廖老师网上千题解答分类二十八、超纲离散

83、函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\in P, \\ -x, x\in M, \end{cases}$ 其中 P，M 为实数集 R 的两个非空子集，又规定 f(P)={y|y=f(x),x∈P}，f(M)={y|y=f(x),x∈M}.给出下列四个判断：

①若 P∩M=∅，则 f(P)∩f(M)= ∅；

②若 P∩M≠∅，则 f(P) ∩f(M)≠∅；

③若 P∪M=R，则 f(P)∪f(M)=R；

④若 P∪M≠R，则 f(P) ∪f(M)≠R.

其中正确判断有

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

解：①的反例：取 P={1}，M={-1}，f(P)= {1}，f(M)= {1}

f(P)∩f(M)= {1}≠∅

③的反例：取 P=[0，+∞）M=（-∞，0），f(P)= [0，+∞），f(M)= (-∞，0）

但 f(P)∪f(M)= [0，+∞）≠R

②的证明

若 P∩M≠∅，设 $a\in$P∩M，则 f(a)= a =-a，故 a =0

因此 0∈f(P)，0∈f(M)，故 f(P) ∩f(M)≠∅

④的证明：因 P∪M≠R 故存在实数 $a\notin$ P∪M，

假设 f(P) ∪f(M)＝R，则 a∈f(P)∪f(M)

若 a∈f(P)则 a∈P 与 $a\notin$ P∪M 矛盾

故 a∈f(M)，因此-a∈M，由于 $a\notin$ P∪M 故 a≠0

又由于 P∩M 的元素只能是 0

故-$a\notin$ P⇒-$a\notin$ f(P) ⇒-a∈f(M) ⇒a∈M 与 $a\notin$ P∪M 矛盾

综上②④正确，选 B

89、已知 f(x)=x^2+ax+b（a、b∈R），且 A={x┃x=f(x)}，B={x┃x=f[f(x)]}，则

(A)A 是 B 的子集

(B)B 是 A 的子集

(C)A=B

(D)B 是 A 的真子集

解：设 x_0∈A={x┃x=f(x)}则 x_0=f(x_0)，f(x_0)=f(f(x_0))，x_0=f(f(x_0)), x_0∈B={x┃x=f[f(x)]}

选 A

165、被 2 整除余 1, 被 5 整除余 2, 被 7 整除余 3, 被 9 整除余 4 的正整数组成的集合是什么?（竞赛）

解：利用中国剩余定理，

找被 5、7、9 整除, 被 2 整除余 1 的数，5×7×9=315

找被 2、7、9 整除，被 5 除余 1 的数，2×7×9=126

找被 2、5、9 整除，被 7 除余 1 的数， 2×5×9×(-1)=-90

找被 2、5、7 整除，被 9 除余 1 的数， 2×5×7×4=280

于是所求的集合是

$$\{x \mid x = 315+126 \times 2 - 90 \times 3 + 280 \times 4 + k \times 2 \times 5 \times 7 \times 9, k \in Z\}$$
$$= \{x \mid x = 1471 + 630k, k \in Z\} = \{x \mid x = 1471 + 630k, k \in Z\}$$
$$= \{x \mid x = 157 + 630k, k \in Z\}$$

169、被 2 整除余 1,被 5 整除余 2,被 7 整除余 3,被 9 整除余 4 的正整数组成的集合是什么?(竞赛)

解（用一个土方法）

9 除余 4 最小正整数为 4，∵4+若干个 9 结果仍被 9 除余 4

4 被 7 整除余 4，9 被 7 整除余 2，

∴4+9×3＝31 被 9 整除余 4，且被 7 除余 3

∵31+若干个 63 结果仍被 9 除余 4，且被 7 除余 3

31 被 5 整除余 1，63 被 5 整除余 3

∴31+63×2＝157 被 9 整除余 4，被 7 除余 3，且被 5 除余 2

显然 157 被 2 除余 1

故所求集合为 $\{x \mid x = 157 + 630k, k \in z\}$

170、参加数学课 22 人，物理 18 人，化学式 16 人，至少参加一种的有 36 人，则三门都参加至多有多少人? (竞赛)

解；设参加两种的分别有 x 人、y 人、z 人,三种都参加的 t 人

则由容斥原理得　36＝22+18+16-x-y-z+t

x+y+z＝20+t

x≥t,y≥t,z≥t ，x+y+z≥3t，20+t≥3t，t≤10 三项都参加的至多 10 人

224、判断命题“若 a 、a+10 和 a+14 都是正质数，则 a=3”的真假，并说明理由(竞赛)
答：这是个真命题题
若 a ,a+10 和 a+14 都是正质数，由于 0，10，14 被 3 除的余数分别为 0，1，2
因此（1）若 a 被 3 除的余数为 1，则 a+14 不是质数
（2）若 a 被 3 除的余数为 2，则 a+10 不是质数
（3）若 a 被 3 除的余数为 0，则 a 为 3 的倍数，又 a 是质数,故 a 等于 3, 故命题成立

269、甲乙丙三人，丙的生日是 X 月 Y 日
甲乙都知道丙的生日是以下 10 组中的一天
2 月 3 日 2 月 7 日 2 月 8 日 5 月 6 日 5 月 7 日
8 月 4 日 8 月 9 日 10 月 4 日 10 月 6 日 10 月 8 日
甲知道 X 值，乙知道 Y 值
甲说：我如果不知道，乙肯定不知道
乙接着说，本来我不知道但是现在我知道了
甲接着说：那我也知道了。
大家知道丙的生日是哪天吗
在线等答案 谢谢大家
答：8 月 4 日
“乙接着说，本来我不知道但是现在我知道了” “本来”二字说明了乙通过十个日期和 Y
不能推断出丙的生日，由此可知丙的生日不可能是 3 号或 9 号 （因为 3 号和 9 号所对应的月份
是唯一的 2 月 3 日，8 月 9 日） 而甲在听到乙的这句话后立刻得出丙的生日了 说明了甲
在排除 2 月 3 日，8 月 9 日后就明白了丙是几号生日了，排除 8 月 9 日，2 月 3 日后每个月的
日期如下：

2 月 7 日	5 月 6 日	8 月 4 日	10 月 4 日
2 月 8 日	5 月 7 日		10 月 6 日
			10 月 8 日

由上表易知甲可以作出迅速的选择的原因是丙在 8 月生日 得丙在 8 月 4 日生日

282、韩信点兵,每 3 人一列余 1 人,每 5 人一列余 2 人,每 7 人一列余 4 人,每 13 人一列
余 6 人,问士兵总数借此题目,让我们大家一块讨论一下中国剩余定理
解：所求的数是
6+13×2+13×7×2＝214

283、若[x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+.....+[x+91/100]=546,求[100x]的值
这里"[y]"表示不大于 y 的整数,如[0.1]=0,[2.9]=2,[-0.2]=-1
解：式子 [x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+.....+[x+91/100]中共有
91-18=73 个加数，546÷73=7 余 35
故[x]=7　　后面 35 个加数中的值为[x]+1，
由于
[x]+ [x+1/100] + [x+2/100] +…+[x+18/100]+[x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+…+[x+91/100]+ [x+92/100]+…+[x+99/100]= [100x]
[100x]=7×100+35+8＝743

376、已知函数 f(x)=[x[x[x]]],其中[x]表示不超过 x 的最大整数，若其定义域为[0，4]，则其值域为__________(竞赛)
解：当 $0\le x<1$ 时[x]=0，f(x)= [x[x[x]]=0
当 $1\le x<2$ 时[x]=1，f(x)= [x[x[x]]= [x[x]]= [x]=1
当 $2\le x<3$ 时[x]=2，f(x)= [x[x[x]]= [x[2x]]
$4\le 2x<6\Rightarrow$ [2x]=4 或 5 $\Rightarrow 8\le$ x[2x] $<15\Rightarrow 8\le$ f(x) ≤ 14
当 $3\le x<4$ 时[x]=3，f(x)= [x[x[x]]= [x[3x]]
$9\le 3x<12\Rightarrow$ [3x]=9 或 10 或 11 $\Rightarrow 27\le$ x[3x] $<44\Rightarrow 27\le$ f(x) ≤ 43

380、若[x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+.....+[x+91/100]=546,求[100x]的值
这里"[y]"表示不大于 y 的整数,如[0.1]=0,[2.9]=2,[-0.2]=-1 (竞赛)
解：式子 [x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+.....+[x+91/100]中共有
91-18=73 个加数，546÷73=7 余 35
故[x]=7　　后面 35 个加数中的值为[x]+1，
由于
[x]+ [x+1/100] + [x+2/100] +…+[x+18/100]+[x+19/100]+[x+20/100]+[x+21/100]+…+[x+91/100]+ [x+92/100]+…+[x+99/100]= [100x]
[100x]=7×100+35+8＝743

545、函数 f(x)具有下性质：对每个实数 x，都有 $f(x)+f(x-1)=x^2$

如果 f(19)=94,那么 f(94)除以 1000 的余数是多少
解：$f(n)=-f(n-1)+n^2$（1）

故可设 $f(n+1)+a(n+1)^2+b(n+1)+c=-[f(n)+an^2+bn+c]$

$f(n+1)=-f(n)-2an^2-2(a+b)n-2c$（2）

（1）（2）对照得 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2},c=0$

$f(n+1)-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)=-[f(n)-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n]$

$f(94)-\frac{1}{2}\bullet 94^2+\frac{1}{2}\bullet 94=[f(19)-\frac{1}{2}\bullet 19^2+\frac{1}{2}\bullet 19]\times(-1)^{94-19}$

接下去自已完成

576、求证：对任意的正整数 n，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不可能为整数(竞赛)

证明：（用反证法）假设 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是整数

则 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 乘以任何整数仍为整数

下面我们去找一个与 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 有关的整数 Q

使它与 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 相乘不为整数就可以了

我们把 $2,3,\cdots,n$ 分别用 2 除，除到商数为奇数为止，这是可以做的事情

设除 2 的次数分别为 $p_2,p_3,\cdots p_n$，最后的奇数商数分别为 $k_2,k_3,\cdots k_n$，于是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2^{p_2}k_2}+\frac{1}{2^{p_3}k_3}+\cdots+\frac{1}{2^{p_n}k_n}$$

设 $p_2,p_3,\cdots p_n$ 中最大的为 p

则 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n$ 必为整数，由假设 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是整数

因此 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$ 也是整数（1）

另一方面，我们来证明 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$ 不是整数

下面先证 $p_2,p_3,\cdots p_n$ 之中只有一个等于 p

如果 $p_2,p_3,\cdots p_n$ 中有两个数 p_i和p_j都等于p（$2\le i<j\le n$）

即 $p_i=p_j=p$，于是 $i=2^{p_i}k_i=2^p\ k_i$，$j=2^{p_j}k_j=2^pk_j$

由于 $i<j$，因此 $k_i<k_j$，

因为 k_i 与 k_j 是奇数，故有偶数 $2t$ 在 k_i 与 k_j 之间

即 $k_i<2k<k_j$，$2^p\ k_i<2^p\bullet 2t<2^pk_j$ 即 $i<2^p\bullet 2t<j$

于是设 $u=2^p\bullet 2t$，则 $p_u\ge p+1$，这与 p 是 $p_2,p_3,\cdots p_n$ 中最大者矛盾

因此，$p_2,p_3,\cdots p_n$ 之中只有一个等于 p，设 $p_j=p$

$$2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=\text{整数 N}+\frac{1}{2}k_1k_2\cdots k_{j-1}k_{j+1}\cdots k_n$$

因为 $k_1,k_2,k_{j-1},k_{j+1},k_n$ 都是奇数

所以 $\frac{1}{2}k_1k_2\cdots k_{j-1}k_{j+1}\cdots k_n$ 不是整数

故 $2^{p-1}k_1k_2\cdots k_n(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$ 不是整数这与（1）相矛盾

所以假设不成立，因此是整数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不可能为整数

588、当 n∈N 且 n≥2 时，$1+2+2^2+\cdots+2^{(4n-1)}=5p+q$，其中 p,q 为非负整数，且 0≤q＜5，则 q 的值为多少？(数论)

解：$1+2+2^2+\cdots+2^{(4n-1)}=2^{4n}-1=5p+q$，

$$2^{4n}-1=16^n-1=(15+1)^n=(C_n^0 15^n+C_n^1 15^{n-1}+\cdots+C_n^1 15+1)-1$$

$=C_n^0 15^n+C_n^1 15^{n-1}+\cdots+C_n^1 15=5m\ (m\in N)$，于是 $5m=5p+q$

因为 p,q 为非负整数 0≤q＜5

所以就相当于求 $5m$ 被 5 除商数 p 是几?，余数数 q 是几?，

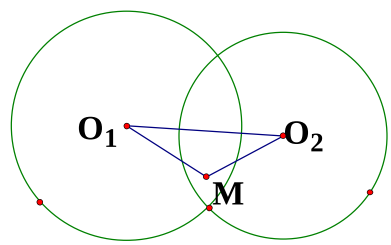
故 $p=m, q=0$

598、设平面上有 6 个圆,每个圆都不能盖住其它任何一个圆心,证明:平面上任一个点都不会被 6 个圆同时盖住。(竞赛)

证明：设六个圆的圆心分别为 O_1，O_2，O_3，O_4，O_5，O_6，按顺时针方向排列

设平面上点 M 被六个圆盖住，连 MO_1，MO_2

如图，设圆 O_1，O_2 的半径分别为 r_1 和 r_2，不妨设 $r_1\ge r_2$



则 $MO_1\le r_1$，$MO_2\le r_2$，$O_1O_2>r_1$

于是 $\cos\angle O_1MO_2=\dfrac{MO_1^2+MO_2^2-O_1O_2^2}{2MO_1\bullet MO_2}$

$<\dfrac{r_1^2+r_2^2-r_1^2}{2MO_1\bullet MO_2}<\dfrac{r_2^2}{2MO_1\bullet MO_2}\le\dfrac{r_2^2}{2r_2^2}=\dfrac{1}{2}$

故 $\angle O_1MO_2>60^\circ$，同理可证 $\angle O_2MO_3>60^\circ$，$\cdots\cdots\angle O_6MO_1>60^\circ$

于是 $\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots\cdots+\angle O_6MO_1>360^\circ$ 这是不可能的

因此原命题成立

687、求出所有可能的整数 x 使 $P(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+4$ 为质数(竞赛)

解：$P(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+4$

$=(x+1)^4+4=(x+1)^4+4(x+1)^2+4-4(x+1)^2$

$=(x+1)^4+4(x+1)^2+4-4(x+1)^2$

$=[(x+1)^2+2]-4(x+1)^2=[(x+1)^2+2(x+1)+2][(x+1)^2-2(x+1)+2]$

$=[(x+2)^2+1](x^2+1)$

当 $x=-2$或$x=0$ 时 $P(x)=5$ 为质数，此外 $P(x)$ 都是合数

710、删去正整数数列$1,2,3,4,\cdots$中的所有完全平方数,得到一个新数列，

这个新数列的第 2005 项是多少？(数论) (竞赛)

解：$1,2,\cdots,2025$中有 1，2，…，45 的平方，又 46^2＝2116

从$1,2,\cdots,2025$去掉平方数后还有 1980 个数

于是第 1980 项为 2025，因此第 2005 项＝2025+25＝2050

715、设 A 是任意一个无理数

求证： 对于任意的正数 m,都存在两正数 p,q,使得

pA 与 qA 的前 m 位小数是相同的。(数论) (竞赛)

证明；不妨设 A>0，p>q>0

于是只要 pA-qA＝A(p-q)<10^{-m}

p-q<10^{-m}/A　 p <(10^{-m}/A)+q

先任取一个正数为 q，如 q=1，再取 p=$\dfrac{10^{-m}}{A+1}$+1，就符合条件

778、**[题目]** 9 名数学家在一国际会议上相遇，其中任意三个人中总有两个人能讲同一种语言，如果每个数学家最多能讲 3 种语言．求证：至少有 3 个数学家能用同一种语言交流．(图论) (竞赛)

[知识介绍]如果把$mn+k(m,n,k\in N_+)$个东西放进n个抽屉，那么至少有一个抽屉放进$m+1$个东西.

[证明]设其中一位数学家为 A

(1)若其他 8 名都能与数学家 A 交流

由于数学家为 A 最多能讲三种语言，根据抽屉原理，这 8 名数学家至少有 3 人讲同一种语言，添上数学家 A，就至少有 4 人讲同一种语言

(2) 若其他 8 名中至少有一人不能与数学家 A 交流，设其中一人为 B。

设 M 为 A、B 之外的任意一人，由于“其中任意三个人中总有两个人能讲同一种语言”，所以 M 能与 A 交流，或者能与 A 交流。

设除 A、B 外的 7 名数学家能与 A 交流的组成集合 X，能与 B 交流的组成集合 Y。根据抽屉原理，7 人中至少 4 人在同一集合内。

不妨设 X 中有 4 人，也就是说至少有 4 人能与数学家 A 交流，由于数学家为 A 最多能讲三种语言，根据抽屉原理，这 4 人中至少有 2 人能讲同一种语言，添上数学家 A，就至少有 3 人讲同一种语言

综上所述，原命题成立

790、如果一凸多面体中,各顶点引出奇数条棱,求证顶点数为偶数?
(图论) (高考不要求)

解： 设 n 个顶点引出奇数条棱分别是 $2k_1+1, 2k_2+1, \cdots, 2k_n+1,$

这里 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in N$

于是 $E=\dfrac{2k_1+1+2k_2+1+\cdots+2k_V+1}{2}=(k_1+k_2+\cdots+k_V)+\dfrac{V}{2}$

代入欧拉公式 $V+F-E=2$ 得

$V+F-(k_1+k_2+\cdots+k_V)-\dfrac{V}{2}=2$

于是 $V=2[2+(k_1+k_2+\cdots+k_V)-F]$ 为偶数

800、求一切满足如下条件的正整数(a,b):

$ab+1 \mid a^2+b^2$，请给出过程,谢谢. (数论) (竞赛)

解：（1）若有正整数 a, b，使 $ab+1 \mid a^2+b^2$

则存在正整数 k，使 $a^2+b^2=k(ab+1)$

下面研究在 k 固定时方程 $x^2+y^2=k(xy+1)$ ①的整数解 (x,y) 的情形

易知 $(x,y)\neq(0,0)$ 若不然 $k=0$ 与 $k>0$ 不符

于是有 $x^2+y^2>0$ 又因为 $x^2+y^2=k(xy+1)$

故有 $xy>-1$，考虑到 x,y 是整数，进而有 $xy\geq 0$

（2）下面证明关于 $x^2+y^2=k(xy+1)$ ①的所有整数解 (x,y) 不可能都有 $xy>0$

假设对于①的任意一个解 (x,y) 都有 $xy>0$

不妨设 (x_1,y_1) 是所有整数解中满足 $x_1\geq y_1>0$，并且 $x+y$ 取得最小值的一个解

把①看成关于 x 的一元二次方程，按 x 整理得

$x^2-kxy+y^2-k=0$

由假设得关于 x 的方程 $x^2-kxy_1+{y_1}^2-k=0$ 有一为 x_1，设另一根为 x_2

由韦达定理得 $x_1+x_2=ky_1$②， $x_1x_2={y_1}^2-k$③

由②得 $x_2=ky_1-x_1$ 也是整数，于是 (x_2,y_1) 也是方程①的一个整数解

由假设得 $x_2 y_1 > 0$，故 $x_2 > 0$，

由③得 $x_2 = \dfrac{{y_1}^2 - k}{x_1} \le \dfrac{{x_1}^2 - k}{x_1} = x_1 - \dfrac{k}{x_1} < x_1$

于是 $x_2 + y_1 < x_1 + y_1$，这与 (x_1, y_1) 使 $x + y$ 取得最小值相矛盾

因此假设对于①的任意一个解 (x, y) 都有 $xy > 0$ 是不对的

由于 $x^2 + y^2 = k(xy + 1)$ ①的整数解 (x, y)，有 $xy \ge 0$

因此只要①有整数解，必存在有使 $xy = 0$ 的整数解

不妨设其中之一解为 $(0, y_1)$ $(y_1 > 0)$，于是关于 x 的方程 $x^2 - kxy_1 + {y_1}^2 - k = 0$
有一根为 0，于是另一根 x（正整数）满足
${y_1}^2 - k = 0$，且 $x = ky_1$

设 $y_1 = t$（t 为正整数）

于是得方程 $x^2 - kxy_1 + {y_1}^2 - k = 0$ 的所有正整数是 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \end{cases}$

同理可得方程 $y^2 - kx_1 y + {x_1}^2 - k = 0$ 的所有正整数是 $\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}$

综上所述本题的所有解为

$\begin{cases} a = t \\ b = t^3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = t^3 \\ b = t \end{cases}$ $t \in N_+$

875、(数论)

7a+13b=270 的正整数解

解：$a=\frac{270-13b}{7}=\frac{280-14b+b-10}{7}=40-2b+\frac{b-10}{7}$

设 $\frac{b-10}{7}=k,(k\in z)$，则 $b=7k+10(k\in z)$

于是 $a=40-2b+\frac{b-10}{7}=40-2(7k-10)+\frac{7k+10-10}{7}=20-13k$

因为 $a>0,b>0$，故 $a=20-13k$ 且 $7k+10>0$

解得 $-\frac{10}{7}<k<\frac{20}{13}$，因此 $k=-1$或 0 或 1

原不定方程的正整数解是 $\begin{cases}a=33\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=20\\b=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=7\\b=17\end{cases}$

945、已知 $p>q\geq 0$，且为整数．求证：

对于任意正整数 n＝$\frac{p(p-1)}{2}+q$， (p,q)为唯一整数对.

证明:（1）当 $n=1$时，$1=\frac{2(2-1)}{2}+0$，有唯一的整数对(2,0)

（2）假设当 $n=k$ 时，有唯一整数对 (p,q) （ $p>q\geq 0$ ）使 k＝$\frac{p(p-1)}{2}+q$

则当 $n=k+1$时，k+1＝$\frac{p(p-1)}{2}+q+1$

若 $0\leq q\leq p-2$，则 $q+1\leq p-1<p$，于是有整数对 $(p,q+1)$ 满足条件

若 $q=p-1$，则 k+1＝$\frac{p(p-1)}{2}+p=\frac{p(p+1)}{2}=\frac{(p+1)[(p+1)-1]}{2}+0$ 于是有整数对 $(p+1,0)$ 满足条件

我们证出了当 $n=k+1$时有一对整数对 (p,q) （ $p>q\geq 0$ ）满足条件

设当 $n=k+1$时，有整数对 (p,q) ($p>q\geq 0$ ）使 k+1＝$\frac{p(p-1)}{2}+q$ 成立，

若 $q\geq 1$就有整数对 $(p,q-1)$ 使 k＝$\frac{p(p-1)}{2}+q-1$，

若 $q=0$ 有整数对 $(p-1,p-2)$ 使 k＝$\frac{(p-1)(p-2)}{2}+p-2$

由归纳法假设知当 $n=k$ 时，有唯一整数对 (p,q) 满足条件，因此

当 $n=k+1$时也只能有唯一的整数对 (p,q) ($p>q\geq 0$ ）满足条件

综上，当 $n\in N_+$ 时命是总成立

1078、把 3 的 11 次方表示成 k 个连续正整数的和，则项数 k 的最大值为______

分析：联想到连续正整数的组成等差数列，

k 个连续正整数的和应有 $\dfrac{k(n+n+k-1)}{2}=3^{11}$ 的形式

即 $k(2n+k-1)=2\times 3^{11}$

（1）当 k 为奇数时 $k=3^t$， $2n+k-1=2\times 3^{11-t}$

于是 $n=3^{11-t}-\dfrac{k-1}{2}=3^{11-t}-\dfrac{3^t-1}{2}\geq 1$

于是 $2\bullet 3^{11-t}>3^k$， $3^{2k}<2\times 3^{11}$， $t\leq 5$， 于是 $k=3^5=243$

（2）当 k 为偶数时 $k=2\times 3^t$， $2n+k-1=3^{11-t}$

于是 $n=\dfrac{3^{11-t}}{2}-\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{3^{11-t}}{2}-\dfrac{2\times 3^t-1}{2}\geq 1$

于是 $3^{11-t}>2\times 3^k$， $t\leq 5$，此时 $k=2\times 3^5=486>243$

因此项数 k 的最大值是 486

此时 $3^{11}=\dfrac{486(122+607)}{2}=122+123+\cdots+607$

1190、(竞赛)

以下 8 个数据： $a_1=3.57$， $a_2=3.61$， $a_3=3.65$， $a_4=3.71$， $a_5=3.76$， $a_5=3.82$， $a_7=3.86$， $a_7=3.99$，它们的和为 30，若整数 $A_i(i=1,2,\cdots 8)$ 的和仍是 30，则“误差”，$|A_i-a_i|$的最大值的最小值为________

解：当 $A_i(i=1,2,\cdots 8)$ 相对集中于 $a_i(i=1,2,\cdots 8)$ 周围

$|A_i-a_i|\,(i=1,2,\cdots 8)$ 最大值会较小

由于 $a_i(i=1,2,\cdots 8)$ 在 3.5 左右

于是整数 $A_i(i=1,2,\cdots 8)$ 就应取 3 或 4， 由于 $\sum A_i=30$

于是可取 2 个 3 与 6 个 4，

当 $A_1=A_2=3, A_3=A_4=A_5=A_6=A_7=A_8=4$ 时 $\max|A_i-a_i|=0.61$

当 $A_1=A_3=3$， $A_2=A_4=A_5=A_6=A_7=A_8=4$ 时 $\max|A_i-a_i|=0.65$

等等，比较得 $\max|A_i-a_i|$最小值为 0.61