廖老师网上千题解答分类二十七、超纲应用题

1、某工厂有容量为 300 吨的水塔一个，每天从早上 6 时起到晚上 22 时止供应该厂生活和生产用水。已知该厂生活用水 10 吨，工业用水 w(吨)与时间 t(小时，定义早上 6 时为 t=0)的函数关系式为 $w=100\sqrt{t}$，

水塔的进水量有 10 级，第一级每小时进水 10 吨，以后每提高一级，每小时的进水量增加 10 吨。若每天水塔原有水 10 0 吨，在供水的同时，打开进水管，问进水量选择第几级，既能保证该厂用水(水塔中的水不空)，又不会溢出？

解：从早上 6 点开始 t 小时的总用水量为 y 吨。

则 $y=10t+100\sqrt{t}(0\le t\le 16)$

设第 n 级的从早上 6 点开始 t 小时的供水量为 $10nt$ 吨。

依题意且 $\begin{cases}10nt+100-y>0\\10nt+100-y\le 300\end{cases}$，$\begin{cases}10nt+100-10t-100\sqrt{t}>0\\10nt+100-10t-100\sqrt{t}\le 300\end{cases}$

$-10<(n-1)t-10\sqrt{t}\le 20$ 对 $0\le t\le 16$ 恒成立

当 $n=1$ 时上式不成立，$\therefore n\ge 2$

设 $f(t)=(n-1)t-10\sqrt{t}=(n-1)(\sqrt{t}-\frac{5}{n-1})^2-\frac{25}{n-1}$ ($0\le t\le 16$)

定义域是 $0\le t\le 16$，对称轴是 $t=\frac{5}{n-1}\in(0,5)$

$\therefore$ $f(t)_{\min}=-\frac{25}{n-1}$， $f(t)_{\max}=f(16)=16n-56$，

$\therefore -\frac{25}{n-1}>-10$, 且 $16n-56\le 20$，解得 $3.5\le n\le 4.75$， $\therefore n=4$

17、工厂的质量检验车间积压着部分产品待检,与此同时,流水线传送带按一定速度送来待检验产品,如果打开一部质检机,需半个小时可使待检产品全部通过质量检验,同时打开两部质检机,只需 10 分钟便可将待检产品全部通过质量检验.现因生产需要,在 5 分钟内将待检产品全部通过质量检验,此时最少要打开几部质检机?

解：设一部质检机 1 分钟检验 1 份产品

则半个小时可使检验 30 份产品

两部质检机,只需 10 分钟可使检验 20 份产品

相减得：10 份产品，这是 20 分钟流水线传送带送来的新产品

所以，传送带 1 分钟送来新产品 0.5 份，积压着部分产品有 30-0.5×30＝15（份）

5 分钟之内要检验 15+0.5×5＝17.5

因此要用质检机 17.5÷5＝3.5（部）

答：至少要 4 部

139、某一次征兵体检中，要查清众多应征者是否带有某中传染病，查明需要通过一向成本高的血液化验，根据医学的知，带有该病的人所站的比例很小，因而采取一种叫做“群试”的方法；把从每位应征者身上抽取的血液分成两部分，一部分保存备用，另一部分分组混合在一起；混合的每组化验一次，若化验合格，则整组的应征者合格；若化验不合格，说明这组人中有带病者，进而再用备用血液逐个查明，若该市哟年 10000 名应征者，假设带病者站千分之二点五，每化验一次花费 30 元，问：平均分成多少组，群试较逐个化验节省的费用 最多？
(高考不要求)

解：设每组 n 人，

一组一次化验合格的概率是$(1-0,0025)^n=0.9975^n$

一组一次化验不合格的概率是$1-0.9975^n$

一组一次化验化费用的数学好期望是$30\times 0.9975^n+30n(1-0.9975^n)$

$\dfrac{10000}{n}$组化验化费用的数学好期望是$E=\dfrac{10000}{n}[\,30\times 0.9975^n+30n(1-0.9975^n)\,]$

$=300000\left(\dfrac{1}{n}\times 0.9975^n+1-0.9975^n\right)$

设$t=0.9975^n\left(\dfrac{1}{n}-1\right)$

$t'=0.9975^n\ln 0.9975\left(\dfrac{1}{n}-1\right)-0.9975^n\dfrac{1}{n^2}$

$=0.9975^n[\ln 0.9975\left(\dfrac{1}{n}-1\right)-\dfrac{1}{n^2}]$

$=0.9975^n[-0.0025\left(\dfrac{1}{n}-1\right)-\dfrac{1}{n^2}]$

令$-0.0025\left(\dfrac{1}{n}-1\right)-\dfrac{1}{n^2}=0$得$-0.0025n+0.0025n^2-1=0$

$$n=\frac{0.0025+\sqrt{0.0025^2++4\times 0.0025}}{2\times 0.0025}\approx 20$$

故每组 20 人，平均分成 500 组，群试较逐个化验节省的费用 最多

160、一艘轮船在航行中的燃料费和它的速度的立方成正比。已知在速度为每小时 10 公里时燃料费是每小时 6 元。而其他与速度无关的费用是每小时 96 元。问此轮船以何速度航行时，能使行使每公里的费用总和最小？

解：设速度为 x 公里/小时，每小时的燃料费燃料费是 Q 元，每公里的费用总和为 y 元

则 Q=kx^3 因当 t=10 时 Q=6

故 6=1000k，$k=\frac{3}{500}$，Q=$\frac{3}{500}x^3$

y=(Q+96)$\bullet\frac{1}{x}$= ($\frac{3}{500}x^3$+96)$\bullet\frac{1}{x}$=

$$3(\frac{1}{500}x^2+\frac{32}{x})=3(\frac{1}{500}x^2+\frac{16}{x}+\frac{16}{x})\geq 9\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{36}{5}$$

当且仅当 $\frac{1}{500}x^2=\frac{16}{x}$ 即 $x=20$ 时上式取等号

答：此轮船以 20 公里/小时速度航行时，能使行使每公里的费用总和最小

494、有一斜坡，坡角为 a 。人在坡上以固定初速度 V，与水平面夹角为 b 的方向抛球。(物理)

设球落到斜坡上的一点为 A，则 A 到人所在的竖直直线距离最大时，a 与 b 是何关系？

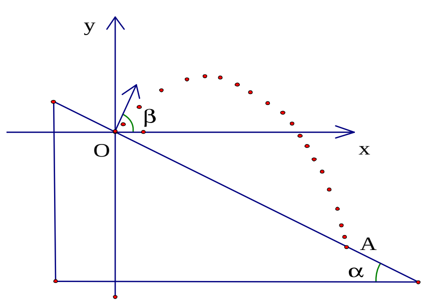

图 1

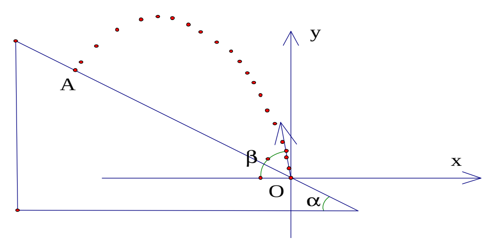

图 2

解：情况 1：自上往下抛，如图 1，的方法建立坐标系

设球在抛出时间 t 时的坐标为 (x,y)（$x<0$）

则 $x=(v\cos b)t$，$y=(v\sin b)t-\frac{1}{2}gt^2$ 消去 t 得，$y=x\tan b-\frac{g}{2v^2\cos^2 b}x^2$（1）

斜坡所在的直线方程是 $y=(-\tan a)x$（2）

由（1）（2）消去 y 得：$x\tan b-\frac{g}{2v^2\cos^2 b}x^2=(-\tan a)x$

由于 A 点的横坐标 $x\neq 0$ 因此

$\frac{g}{2v^2}x=$（$\tan b+\tan a$）$\cos^2 b=\frac{\tan b+\tan a}{1+\tan^2 b}$

设 $m=\tan b+\tan a$ 则 $\tan b=m-\tan a$

$\frac{g}{2v^2}x=$（$\tan b+\tan a$）$\cos^2 b=\frac{m}{1+(m-\tan a)^2}$

$=\frac{m}{\sec^2 a+m^2-2m\tan a}=\frac{1}{\frac{\sec^2 a}{m}+m-2\tan a}\le\frac{1}{2\sqrt{\sec^2 a}-2\tan a}$

$=\frac{1}{2\sec a-2\tan a}$，故 $x\le\frac{v^2}{\sec a-\tan a}$，当且仅当 $\frac{\sec^2 a}{m}=m$ 即 $m=\sec a$ 时上式取等号此时 $m=\tan b+\tan a=\sec a$ 即 $\tan b=\sec a-\tan a$

情况 2：自下往下抛，用如图 2，的方法建立坐标系

$x=(-v\cos b)t$， $y=(v\sin b)t-\frac{1}{2}gt^2$ 消去 t 得， $y=-x\tan b-\frac{g}{2v^2\cos^2 b}x^2$（1）

斜坡所在的直线方程是 $y=(-\tan a)x$（2）

由（1）（2）消去 y 得：$-x\tan b-\frac{g}{2v^2\cos^2 b}x^2=(-\tan a)x$

由于 A 点的横坐标 $x\neq 0$ 因此

$-\frac{g}{2v^2}x=$（$\tan b-\tan a$）$\cos^2 b=\frac{\tan b-\tan a}{1+\tan^2 b}$

设 $m=\tan b-\tan a$ 则 $\tan b=m+\tan a$

$-\frac{g}{2v^2}x=$（$\tan b-\tan a$）$\cos^2 b=\frac{m}{1+(m+\tan a)^2}$

$=\frac{m}{\sec^2 a+m^2+2m\tan a}=\frac{1}{\frac{\sec^2 a}{m}+m+2\tan a}\le\frac{1}{2\sqrt{\sec^2 a}+2\tan a}$

$=\frac{1}{2\sec a+2\tan a}$，故 $-x\le\frac{v^2}{\sec a+\tan a}$，当且仅当 $\frac{\sec^2 a}{m}=m$ 即 $m=\sec a$ 时上式取等号此时 $m=\tan b-\tan a=\sec a$ 即 $\tan b=\sec a+\tan a$

534、某运动会开了 n 天 ，共发出 m 枚奖牌：第一天发出 1 枚加上余下的 1/7 ，第二天发出 2 枚加上余下的 1/7；如此持续了 n-1 天，第 n 天发出 n 枚. 问该运动会开了几天，共发了几枚奖牌. (数列)

解 1：设原奖牌数为 a_1，第一天发出奖牌后余下 a_2 枚奖牌，第一天发出奖牌后余下 a_3 枚奖牌，……

则 $a_2=\frac{6}{7}(a_1-1)$， $a_3=\frac{6}{7}(a_2-2)$，一般地 $a_{n+1}=\frac{6}{7}(a_n-n)$

$a_{n+1}+6(n+1)-42=\frac{6}{7}(a_n+6n-42)$

于是数列 $\{a_n+6n-42\}$ 是等比数列公比为 $\frac{6}{7}$， 首项为 $a_1+6-42=m-36$

$a_n+6n-42=(m-36)(\frac{6}{7})^{n-1}$

因为 $a_n=n$ 所以 $n+6n-42=(m-36)(\frac{6}{7})^{n-1}$

$7n-42=(m-36)(\frac{6}{7})^{n-1}$

$7^n(n-6)=(m-36)6^{n-1}$

于是 $n=6,m=36$

677、一列队伍长 100 米，正在行进。传令兵从队伍末端到排头传令，又返回队伍末端，期间没有停留。这段时间里队伍前进了 100 米。已知队伍和传令兵的移动速度保持不变，问传令兵共跑了多少米？(初中方程)

解：设传令兵的速度为 x，队伍的速度为 y, $\frac{x}{y}=t$

则传令兵从末端到前端用时 $\frac{100}{x-y}$，传令兵从前端到末端用时 $\frac{100}{x+y}$

总时间 $\frac{100}{x-y}+\frac{100}{x+y}=\frac{100}{y}$， $\frac{y}{x-y}+\frac{y}{x+y}=1$

$\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}=1$，解得 $t=1+\sqrt{2}$

传令兵所走的路程 $(\frac{100}{x-y}+\frac{100}{x+y})x=100(\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y})$

$=100(\frac{1}{1-\frac{1}{t}}+\frac{1}{1+\frac{1}{t}})=100t(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1})=100t=100(1+\sqrt{2})$

690、用 n 元人民币购买报纸或杂志,规定每天只能用以下三种方式之一购买（１）购买１元一份的报纸１份　（２）买２元一份报纸一份（３）买２元杂志一本，且每天必须购买．记用完 n 元人民币的方式种数为 A n(数列)

解：（1） $a_1=1$， $a_2=2+1=3$， $a_3=5$

（2）记１元一份的报纸为 A，２元一份的报纸为 B， ２元杂志一本为 C

当 $n\ge 3$ 时， n 元的使用方法数可分为两类

第一类，先买报纸 A，再用 $n-1$ 元，用法数为 a_{n-1}

第二类，先先买 B 或 C，再用 $n-2$ 元，用法数为 $2a_{n-2}$

故 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$

（3） $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ 的特征方程是 $x^2-x-2=0$， $x_1=2,x_2=-1$

于是 $a_n=a\bullet 2^{n-1}+b(-1)^{n-1}$

因 $a_1=1$， $a_2=-1$ 代入求出 $a=\frac{4}{3}$， $b=-\frac{1}{3}$

因此 $a_n=(\frac{4}{3})\bullet 2^{n-1}+(-\frac{1}{3})(-1)^{n-1}$

故 $a_{100}=(\frac{4}{3})\bullet 2^{99}+(-\frac{1}{3})(-1)^{99}=(\frac{4}{3})\bullet 2^{99}+\frac{1}{3}$

844、一电台某天有 n 次插播广告的时间，一共插播了 m 条广告，第一次播了一条以及剩下的广告的 $\frac{1}{8}$，第二次播了 2 条以及剩下的 $\frac{1}{8}$，以后都按此规律播放广告，在最后一次即第 n 次播放了最后 n 条广告（n>1）(数列) (竞赛)

求：这一天有几次播放广告的时间？并求出广告条数？

解法:、

第 0 次插播后剩下 $a_0=m$

第 1 次插播后剩下 $a_1=m-1-\frac{1}{8}(m-1)=\frac{7}{8}(m-1)$ 条

第 2 次插播后剩下 $a_2=a_1-2-\frac{1}{8}(a_1-2)=\frac{7}{8}(a_1-2)$ 条

第 3 次插播后剩下 $a_3=a_2-3-\frac{1}{8}(a_2-3)=\frac{7}{8}(a_2-3)$ 条

……

第 n 次插播后剩下 $a_n=\frac{7}{8}(a_{n-1}-n)$ 条

于是 $a_n+7n-49=\frac{7}{8}[a_{n-1}+7(n-1)-49]$

$a_n+7n-49=(m-49)(\frac{7}{8})^n, a_n=(m-49)(\frac{7}{8})^n+7(7-n)$

令 $a_n=0$ 得， $m=49,n=7$

求：这一天有 7 次播放广告的时间,广告有 49 条

858、德•梅齐里亚克的法码问题

一位商人有一个 40 磅的砝码，由于跌落在地而碎成 4 块.后来，称得每块碎片的重量都是整磅数，而且可以用这 4 块来称从 1 至 40 磅之间的任意整数磅的重物．问这 4 块砝码碎片各重多少？

问题：用尽量少的质量为整数的砝码，称出尽量多的从 1 开始的整数质量。

讲解：设砝码数为 n，砝码数为 n 时能称的最大质量为 T_n，不妨设质量单位为克。

(1) 当 n=1 时，要称出尽量多的从 1 克开始的整数质量，这一快砝码的质量只能为 1 克，故 T_1=1 克

（2）当 n=2 时

若新增砝码的质量为 1 克，只能称 1 克，2 克

若新增砝码的质量为 2 克，只能称 1 克，2 克、3 克

若新增砝码的质量为 3 克，就能能称 1 克，2 克、3 克、4 克

（注 2 克的称法：把 1 克与 3 克的法码一个放一边，左边少了两克，放入 2 克的重物恰好平衡）

若新增砝码的质量为 4 克，就无法称 2 克的物体了

于是当当 n=2 时 T_2=4 克，设当 n=2 时新增的砝码质量为 a_2 克，则

a_2 ＝3 克， a_1 ＝1 克

下面类似。

总之新增的法码的能称出前面的总重量加上 1 克，并且质量 a_n 尽可能大。

（3）当 n=3 时

由于当 n=2 时，T_2=4 克

因此新增砝码 a_3 与 a_1， a_2 合作应能称 5 克，且使 a_3 尽可能大，于是 $a_3-4=5$，

得 $a_3=4\times2+1=9$ 克

这样我们就能称 5 克，6 克，到 $T_3=9+4=13$ 克，中的任何一个整数质量了

（4）当 n=4 时，同理新增砝码为 a_4，要有 $a_4-T_3=T_3+1$，故 $a_4=2T_3+1=27$ 克

，能称的最大质量是 $T_4=a_4+T_3=40$ 克

（5）易知 $a_5=2T_4+1=81$， $T_5=a_5+T_4=121$

932、问题：设时钟的时针在 2—3 点之间，时针和分针什么时候会重合？
解：以刻度 12 为标准，设在 2 点 x 分两针重合，此时分针转过 $6x$ 度，而时针转过 $30(2+\frac{x}{60})$ 度，所以 $6x=30(2+\frac{x}{60})$，所以 $x=\frac{120}{11}$

为什么题上说时针转过 $(2+\frac{x}{60})$ 度呢，不理解

答：分针 60 分钟转 360 度，1 分钟就转 360 度/60＝6 度，x 分转 6x 度

时针 1 小时转 30 度，也就是 60 分钟转 30 度，1 分钟就转 $\frac{30度}{60}=\frac{1}{2}$ 度，

x 分转 $\frac{1}{2}x$ 度

因为在 2 点的时候，时针已经在 60 度的位置上。

所以要使时针和分针重合，就得有 6x＝60+$\frac{1}{2}x$

1055、“回归”这个词是由美国著名的统计学家 Francils Galton 提出来的。1889 年，他在研究祖先与后代身高之间的关系时发现，身材较高的父母，他们的孩子也较高但这些孩子的平均身高并没有他们的父母的平均身高高，身材较矮的父母，他们的孩子也较矮但这些孩子的平均身高却比他们的父母的平均身高高。Galton 把这种后代的身高向中间值靠近的趋势称为“回归现象”，人们把一个变量的变化去推测另一个变量的变化的方法称回归方法。

根据上述结论，在儿子的身高 y 与父亲的身高 x 的回归方程 y=bx+a 中，b 的取值范围是（　　）

A(-1,0)　　B0　　C(0,1)　　D[1,+¥)

解：依上面的解释，可设 $x\in(m,n)$

当 $x\to n$ 时 $y-x<0$，当 $x\to m$ 时 $y-x>0$，于是估计，存在 $t\in(m,n)$

使得当 $x\in(m,t)$ 时 $y-x>0$，当 $x\in(t,n)$ 时 $y-x<0$

于由 $y-x=x(b-1)+a$ 是 x 的一次函数，且在区间 $x\in(m,t)$ 时 $y-x$ 值为正

在 $x\in(t,n)$ 时 $y-x$ 值为负，于是 $x(b-1)+a$ 递减，$b-1<0$，$b<1$，

若 $b=0$，则 y=bx+a＝a 与题意不符
若 $b<0$，则 y=bx+a 是减函数。与父母高者子女高相矛盾，舍去
于是，$0<b<1$