DE 交于 O，由 O 作 OP⊥BC 于 P，连 PD、PE。

求证:∠DPO=∠EPO。



证明：作 $DM \perp BC$于M， $AN \perp BC$于H， $EN \perp BC$于N

则 DM∥OF∥AH∥EN，

因 $\dfrac{DM}{AH}=\dfrac{BD}{AB}$， $\dfrac{EN}{AH}=\dfrac{CE}{AC}$

故$\dfrac{DM}{EN}=\dfrac{BD}{AB}\bullet\dfrac{AC}{CE}$， 又有$\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{DF}{FC}\bullet\dfrac{AC}{AE}$

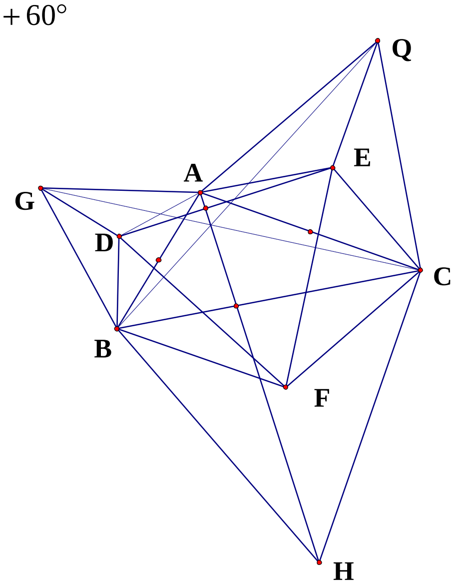
因$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CF}{FD}\bullet\dfrac{BD}{BA}$

故$\dfrac{BD}{BA\bullet CE}=\dfrac{DF}{CF\bullet EA}$

$\dfrac{BD\bullet AC}{BA\bullet CE}=\dfrac{DF\bullet AC}{CF\bullet EA}$， 所以$\dfrac{DM}{AH}=\dfrac{OD}{OE}$， 又$\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{MP}{PH}$

故 $\dfrac{DM}{AH}=\dfrac{MP}{PH}$， 所以 $\Delta DPM \backsim \Delta EPM$， 于是 $\angle DPM=\angle EPH$， 所以 $\angle DPO=\angle EPO$

1299、从ΔABC 三边分别向外作等边三角形,记三个等边三角形的重心分别为 D,E,F.，证明,ΔDEF 为等边三角形.



证明：因$\angle GAC=\angle BAC+60°$

$\angle DAE=\angle BAC+\angle DAB+\angle EAC=\angle BAC+60°$

故$\angle GAC=\angle DAE$，

又$\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{AC}{AE}$，

于是$\Delta GAC \backsim \Delta DAE$，

$\dfrac{GC}{DE}=\dfrac{3}{2}$

同理$\Delta ECF \backsim \Delta QCB$，

于是$\dfrac{QB}{EF}=\dfrac{3}{2}$

因$\angle GAC=\angle BAQ$，

又$AG=AB$， $AC=AQ$

故$\Delta GAC \cong \Delta BAC$， 故$GC=BQ$

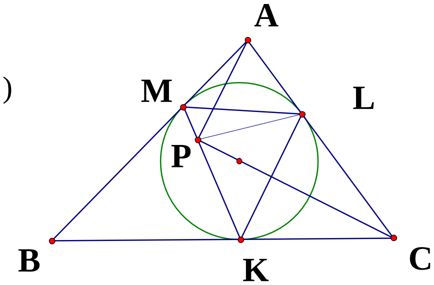
所以$DE=EF$， 同理$DE=DF$

所以ΔDEF 为等边三角形

1318
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22443&show=0

已知三角形内切圆与三边 BC,CA,AB 切点分别为 K，L，M。P 为角 C 角平分线与 MK 交点。求证：AP，LK 平行。

证明：K、L 关于 PC 对称，



于是 $\angle KPL = 2\angle CPK = 2(\angle BKM - \angle PCB)$

$= 2(90° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C) = \angle A$

于是 A、M、P、L 共圆

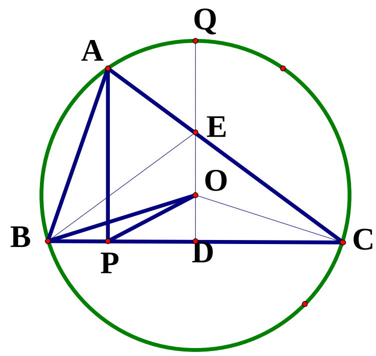
所以 $\angle MPA = \angle ALM = \angle MKL$

所以 AP，LK 平行

1333
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22533&show=0

如图，已知 O 是锐角三角形的外心，$\angle ABC. > \angle C + 30°$，且 $PA \perp BC$ 于点 P，求证：$\angle BOP + \angle BAC. < 90°$

证明：过外心 O 作直线垂直于 BC，于点 D，交 AC 于点 E，连 BE，OC，



则 $\angle EBC = \angle C$，BE=EC，BD=DC

因为 $\angle ABC. > \angle C + 30°$

所以 $\angle ABE. > 30°$

由正弦定理得

$\frac{AE}{\sin\angle ABE} = \frac{BE}{\sin\angle BAC} \geq BE$

于是 $AE \geq BE\sin\angle ABE > \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}EC$

因为 AP // DE

所以 $PD > \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BD$，于是 $PD > PB$

故 $\angle PBO > \angle BOP$，

因为 $\angle PBO = \angle OCD$

所以 $\angle BOC + 2\angle PBO = 180°$，所以 $\angle BOC + 2\angle BOP < 180°$

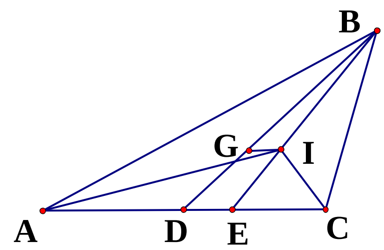
因为 $\angle BOC = 2\angle BAC$

所以 $2\angle BAC + 2\angle BOP < 180°$，故 $\angle BOP + \angle BAC. < 90°$

1334

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22539&show=0

如果△ABC 的三边 a,b,c 成等差数列,且 a＜b＜c,求证：△ABC 的重心 G 与内心 I 的连线平行于 AC 边.



证明：因为 I 是△ABC 内心

故 AI、CI 分别平分 $\angle BAC$ 和 $\angle BCA$

所以 $\frac{BI}{IE}=\frac{BC}{CE}=\frac{BA}{AE}$

由等比性质得 $\frac{BI}{IE}=\frac{BC+BA}{CE+AE}=\frac{a+c}{b}=2$

因为 G 是△ABC 重心

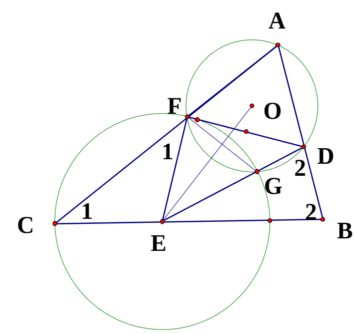
所以 $\frac{BG}{GD}=2$，于是 $\frac{BG}{GD}=\frac{BI}{IE}$

故 GI∥AC

1335

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22546&show=0

在三角形 ABC 的边 AB，BC，AC 上分别取点 D，E，F，使 DE=BE，FE=CE。求证：三角形 ADF 的外接圆圆心在角 DEF 平分线上。



证明：以 E 为圆心 EF 为半径作圆，与 DE 交于点 G，

则 $\angle FGE=\frac{180°-\angle DEF}{2}$

$=\frac{\angle CEF+\angle DEB}{2}=\frac{180°-2\angle 1+180°-2\angle 2}{2}$

$=180°-\angle 1-\angle 2=\angle A$

于是 A、D、G、F 四点共圆，此圆为 ΔADF 的外接圆

设为圆 O，连 OE，因 FG 为圆 O 与圆 E 的公共弦

于是 $OE\perp FG$

故 EO 是 $\angle DEF$ 的平分线，

即 ΔADF 的外接圆圆心在 $\angle DEF$ 的平分线上

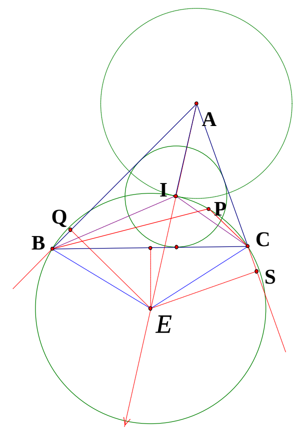
1335 (附注)两圆的连心线与公共弦垂直

1346
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22861&show=0

设 I 为三角形 ABC 的内心，三角形内部一点 P 满足

$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$

证明： AP⩾ AI，当且仅当 P 与 I 重合时等号成立.



证明：因为 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$

所以 $\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

所以 $\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

于是 P 点的轨迹 l 是以 BC 为弦，所含圆周角

等于 $180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 的一段弧

因为点 I 为三角形 ABC 的内心

所以 $\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

于是，弧 l 过点 I

以 A 为圆心，AI 为半径作圆 A

设弧 l 所在圆的圆心为 E，

下面证明圆 E 与圆 A 外切，为此只要证明 E 在直线 AI 上

作 $EQ\perp AB$ 于 Q， $ES\perp AC$ 于 S，连 EB、EC

因为 $\angle BEC=360^\circ-2\angle P=\angle B+\angle C$

所以 $\angle BEC+\angle A=180^\circ$

于是 ABEC 四点共圆，故 $\angle ECS=\angle EBA$

又 $EB=BC,\ \angle EQB=\angle ESC=90^\circ$

因此 $EQ=ES$, 所以 E 在 $\angle A$ 的角平分线 AI 上

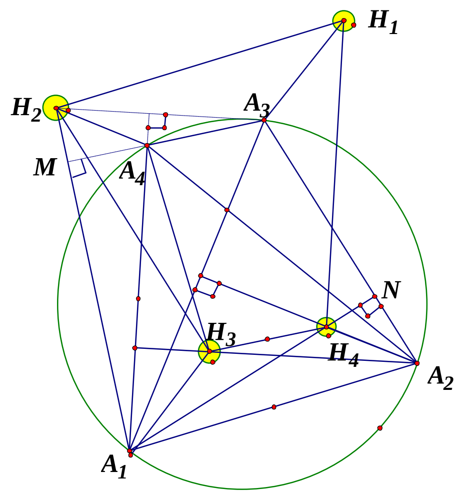
圆 E 与圆 A 外切，所以 AP⩾AI，当且仅当 P 与 I 重合时等号成立

1346(附注)对定线段张角一定的点的轨迹是以定线段为弦的一段弧

1371

http://bbs.pep.com.cn/thread-256583-1-1.html

四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形,H_1、H_2、H_3、H_4 依次为三角形 $A_2A_3A_4$、$A_3A_4A_1$、$A_4A_1A_2$、$A_1A_2A_3$ 的垂心，求证 H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，并定出该圆的圆心。



简证：因 $\angle A_1H_4A_2+\angle A_1A_3A_2=180°$

$\angle A_1H_3A_2+\angle A_1A_4A_2=180°$

$\angle A_1A_3A_2=\angle A_1A_4A_2$

故 $\angle A_1H_4A_2=\angle A_1H_3A_2$°

故 A_1, A_2, H_4, H_3 四点共圆

故 $\angle H_4H_3A_2=\angle H_4A_1A_2$

同理 $\angle H_2H_3A_4=\angle H_2A_1A_4$

易证 $\angle H_2A_1A_4=\angle H_4A_1A_2$

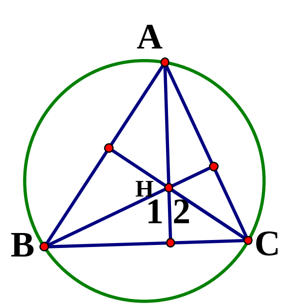
故 $\angle H_4H_3A_2=\angle H_2H_3A_4$

于是 $\angle H_2H_3H_4=\angle A_4H_3A_2=180°-\angle A_4A_1A_2=\angle A_4A_2A_2$

同理 $\angle H_2H_1H_4=\angle A_4A_1A_2$

故 $\angle H_2H_3H_4$与$\angle H_2H_1H_4$互补

1347(附注)若 H 是 $DABC$ 的垂心，则 $\angle 1=\angle C,\angle 2=\angle B$, 于是 $\angle A+\angle BHC=180°$



1376

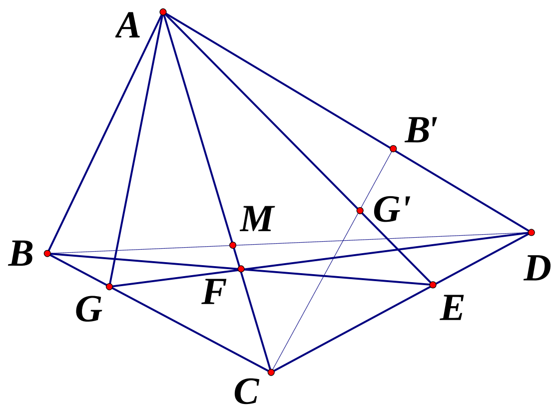
http://bbs.pep.com.cn/thread-278797-1-3.html

在四边形 ABCD 中，对角线 AC 平分角 $\angle BAD$，在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G。

求证：$\angle GAC = \angle EAC$

证明：作 B、C 关于 AC 的对称点 B', G' ,因 $\angle BAC = \angle DAC$

故 B' 在直线 AD 上，$CG' = CG, G'B' = G'B'$



要证 $\angle GAC = \angle EAC$

只要证 G' 点在直线 AE 上即可

用 AE 截 $DB'CD$ 由梅涅劳斯逆定理,得

只要证 $\frac{B'A}{AD} \bullet \frac{DE}{EC} \bullet \frac{CG'}{G'B'} = 1$

只要证 $\frac{AB}{AD} \bullet \frac{DE}{EC} \bullet \frac{CG}{GB} = 1$

连 BD 交 AC 于点 M

因 $\angle BAC = \angle DAC$,故 $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MD}$

于是,只要证 $\frac{BM}{MD} \bullet \frac{DE}{EC} \bullet \frac{CG}{GB} = 1$

此式,在 ΔCBD 中由塞瓦定理可得,证毕

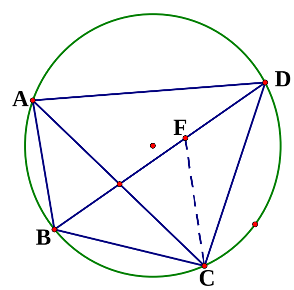
注：梅涅劳斯逆定理是证明三点共线的一种方法

1442

http://bbs.pep.com.cn/thread-291898-1-2.html

请用向量法证明托勒密定理

若 ABCD 内接于圆，则 $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$



证 1：在 BD 上取 F，使 $\angle DFC = \angle ABC$

由于 $\angle BAC = \angle FDC$ ，于是 $DABC \backsim DDFC$

因此 $AC \times FD = AB \times CD \cdots$①

在 $DBCF$ 和 $DACD$ 中

$\angle CBF = \angle CAD$, $\angle BFC = \angle ADC$

于是 $DBCF \backsim DACD$

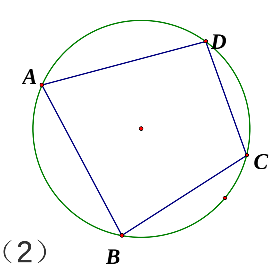
因此 $AC \times BF = AD \times BC \cdots$②

①+②得，$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$

证 2(提问者要求用向量)：设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$，$\overrightarrow{DA} = \vec{c}$，$\overrightarrow{DC} = \vec{d}$

因 $< \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{c}, \vec{d} > = p$

故 $\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{\vec{c} \bullet \vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|} = 0$，即



$|\vec{c}||\vec{d}|\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|\vec{c} \bullet \vec{d} = 0$

$|\vec{c}||\vec{d}||\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{c}||\vec{d}||\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}||\vec{d}|(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b})$（1）

同理 $|\vec{a}||\vec{b}||\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c} - \vec{d}|^2 = |\vec{a}||\vec{b}|(\vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 2\vec{c} \bullet \vec{d})$　（2）

由（1）+（2）得

$$(|\vec{c}||\vec{d}|+|\vec{a}||\vec{b}|)|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}||\vec{d}|(\vec{a}^2+\vec{b}^2)+|\vec{a}||\vec{b}|(\vec{c}^2+\vec{d}^2)$$

$$=(|\vec{a}||\vec{d}|+|\vec{b}||\vec{c}|)(|\vec{a}||\vec{c}|+|\vec{b}||\vec{d}|) \qquad (3)$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2==\frac{(|\vec{a}||\vec{d}|+|\vec{b}||\vec{c}|)(|\vec{a}||\vec{c}|+|\vec{b}||\vec{d}|)}{(|\vec{c}||\vec{d}|+|\vec{a}||\vec{b}|)}$$

同理

$$|\overrightarrow{BD}|^2=|\vec{c}||\vec{d}|(\vec{a}^2+\vec{b}^2)+|\vec{a}||\vec{b}|(\vec{c}^2+\vec{d}^2)$$

$$=\frac{(|\vec{a}||\vec{d}|+|\vec{b}||\vec{c}|)(|\vec{c}||\vec{d}|+|\vec{a}||\vec{b}|)}{(|\vec{a}||\vec{c}|+|\vec{b}||\vec{d}|)} \qquad (4)$$

由(3)×(4)得

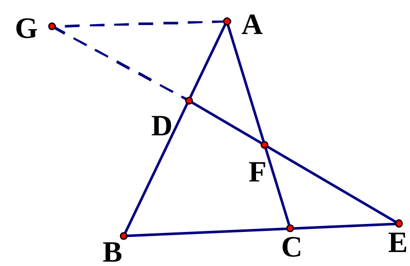
$|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{BD}|^2=(|\vec{a}||\vec{d}|+|\vec{b}||\vec{c}|)^2$，于是 $AC\times BD=AB\times CD+BC\times AD$

注：此定理的几何证法较为简单，三角法、坐标法、向量法的证明较为复杂

1443 请用向量法证明梅涅劳斯定理

若直线 DEF 与 ΔABC 三边所在的直线 AB、BC、CA 分别交于 D、E、F

则 $\dfrac{AD}{DB}\bullet\dfrac{BE}{EC}\bullet\dfrac{CF}{FA}=1$



证 1：作 AG//BC 交 DE 于点 G，

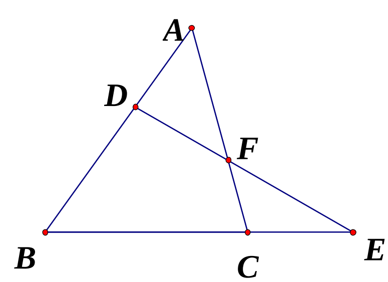
于是 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AG}{BE},\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{EC}{AG}$

故 $\dfrac{AD}{DB}\bullet\dfrac{CF}{FA}=\dfrac{AG}{BE}\bullet\dfrac{EC}{AG}=\dfrac{EC}{BE}$

于是 $\dfrac{AD}{DB}\bullet\dfrac{BE}{EC}\bullet\dfrac{CF}{FA}=1$

证 2(提问者要求用向量)：设 $\overrightarrow{AB}=\vec{e}$， $\overrightarrow{AC}=\vec{m}$

$\overrightarrow{AD}=l_1\overrightarrow{DB}$ $\quad \overrightarrow{BE}=l_2\overrightarrow{EC}$ $\quad \overrightarrow{CF}=l_3\overrightarrow{FA}$



则 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{l_1}{1+l_1}\vec{e}$ $\quad \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{1+l_3}\vec{m}$，

于是 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{1+l_3}\vec{m}-\dfrac{l_1}{1+l_1}\vec{e}$

因 $\overrightarrow{BC}=\vec{m}-\vec{e}$，故 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{l_2}{1+l_2}(\vec{m}-\vec{e})$

因 $\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{1+l_1}\vec{e}$

故 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{1+l_1}\vec{e}+\dfrac{l_2}{1+l_2}(\vec{m}-\vec{e})=\dfrac{1-l_1l_2}{(1+l_1)(1+l_2)}\vec{e}+\dfrac{l_2}{1+l_2}\vec{m}$

由于 $\overrightarrow{DF}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线

所以 $\dfrac{-\dfrac{l_1}{1+l_1}}{\dfrac{1-l_1l_2}{(1+l_1)(1+l_2)}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+l_3}}{\dfrac{l_2}{1+l_2}}$， $\dfrac{-l_1(1+l_2)}{1-l_1l_2}=\dfrac{1+l_2}{l_2(1+l_3)}$， $l_1l_2l_3=-1$

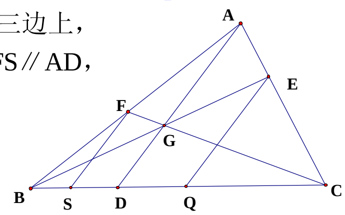
故原命题成立

1460、

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=19806&start=72&show=0

1、已知；三角形 ABC 中，D、E、F 分在三边上，且 AD、BE、CF 交于一点 G。EQ∥AD，FS∥AD，

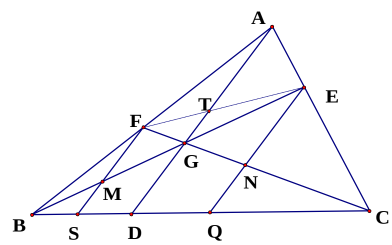
求证：$\dfrac{FS}{EQ}=\dfrac{SD}{DQ}$



证：如图，连 FE 交 AD 于点 T，

因 $\dfrac{FS}{FM}=\dfrac{AD}{AG}$， $\dfrac{EQ}{EN}=\dfrac{AD}{AG}$,故 $\dfrac{FS}{FM}=\dfrac{EQ}{EN}$

即 $\dfrac{FS}{EQ}=\dfrac{FM}{EN}$， 又 $\dfrac{FM}{EN}=\dfrac{SD}{DQ}$,于是 $\dfrac{FS}{EQ}=\dfrac{SD}{DQ}$



2、设 H 是锐角三角形 ABC 的高线 CP 上的任意一点，直线 AH，BH 分别交 BC,AC 于点 M,N,设 O 是 MN 与 CP 的交点，一条通过 O 的任意的直线交四边形 CNHM 的边于 D,E 两点，求证：$\angle DPC=\angle EPC$

证明：作 $DG\perp AB于G$， $EF\perp AB于F$

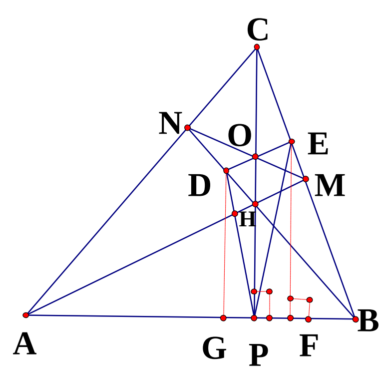
则 DG∥CP，EF∥CP，

由第 1 题的结论得 $\dfrac{DG}{EF}=\dfrac{OD}{OE}$， 又 $\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{GP}{PF}$

于是 $\dfrac{DG}{EF}=\dfrac{GP}{PF}$

所以 $\Delta DPG\backsim\Delta EPF$

故 $\angle DPG=\angle EPF$， 所以 $\angle DPC=\angle EPC$

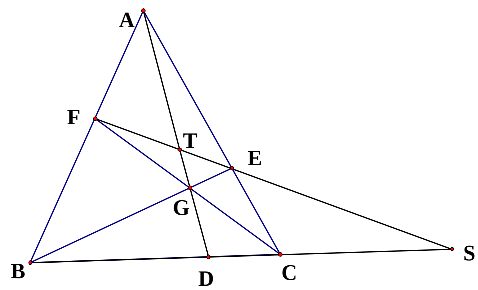


1461

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=19806&start=72&show=0

1、已知；三角形 ABC 中，D、E、F 分在三边上，

且 AD、BE、CF 交于一点 G。FE、AD 交于 T 点，



求证：$\dfrac{AT}{TG}=\dfrac{AD}{DG}$

证明：

$$\frac{AT}{TG}=\frac{AF}{FB}\bullet\frac{EB}{EG}$$

$$\frac{AD}{DG}=\frac{AB}{BF}\bullet\frac{CF}{CG}$$

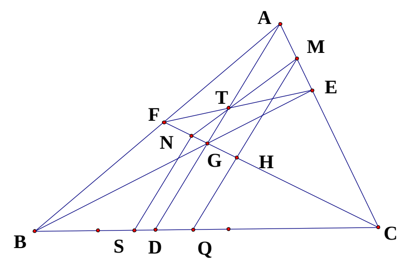
因 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{EG}{EB}\bullet\dfrac{CF}{CG}$　　故 $\dfrac{AF\bullet EB}{EG}=\dfrac{AB\bullet CF}{CG}$

所以 $\dfrac{AT}{TG}=\dfrac{AD}{DG}$

2、已知；三角形 ABC 中，D、E、F 分在三边上，

且 AD、BE、CF 交于一点 G。FE、AD 交于 T 点，MN 过 T 点

与 AC 、CF 分别交于 M、N



MQ∥AD，NS∥AD，求证：$\dfrac{NS}{MQ}=\dfrac{NT}{TM}$

证明：因 $\dfrac{NS}{GD}=\dfrac{NC}{GC}$，$\dfrac{MQ}{AD}=\dfrac{CM}{CA}$

故：$\dfrac{NS}{MQ}=\dfrac{NC}{GC}\bullet\dfrac{CA}{CM}\bullet\dfrac{GD}{AD}$，因 $\dfrac{NT}{TM}=\dfrac{NG}{GC}\bullet\dfrac{AC}{AM}$

要证原式，只要证 $\dfrac{NC}{GC}\bullet\dfrac{CA}{CM}\bullet\dfrac{GD}{AD}=\dfrac{NG}{GC}\bullet\dfrac{AC}{AM}$

即证 $\dfrac{NC}{CM}\bullet\dfrac{GD}{AD}=\dfrac{NG}{AM}\Leftrightarrow\dfrac{NC}{NG}=\dfrac{CM}{AM}\bullet\dfrac{AD}{GD}$

因为 $\dfrac{CM}{AM}=\dfrac{TG}{TA}\bullet\dfrac{NC}{NG}$，故只要证 $\dfrac{NC}{NG}=\dfrac{TG}{TA}\bullet\dfrac{NC}{NG}\bullet\dfrac{AD}{GD}$

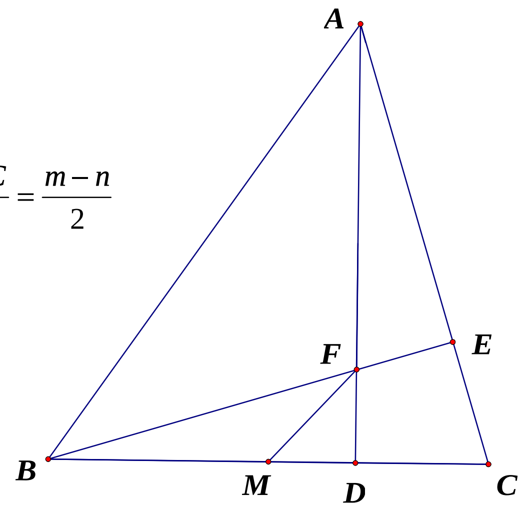
于是只要证 $\dfrac{TA}{TG}=\dfrac{AD}{GD}$ 这就是第 1 题的结论

1477、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=256186&extra=&page=1

已知：ΔABC 中，两高 AD、BE 交于 F 点，$AD = BC$，M 是 BC 中点。

求证：$FM + FD = \frac{1}{2}AD$



证法 1：设 $BD = m$，$CD = n$，则 $AD = BC = m + n$

因 $\Delta BDF \backsim \Delta ADC$

故 $\frac{FD}{DC} = \frac{BD}{AD}$，$FD = \frac{BD \bullet DC}{AD} = \frac{mn}{m+n}$

在 $Rt\Delta FMD$ 中，因 M 是 BC 中点，故 $MD = BD - \frac{BC}{2} = \frac{m-n}{2}$

于是 $FM = \sqrt{MD^2 + FD^2} = \sqrt{(\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{mn}{m+n})^2}$

$= \sqrt{(\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{mn}{m+n})^2} = \frac{m^2 + n^2}{m+n}$

所以 $FM + FD = \frac{m^2 + n^2}{2(m+n)} + \frac{mn}{m+n} = \frac{m+n}{2} = \frac{1}{2}BC$

证法 2、设 $BD = m$，$CD = n$，则 $AD = BC = m + n$

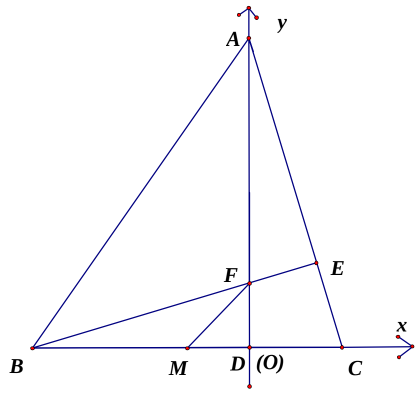
$FD = BD\tan\angle DBF = BD\tan\angle DAC = \frac{mn}{m+n}$

于是 $FM = \sqrt{MD^2 + FD^2} = \sqrt{(\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{mn}{m+n})^2}$

$= \sqrt{(\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{mn}{m+n})^2} = \frac{m^2 + n^2}{m+n}$

所以 $FM + FD = \frac{m^2 + n^2}{2(m+n)} + \frac{mn}{m+n} = \frac{m+n}{2} = \frac{1}{2}BC$

证法 3、如图建系



设 $B(-m,0)$, $C(n,0)$ $(m>0,n>0)$

于是 $|AD|=|BC|=m+n$， $A(0,m+n)$

故 $k_{AC}=-\dfrac{m+n}{n}$

于是 $k_{BC}=\dfrac{n}{m+n}=\dfrac{y_F}{m}$， $y_F=\dfrac{mn}{m+n}$

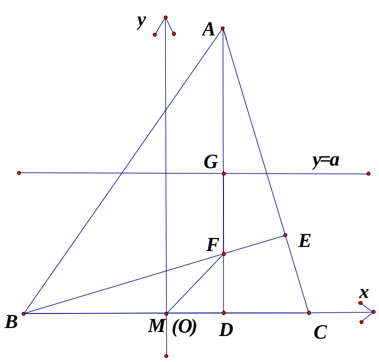
即 $|FD|=y_F=\dfrac{mn}{m+n}$， $F(0,\dfrac{mn}{m+n})$

因 M 是 BC 中点，故 $M(\dfrac{n-m}{2},0)$

故 $|FM|=\sqrt{(\dfrac{m-n}{2})^2+(\dfrac{mn}{m+n})^2}=\dfrac{m^2+n^2}{m+n}$

所以 $|FM|+|FD|=\dfrac{m^2+n^2}{2(m+n)}+\dfrac{mn}{m+n}=\dfrac{m+n}{2}=\dfrac{1}{2}|BC|$

证 4、以 M 为原点，直线 BC 为 x 轴建系，如图。



设 $B(-a,0)$, $C(a,0)$ $(a>0)$， $D(m,0)$

于是 $A(m,2a)$， $k_{AC}=\dfrac{2a}{m-a}$， 于是 $k_{BC}=\dfrac{a-m}{2a}$，

直线 BE： $y=\dfrac{a-m}{2a}(x+a)$ （1）

又因为直线 AD： $x=m$（2）

把（2）代入（1）消去 m 得动点 F 的轨迹方程是

$y=\dfrac{a-x}{2a}(x+a)$，即 $x^2=-2a(y-\dfrac{a}{2})(a>0)$

它是以原点 M 为焦点，直线 $y=a$ 为准线的抛物线

于是 $|FM|+|FD|=|FG|+|FD|=|DG|=a=\dfrac{|AB|}{2}$

1483、

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=39&topic=12985&show=0

AD 是三角形外接圆 O 的直径，PD 是切线

求证：OE=OF

分析：作 BN∥EF

只要证：BG=GN

作 OH⊥BC，则 BH=HC

于是只要证 GH∥AC

只要证$\angle GHB = \angle C = \angle ADB$

只要证 B、D、H、G 共圆

只要证$\angle GDH = \angle GBH = \angle OPH$

只要证 P、D、H、O 共圆，可证