廖老师网上千题解答分类二十八、大纲离散

2、请问 R 属不属{R}呢？

答： R 是集合{R}的元素， R 属于{R}

31、已知 x^2 属于{0,1,x},求实数 x 的值

解：$x^2\in\{0,1,x\}$

$x^2=0$，或 $x^2=1$，或 $x^2=x$

①当 $x^2=0$ 时，则 x=0，{0,1,x}={0,1,0}与集合中元素是互异的相矛盾，舍去

②当 $x^2=1$ 时，则 x=±1，

在 x=1 时{0,1,x}={0,1,1}集合中元素是互异的相矛盾，舍去

③当 $x^2=x$ 时，则 x=1 或 x=0 与集合中元素是互异的相矛盾，舍去

综上 x=-1

说明：上高中后解数学题目要有用具体数字进行试验，对各种可能性进行列举的想法法

45、若集合 P={x┃x=3m+1,m∈N}，Q={x┃x=5n+2,n∈N}，求 P∩Q.

解：集合 P 表示被 3 除余 1、即 3 个 3 个数余 1 个

集合 Q 表示被 5 除余 2、即 5 个 5 个数余 2 个

先写下 1、然后加 3 得 4、再加 3 得 7、被 5 除余 2

被 3 除余 1，同时 5 除余 2、的自然数最小一个是 7

因此，P∩Q.={x┃x=15m+7,m∈N}

59、已知 A={x|x=2k+1,k∈Z},B={x|x=k+3,k∈Z},则 A∩B=？ A∪B=？

解：B={x|x=k+3,k∈Z}=Z， ∵A⊆Z

∴A∩B= A ={x|x=2k+1,k∈Z}， A∪B= Z

61、已知 S={a,b}， *A* Í *S*，则 A 与 C_SA 的所有有序组对共有

A.1 组 B.2 组 C.3 组 D.4 组

问：这题什么意思啊，有序组对是什么意思？

解答（1）有序组对的意思：

例如 A={a}，则 C_S A={b}

故 A 与 C_SA 的所有序组对有：（{a}，{b}），（{b}，{a}）

（2）解本题只要列举就行了

因为 A 是 S 的子集

所以 A＝φ或 A={a}或 A={b}或 A={a,b}

当 A＝φ时有序组对有（φ，{a,b}），（{a,b},φ）

当 A＝{a}时有序组对有（{a}，{b}），（{b}，{a}）

当 A＝{b}时有序组对有（{b}，{a}），（{a}，{b}）

当 A＝{a,b}时有序组对有（{a,b},φ），（φ，{a,b}）

注意到这里不同的有序组对只有（φ，{a,b}），（{a}，{b}），（{b}，{a}），（{a,b},φ）有 4 组，于是选 D

71、M={x|x=12m+8n，m、 n I Z}

N={x|x=20p+16q，p 、q I Z}

求 M 与 N 的关系

解：N 中的任意元素 x=20p+16q,=4(5P+4q)= 4[3P+2(P+2q)]
=12P+8(P+2q）是 M 的元素
但 M 中的元素 x=12×1+8×2＝28＝20×1+8 不在 N 中，
故 N 是 M 的真子集

232 、命题 p：四边相等的四边形是正方形。 假命题：如菱形
命题 P 的否定：四边相等的四边形不是正方形。假命题：不用解释吧
但是大家都知道原命题和它的否定的真假性相反
请问问题出在哪儿？
答：命题 p：四边相等的四边形是正方形。
这个命题是一个全称命题，它的完整意思是：所有的四边相等的四边形都是正方形。
“所有，都是”的界定所述对象的范围的词。在很多命题叙述中常常省略不写。例如，命题：“福建人是中国人”。就是一个全称命题他的原意是：“所有福建人都是中国人”。我们用前面的说法就清楚地表达了后意思。象这样既能够保证语言的准确性又能够体现语言的简捷性的表达方式是我们常用的方法。
很明显“所有福建人都是中国人”。的否定是“有些福建人不是中国人”
因此，对 “所有 A，都是 B”的否定应该是“有些 A，不是 B”
简捷的表达有：”A 不都是 B”。
命题 p：四边相等的四边形是正方形。
命题非 p：四边相等的四边形不都是正方形。

249、问题 1：人教版的高中数学第一册（上）P30 例 1 第（2）小题

（2）正方形的四条边相等

教材给出的它的逆否命题是：

若一个四边形的四条边不相等，则它不是正方形

原命题中正方形的四条边相等包含 四边形的四条边全相等

所以这道题的逆否命题应该是： 四边形的四条边不全相等

问题 2：正数不一定是负数的平方

这个命题的非 p 形式为什么？ 即“不一定”的反面是什么？

以上两个问题，请教大家，错误请大家指正
答：
问题 1、教材中“四条边不相等”的意思就是“四条边不全相等”

回答：“若一个四边形的四条边不全相等，则它不是正方形”
更准确

问题 2、“不一定”的否定就是“一定”
“正数不一定是负数的平方”
的非命题是：“正数一定是负数的平方”

463、已知集合 A={1,2,3,k},集合 B={4,7,a^4,a^2+3a}且 a 属于 N,k 属于 N,
x 属于 A,y 属于 B,映射 f:x→y=3x+1.求 a 及 k 的值. (函数)
解：因 f:x→y=3x+1
故象集是 C=={4,7,10,3k+1 }$\subseteq$B={4,7,a^4,a^2+3a}
因 a^4=10 在 a$\in$N 上无解
故,a^2+3a=10（1），且 a^4＝3k+1（2）
由（1）得 a＝2，代入（2）得 k＝5

563、(1) “如果-2≤x<3,则(x+2)(x-3)<0” (逻辑)
这个命题对吗？
答：这是一个假命题
因为当 $x=-2$ 时(x+2)(x-3)=0

593、命题 p：“方程 $x^2=1$ 的根是 1”

命题 q：“方程 $x^2=1$ 的根是-1”

问：命题 p 或 q 的真假(逻辑)
答：因为

命题 p：“方程 $x^2=1$ 的根是 1”　是假命题

命题 q：“方程 $x^2=1$ 的根是-1”　是假命题

所以，命题 p 或 q 是假命题

注意：命题 p 或 q 是：“方程 $x^2=1$ 的根是 1 或方程 $x^2=1$ 的根是-1”

不是“方程 $x^2=1$ 的根是 1 或-1”，后者是真命题

595、设 $f(x)=x^2-x+\frac{1}{2}$ 的定义域为[n,n+1](n 属于正整数),则 f(x)的值域中所含整数的个数是? (函数) (数论) (竞赛)

分析：（1）求 $f(x)=x^2-x+\frac{1}{2}\ (n\le x\le n+1)$ 的值域

$f(x)=x^2-x+\frac{1}{2}$ 的对称轴是 $x=\frac{1}{2}$

因此 $f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上递增，值域为 $[n^2-n+\frac{1}{2},(n+1)^2-(n+1)+\frac{1}{2}]$

（2）看特殊情况：
区间[2.5,3.5]内有 1 个整数，1＝3.5-2.5
区间[2.5,4.5]内有 2 个整数，2＝4.5-2.5

（3）区间 $[n^2-n+\frac{1}{2},(n+1)^2-(n+1)+\frac{1}{2}]$ 内有

$(n+1)^2-(n+1)+\frac{1}{2}-(n^2-n+\frac{1}{2})=2n+1-1=2n$ 个整数

815、M={x|x=cos$\frac{5mp}{12}$， m∈ N+}，N={x|x=cos$\frac{np}{12}$， n∈ N+ }

则 M，N 的关系如何，并证明(集合映射)

解：M＝N

证明：N={x|x=cos$\frac{np}{12}$， n∈ N+ }

＝{ cos$\frac{0p}{12}$，cos$\frac{p}{12}$，cos$\frac{2p}{12}$，cos$\frac{3p}{12}$ ，cos$\frac{4p}{12}$， cos$\frac{5p}{12}$， cos$\frac{6p}{12}$ ，cos$\frac{7p}{12}$，cos$\frac{8p}{12}$，cos$\frac{9p}{12}$，cos$\frac{10p}{12}$，cos$\frac{11p}{12}$，cos$\frac{12p}{12}$}

M={cos$\frac{0p}{12}$，cos$\frac{5p}{12}$，cos$\frac{10p}{12}$，cos$\frac{15p}{12}$ ，cos$\frac{20p}{12}$， cos$\frac{25p}{12}$， cos$\frac{30p}{12}$ ，cos$\frac{35p}{12}$， cos$\frac{40p}{12}$，cos$\frac{45p}{12}$，cos$\frac{50p}{12}$，cos$\frac{55p}{12}$，cos$\frac{60p}{12}$ }

＝{cos$\frac{0p}{12}$，cos$\frac{5p}{12}$，cos$\frac{10p}{12}$，cos$\frac{9p}{12}$ ，cos$\frac{4p}{12}$，cos$\frac{1p}{12}$， cos$\frac{6p}{12}$ ， cos$\frac{11p}{12}$，cos$\frac{8p}{12}$，cos$\frac{3p}{12}$，cos$\frac{2p}{12}$，cos$\frac{7p}{12}$，cos$\frac{12p}{12}$ }

于是 M＝N

参考方法

（1）用三角函数线感觉，

（2）由 5 与 12 互质可得集合 A={x|x=n ,n∈ N+ }与 B={x|x=5n ,n∈ N+ }对 12 的剩余类都是 12 类

861、求 $(1+2x)(1+4x)\mathbf{L}(1+2^n x)$ 中含 x^2 的项

解：x^2 项＝$2\times4+2\times8+\mathbf{L}+2\times2^n+4\times8+4\times16+\mathbf{L}+4\times2^n+\mathbf{L}+2^{n-1}\times2^n$

＝$2^3(2^{n-1}-1)+2^5(2^{n-2}-1)+2^7(2^{n-3}-1)+\mathbf{L}+2^{2n-1}(2^{n-n+1}-1)$

$=2^{n+2}+2^{n+3}+2^{n+4}+\mathbf{L}+2^{2n}-(2^3+2^5+\mathbf{L}+2^{2n-1})$

＝$2^{n+2}(2^{n-1}-1)-\frac{2^3(4^{n-1}-1)}{3}$＝$2^{2n+1}-2^{n+2}-\frac{1}{3}\bullet2^{2n+1}+\frac{8}{3}$

＝$\frac{1}{3}\bullet2^{2n+2}-2^{n+2}+\frac{8}{3}$

解 2：x^2项＝$2\times4+2\times8+\mathbf{L}+2\times2^n+4\times8+4\times16+\mathbf{L}+4\times2^n+\mathbf{L}+2^{n-1}\times2^n$

＝$\frac{(2+4+8+\mathbf{L}+2^n)^2-(2^2+4^2+\mathbf{L}+2^{2n})}{2}$

＝$\frac{[2(2^n-1)]^2-\frac{2^2(4^n-1)}{3}}{2}=\frac{1}{3}\bullet2^{2n+2}-2^{n+2}+\frac{8}{3}$

863、求 $(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(20+x)$ 中含 x^{18} 的项

解： x^{18} 项＝$(1\times2+1\times3+\cdots+1\times20)+(2\times3+2\times4+\cdots+2\times20)+\cdots+(19\times20)$

$$=\frac{(1+2+\cdots+20)^2-(1^2+2^2+\cdots+20^2)}{2}$$

$$=\frac{210^2-\dfrac{20\times21\times41}{6}}{2}=20615$$

940、三角形边长为整数,最大边长为 11,问这样的三角形有多少个?
讲解：要注意穷举的分类标准，及协调性

设三边长分别为 x,y,z， $x\ge y\ge z$ 则 $x=11$， $y+z>x$

当 $y=11$ 时 $z=11$， $z=10$， $z=9$，……， $z=1$　　有 11 种

当 $y=10$ 时， $z=10$， $z=9$，……， $z=2$　　有 9 种

当 $y=9$ 时， $z=9$， $z=8$，……， $z=3$　　有 7 种

当 $y=8$ 时， $z=8$， $z=7$，……， $z=4$　　有 5 种

当 $y=7$ 时， $z=7$， $z=6$， $z=5$　　有 3 种

当 $y=6$ 时， $z=6$，　　有 1 种

于是共有 11+9+7+5+3+1＝36

985、(数论)

设 a,b,c,d 是正有理数， $\sqrt{c},\sqrt{d}$ 是无理数

求证： $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 无理数

证明：假设 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是有理数 m， 即 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ =m

则 $a\sqrt{c}=m-b\sqrt{d}$ ， 平方得 $a^2c=m^2+b^2d-2mb\sqrt{d}$

于是 $\sqrt{d}=\dfrac{m^2+b^2d-a^2c}{2mb}$ 也是有理数与 $\sqrt{c}$ 是无理数相矛盾

因此 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是无理数

1099、在 1，2，3……100 中任意取三个数字构成等差数列，有几种不同的排法？？
解 1：先研究递增等差数列
首项为 1：等差中项可从 2 取到 50，共可组成 49 个等差数列
首项为 2：等差中项可从 3 取到 51，共可组成 49 个等差数列
首项为 3：等差中项可从 4 取到 51，共可组成 48 个等差数列
首项为 4：等差中项可从 5 取到 52，共可组成 48 个等差数列
首项为 5：等差中项可从 6 取到 52，共可组成 47 个等差数列
首项为 6：等差中项可从 7 取到 53，共可组成 47 个等差数列
首项为 7：等差中项可从 8 取到 53，共可组成 46 个等差数列
首项为 8：等差中项可从 9 取到 54，共可组成 46 个等差数列
……
由以上规律可知
首项为 1、3、5、…97 的递增等差数列的个数有
$49+48+\cdots\cdots+1=\frac{50\times 49}{2}=25\times 49$
首项为 2、4、6、…98 的递增等差数列的个数有
$49+48+\cdots\cdots+1=25\times 49$
再添上第减数列
于是共有 $25\times 49\times 4=4900$ 个
解 2：
中项为 2：有 1×2 个
中项为 3：有 2×2 个
中项为 4：有 3×2 个
中项为 5：有 4×2 个
……
中项为 49：有 48×2 个
中项为 50：有 49×2 个
中项为 51：有 49×2 个
中项为 52：有 48×2 个
……

中项为 97：有 3×2 个
中项为 98：有 2×2 个
中项为 99：有 1×2 个
(1+2+3+…+49)×4=4900

1177、在一次足球赛中，某小组共有 5 个球队进行双循环(每队之间赛两场)，已知胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，积分多的前两名可出线(积分相等则要比净胜球数或进球总数)，赛完后，一个队的积分可出现的不同情况种数为(　　)

A、22　B、23　C、24　 D、25

解 1：只考察平与胜的场数

（1）平 0 场

胜 0 得 0 分，胜 1 场得 3 分，胜 2 场得 6 分，……，胜 8 场得 24 分，

（2）平 1 场

胜 0 得 1 分，胜 1 场得 4 分，胜 2 场得 7 分，……，胜 7 场得 22 分

（3）平 2 场

胜 0 得 2 分，胜 1 场得 5 分，胜 2 场得 8 分，……，胜 6 场得 20 分

（4）平 3 场

胜 0 得 3 分，胜 1 场得 6 分，胜 2 场得 9 分，……，胜 5 场得 18 分

（5）平 4 场

胜 0 得 4 分，胜 1 场得 7 分，胜 2 场得 10 分，……，胜 4 场得 16 分

（6）平 5 场

胜 0 得 5 分，胜 1 场得 8 分，胜 2 场得 11 分，胜 3 场得 14 分

（6）平 6 场

胜 0 得 6 分，胜 1 场得 9 分，胜 2 场得 12 分

（7）平 7 场

胜 0 得 7 分，胜 1 场得 10 分，

（8）平 8 场

胜 0 得 8 分

从（4）——（8）的分数在（1）——（3）都算了

于是共有 9+8+7＝24 种分数

解 2、在 0——24 分中，只有 23 分不可能于是共有 24 种分数

1211、（1）某校三年级(共 2 班)的学生排队,每排都 5 人,3 人或 7 人,最后一排却只有 2 人,这个学校 3 年级有多少人?

解：（1）三年级的人数减去 2 是既是 5 的倍数，也是 3 的倍数，同时是 7 的倍数

于是三年级的人数减去 2＝5×3×7=105 人

所以三年级的人数＝5×3×7=105+2＝107 人

（2） 四年级中,四(1)班 48 人,2 班 56 人,要把他们按班级分成人数相等的体育锻炼小组,每组最多有几人? 每个班个可分几组?

解：求出 48 与 56 的最大公约数为 8

于是每组最多有 8 人，

四(1)班可分为 48÷８＝６组，　四(２)班可分为５６÷８＝７组

1304
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=13091&start=12&show=0

已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$, $N=\{a,aq,aq^2\}$,其中 a≠0,且 M=N,求 q 的值

解：因为 $M=N$

故(1) $\begin{cases} a+d=aq \\ a+2d=aq^2 \end{cases}$ 或(2) $\begin{cases} a+d=aq^2 \\ a+2d=aq \end{cases}$

由(1)得 $q=1$，则 $N=\{a,a,a\}$ 与元素互异矛盾，舍去

由(2)得 $q=1$或$-\frac{1}{2}$，综上 $q=-\frac{1}{2}$

1316
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22008&start=0&show=50

用长度分别为 2,3,4,5,6(单位：cm)的 5 根细木棒围成一个三角形(允许连接，不许折断)，能够得到的三角形的最大面积为(　　)

A、$8\sqrt{5}cm^2$　　B、$6\sqrt{10}cm^2$　　C、$3\sqrt{55}cm^2$　　D、$20cm^2$

讲解：

1：作为选择题，可直接感觉三边越接近时面积越大，于是三边长分别是 6,7,7 时面积最大，最大值是$6\sqrt{10}$

2：更严密的解释，当一个三角形一边固定，另两边和也固定时，则以固定边为底边的等腰三角形面积最大

如图：AB 固定，CA+CB 固定，C 点的轨迹（椭圆）如图，易知，当|CA-CB|,越小时高越大，当 C 运动到 Q 时，高最大，于是面积最大

周长 2+3+4+5+6=20,于是

以 2 为底边，另两边和=18，另两边为 9 时,面积最大

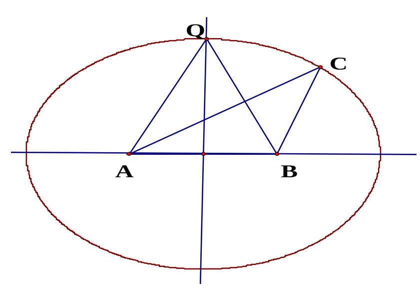
以 9 为底边，另两边和=11，另两边为 6 与 5 时,面积最大

以 6 为底边，另两边和=14，另两边为 7 时,面积最大

以 7 为底边，另两边和=13，另两边为 7 与 6 时,面积最大

可见至此不能调整了

于是面积最大的三角形三边分别是 6,7,7



1336、
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22548&start=0&show=0

用数学归纳法证明: $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ 能被 $x+y$ 整除.

证明：当 $n=1$ 时， $x^{2n-1}+y^{2n-1}=x+y$ 能被 $x+y$ 整除

假设当 $n=k$ 时 $x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除

因为 $x^{2k+1}+y^{2k+1}=x^{2k+1}+x^2y^{2k-1}-x^2y^{2k-1}+y^{2k+1}$

$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-y^{2k-1}(x^2-y^2)$

$x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})$和$y^{2k-1}(x^2-y^2)$ 都能被 $x+y$ 整除

所以 $x^{2k+1}+y^{2k+1}$ 也能被 $x+y$ 整除

于是当 $n=k+1$ 时 $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ 能被 $x+y$ 整除.

由数学归纳法原理得，当$n\in N^{+}$时，$x^{2n-1}+y^{2n-1}$ 总能被 $x+y$ 整除