

6、求 $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ 的值域

解：由 $1 - x^2 \geq 0$ 得 $-1 \leq x \leq 1$ ，于是可设 $x = \sin q$ ($-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}$)，

则 $y = \sin q + \cos q = \sqrt{2} \sin(q + \frac{\pi}{4})$ ，

$$-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq q + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(q + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2}$$

11、已知 $y = f(x+1) + 1$ 过点 (m, n) ，求 $y = f(x-1) - 1$ 的反函数过点_____。

解： $y = f(x+1) + 1$ 过点 $(m, n) \Rightarrow n = f(m+1) + 1 \Rightarrow n - 2 = f(m+2 - 1) - 1$

$\Rightarrow y = f(x-1) - 1$ 过点 $(m+2, n-2) \Rightarrow y = f(x-1) - 1$ 的反函数过点 $(n-2, m+2)$

46 如何找一个函数 $f(x)$ 使 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, f(x_4) = y_4$

答

(1)插值公式构造是找一个函数 $f(x)$ 它在给定的 n 个 x 的值时，函数取到给定的 n 个值的公式

例如找一个函数 $f(x)$ 使， $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$

适合这一条件的函数有很多其中之一是

$$f(x) = \frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

这个函数叫做插值函数，也叫做插值公式。

(2)自己想一想 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, f(x_4) = y_4$ 的插值公式。

(3)为什么适合条件 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$ 函数 $f(x)$ 有无穷多个呢？

$$f(x) = \frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

当 a 取任意实数时都行

(4)数列是定义在正整数集上的函数，因此数列也有插值公式的。

63、已知 $f(x) = \frac{2x}{1+x}$

求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + \dots + f(\frac{100}{2}) +$
 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + \dots + f(\frac{100}{3}) + \dots + f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + f(\frac{3}{100}) + \dots + f(\frac{100}{100})$

解： $\because f(x) = \frac{2x}{1+x}, f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+x} \therefore f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{1+x} = 2$

由于

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) +$
 $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + \dots + f(\frac{100}{2}) +$
 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + \dots + f(\frac{100}{3}) +$
 $\dots$
 $f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + f(\frac{3}{100}) + \dots + f(\frac{100}{100})$

关于的对角线对称的两数的和是 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 2$ ，对角线上有 100 个 $f(1) = 1$ ，

故这 1 万个数的和为 10000

8 5、函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，若存在 $x_0 \in D$ ，使 $f(x_0) = x_0$ ，则称以 (x_0, x_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点。若 $D = \mathbb{R}$ ，则“ $f(x)$ 为奇函数，且有有限个不动点”是“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”的

- (A) 充要条件
- (B) 充分不必要条件
- (C) 必要不充分条件
- (D) 既不充分也不必要条件

选 B，函数的不动点既是该函数图象与 $y=x$ 的交点

因为 $f(x)$ 为奇函数且定义域为 $\mathbb{R}$ ，所以 $f(x)$ 必过 $(0,0)$ 点

因为 $f(x)$ 为奇函数所以说如果它在第一象限与 $y=x$ 有交点则有在第三象限的交点所以“ $f(x)$ 为奇函数且定义域为 $\mathbb{R}$ 且有有限个不动点”说明了 $f(x)$ 有奇数个不动点

而“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”可以很容易地画出一个与 $y=x$ 交点只有一个的直线（例如 $y=2$ ）所以说“ $f(x)$ 为奇函数，且有有限个不动点”是“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”的充分不必要条件

97、函数 $y=x+\sqrt{x^2+x+1}$ 的值域为_____.

解: $y-x=\sqrt{x^2+x+1}$

$$\begin{cases} y \geq x \\ x^2+x+1 \geq 0 \\ (y-x)^2 = x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x & (1) \\ (y-x)^2 = x^2+x+1 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $x = \frac{y^2-1}{2y+1}$

代入 (1) 得 $y \geq \frac{y^2-1}{2y+1}$, $\frac{y^2+y+1}{2y+1} \geq 0$, $y > -\frac{1}{2}$

123、 若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在 $(0, 1)$ 内恰有一解则 a 的取值范围是?

解: 当 $a=0$ 时原方程就是 $-x-1=0$, $x=-1 \notin (0, 1)$

当 $a \neq 0$ 时, 设 $f(x) = 2ax^2 - x - 1$

① 当 $f(0)f(1) < 0$ 时, 方程 $(0, 1)$ 内恰有一解,

$-1 \cdot (2a-1-1) < 0$, 解得 $a > 1$

② 当方程一个根是 1 时, 则另一个根是 $x = -\frac{1}{2} \notin (0, 1)$

综上: $a > 1$

142、求 $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ 的值域

解 1: $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

用几何意义得 $y \in (-1, 1)$

解 2: $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -1$

故得 $y \in (-1, 1)$

149、 $\sqrt{x^2+1}-ax \geq 1$ 怎么用图象解呀？

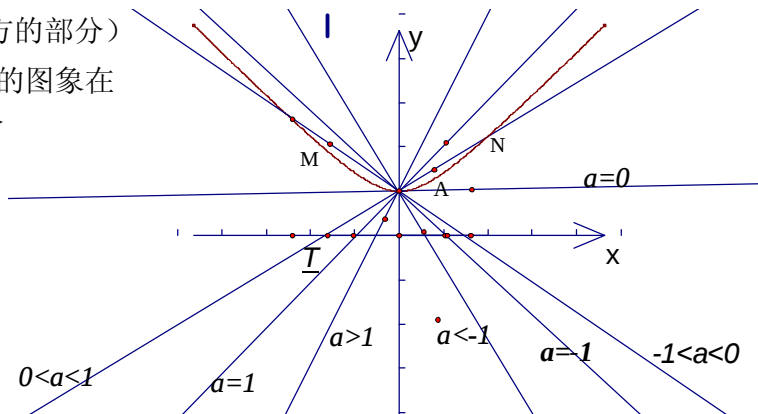
解： $\sqrt{x^2+1}-ax \geq 1$ 化为 $\sqrt{x^2+1} \geq ax+1$

设 $y_1 = \sqrt{x^2+1}$, $y_2 = ax+1$

作出它们的图象

(图中双曲线去掉 x 轴下方的部分)

由观察双曲线 $y_1 = \sqrt{x^2+1}$ 的图象在
直线 $y_2 = ax+1$ 上方的部分



由方程 $\sqrt{x^2+1} = ax+1$, 得 $x^2+1 = a^2x^2 + 2ax+1$

$$(1-a^2)x^2 = 2ax$$

当 $a = \pm 1$ 时, $x = 0$

$$\text{当 } a \neq \pm 1 \text{ 时, } x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$$

1° 当 $a=0$ 时, 解集为 $\mathbb{R}$

2° 当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 0] \cup [\frac{2a}{1-a^2}, +\infty)$

3° 当 $a \geq 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 0]$

4° 当 $a \leq -1$ 时, 解集为 $[0, +\infty)$

5° 当 $-1 < a < 0$ 时, 解集为 $(-\infty, \frac{2a}{1-a^2}] \cup [0, +\infty)$

194、求函数 $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的值域 (联赛)

解: $y - x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$$\text{等价于 } \begin{cases} y-x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ (y-x)^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \quad \text{等价于 } \begin{cases} y-x \geq 0 & (1) \\ (y-x)^2 = x^2 - 3x + 2 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $x = \frac{y^2-2}{2y-3}$ 代入 (1) 得

$$y - \frac{y^2-2}{2y-3} \geq 0 \text{ 解得 } y \geq 2 \text{ 或 } 1 \leq y < \frac{3}{2}$$

223、已知奇函数 $F(x)$ 定义域为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 且在 $(-\infty, -2)$ 上是增函数, 又

$F(-3)=0, f(\theta)=\cos 2\theta - 2m\cos \theta + 4m, \theta \in [0, \frac{p}{2}]$, 又集合

$M=\{m \mid F[f(\theta)]>0\}, N=\{m \mid f(\theta)>2\}$, 求 $M \cap N$

解: 由 $F[f(\theta)]>0$ 得

$-3 < f(\theta) < -2$, 或 $f(\theta) > 3$

又 $f(\theta) > 2$

故 $M \cap N = \{m \mid f(\theta) > 3\}$

$\cos 2\theta - 2m\cos \theta + 4m > 3$

$m(4 - 2\cos) > 3 - \cos 2q$

$$m > \frac{4 - 2\cos^2 q}{4 - 2\cos q} = \frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q}$$

设 $t = 2 - \cos q \in [1, 2]$ 和, 则 $\cos q = 2 - t$

$$\frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q} = \frac{2 - (2 - t)^2}{t} = \frac{2 + 2t - t^2}{t} = \frac{2}{t} - t + 2$$

在 $t \in [1, 2]$ 上递减, 故 $\frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q}$ 最大值为 3

因此 $m > 3$, 即 $M \cap N = \{m \mid m > 3\}$

227、已知 $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x + a$, $a > 1$, 若 $|f(x) - ag(x)| \leq |f(x)|$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立, 求 a 的范围

解: $|f(x) - ag(x)| \leq |f(x)|$,

$$U \quad |2\sqrt{x} - a(x + a)| \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x}$$

$$U \quad -2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x} - a(x + a) \leq 2\sqrt{x},$$

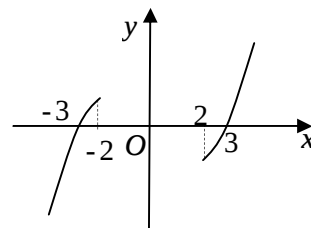
设 $t = \sqrt{x} \in [1, 2]$,

$$-2t \leq 2t - a(t^2 + a) \leq 2t$$

$at^2 - 4t + a^2 \leq 0$ 且 $-a(t^2 + a) \leq 0$ (显然成立)

$$U \quad at^2 - 4t + a^2 \leq 0 \text{ 对 } t \in [1, 2] \text{ 恒成立}$$

设 $Q(t) = at^2 - 4t + a^2, Q(t)_{\max} \leq 0$, 对称轴 $t = \frac{2}{a}$



(1) 当 $1 < a \leq \frac{4}{3}$ 时, $t = \frac{2}{a} \in [\frac{3}{2}, 2)$, $Q(t)_{\max} = Q(1) = a - 4 + a^2 \leq 0, a + a^2 \leq 4$, 成立

(2) 当 $a > \frac{4}{3}$ 时, $t = \frac{2}{a} \in (0, \frac{3}{2})$, $Q(t)_{\max} = Q(2) = 4a - 8 + a^2 \leq 0, a^2 + 4a - 8 \leq 0$

解得 $-2 - 2\sqrt{3} \leq a \leq -2 + 2\sqrt{3}$. 此时 $\frac{4}{3} < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

综上 $1 < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

解 2: 从设 $Q(t)_{\max} \leq 0$ 开始, 由于 $a > 1$

于是 $\begin{cases} Q(1) = a - 4 + a^2 \leq 0 \\ Q(2) = 4a - 8 + a^2 \leq 0 \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

234、已知 $3f(x+1) - 2f(x-1) = 2x+17$, 求 $f(x)$ (高考不要求)

解: $f(x+1) + k(x+1) + b = \frac{2}{3}[f(x-1) + k(x-1) + b]$

得 $3f(x+1) - 2f(x-1) = -kx - 5k - b$

$-k = 2$ 且 $-5k - b = 17$

$\therefore k = -2$ 且 $b = -7$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = \frac{2}{3}[f(x-1) - 2(x-1) - 7]$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = \frac{2}{3}[f(x-1) - 2(x-1) - 7]$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = c(\frac{2}{3})^x$

$f(x+1) = c(\frac{2}{3})^{\frac{x}{2}} + 2x + 9 (c \in R)$, 以上解答不一定正确

237、若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数 R 上的函数, 且方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 ()

A. $x^2 + x - \frac{1}{5}$ B. $x^2 + x + \frac{1}{5}$ C. $x^2 - \frac{1}{5}$ D. $x^2 + \frac{1}{5}$

解: 用特例法, 令 $g(x) = x$, 则 $f[g(x)] = f(x)$, $g[f(x)] = f(x)$
方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实根就是 $f(x) = x$ 有实根

对选项逐一判断, 可知只有 $x^2 + x + \frac{1}{5} = x$ 无实数解, 故选 B

说明: 本题是 2004 年浙江理卷, 第 12 题

248、题目:设自然数集 N 与集合 A 之间存在双射 $f:N \rightarrow A$, 则称 A 是可数无限集. 证明整数集 Z 为可数无限集.

最近在研究数学分析,可是发现原本很简单的题目自己都变得无能为力了.对于这个题目,入手我感觉还可以,就是试图找到 N 与 Z 之间的一个双射.可是对于这两个数集是否能构成我束手无策了.显然 Z 的范围要比 N 大(不知这样说可不可以),怎样才能找到那样的一个双射呢?(高考不要求)

证明:把 Z 中的元素按如下顺序排列

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ……

让上面的每个元素与它的序号对应就建立了一个从 Z 到 N 的一一映射

因此 Z 是可数无限集

256、已知函数 $F(X)$ 对任意的实数 X, Y 都有 $F(X+Y)=F(X)+F(Y)+2Y(X+Y)+1$, 且 $F(1)=1$ 问题:若 X 属于 N_+ , 试求 $F(X)$ 的表达式.

解: $F(X+Y)=F(X)+F(Y)+2Y(X+Y)+1$ 中

令 $y=1$ 得 $F(X+1)=F(x)+F(1)+2(X+1)+1= F(x)+ 2X+4$

$F(X+1)- F(x)=2X+4$

当 X 属于 N^* 且 $X \geq 2$ 时

$F(X)= F(1)+ F(2)- F(1)+ F(3)- F(2)+ \dots + F(x)- F(x-1)$

$=1+6+8+10+\dots + 2X+4$

$=1+(x-1)(6+ 2X+4)/2= x^2+4x-4$ 对 $x=1$ 也成立

故当 X 属于 N^* 时 $F(X) = x^2+4x-4$. 157、

276、对于在区间 $[m, n]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对任意的 $x \in [m, n]$, 均有 $|f(x)-g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是接近的, 否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是非接近的, 现有两个函数

$f_1(x) = \log_a(x-3a)$ 与 $f_2(x) = \log_a \frac{1}{x-a} (a > 0, a \neq 1)$ 讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间

$[a+2, a+3]$ 上是否是接近的.

解: $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域分别为 $[a, +\infty)$ 和 $[3a, +\infty)$

首先要有 $[a+2, a+3] \subseteq [a, +\infty)$ 且 $[a+2, a+3] \subseteq [3a, +\infty)$

故 $a+2-3a > 0, a+2-a > 0, \therefore 0 < a < 1$,

由 $|f_1(x)-f_2(x)| = |\log_a(x^2-4ax+3a^2)| \leq 1$, 得 $-1 \leq \log_a(x^2-4ax+3a^2) \leq 1$

因 $0 < a < 1$ 故 $\frac{1}{a} > x^2-4ax+3a^2 > a(1)$

设 $g(x) = x^2-4ax+3a^2 = (x-2a)^2 - a^2$ 使(1)对 $x \in [a+2, a+3]$ 恒成立的充要条件是

$g(x)_{\min} > a$ 且 $g(x)_{\max} < \frac{1}{a}$

$g(x)$ 对称轴 $x=2a, a+2-2a=2-a > 0$, 即 $a+2 > 2a$

故 $g(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上递增,

因此, $g(x)_{\min} = g(a+2) = 9-6a, g(x)_{\max} = g(a+3) = 4-4a$.

所以 $9-6a > a$ 且 $4-4a < \frac{1}{a}$

解得: $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$,

故当 $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$ 时 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上是接近, 此外是不接近的.

294、函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ 的值域中

有 10 个不同的整数,求 n

解: $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$

(1) 当 $n \geq 0$ 时区间 $[n, n+1]$ 在对称轴右边

所以 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 在区间 $[n, n+1]$ 上递增

故 $f(x) \in [n^2 + n + \frac{1}{2}, (n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}]$

$$(n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2} - (n^2 + n + \frac{1}{2}) = 10$$

$$(2n+1) + 1 = 10, \quad n = 4$$

(2) 当 $n = -1$ 时区间 $[n, n+1] = [-1, 0]$ 则 $f(x) \in [-\frac{1}{4}, 1]$ 不合舍去

(3) 当 $n \leq -2$ 时区间 $[n, n+1]$ 在对称轴左边

所以 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 在区间 $[n, n+1]$ 上递减

故 $f(x) \in [(n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}, n^2 + n + \frac{1}{2}]$

$$(n^2 + n + \frac{1}{2}) - (n+1)^2 - (n+1) - \frac{1}{2} = 10$$

$$-(2n+1) - 1 = 10, \quad n = -6$$

综上 $n = 4$ 或 -6

295、定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) = f(x+2)$, 且 $f(1) = 2$

则 $f(2) + f(4) + f(6) + \cdots + f(2005) = \text{-----}$

解: 定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = f(0) = 0$$

$$f(4) = f(2) = 0$$

.....

因此

$$f(2) + f(4) + f(6) + \cdots + f(2004) = 0$$

$$\text{又 } f(2005) = f(1) = 2$$

故原式 $= 2$

337、若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 R 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是

A、 $x^2+x-\frac{1}{5}$ B、 $x^2+x+\frac{1}{5}$ C、 $x^2-\frac{1}{5}$ D、 $x^2+\frac{1}{5}$

解法 1：设 $f(x)=x$ ，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$ ，故方程 $x-f[g(x)]=0$

就是 $x-g[f(x)]=0$ 即 $g[f(x)]=x$ (1)

选支 A，方程 (1) 就是 $x^2+x-\frac{1}{5}=x$ 有实根

选支 B，方程 (1) 就是 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$ 无实根

选支 C，方程 (1) 就是 $x^2-\frac{1}{5}=x$ 有实根

选支 D，方程 (1) 就是 $x^2+\frac{1}{5}=x$ 有实根

故选 B

解法 2、设方程 $x-f[g(x)]=0$ 的实根为 a ，则化为 $f[g(a)]=a$

故 $g\{f[g(a)]\}=g(a)$

设 $g(a)=b$ ，则 $g[f(b)]=b$

故方程 $g[f(x)]=x$ (1) 有实根 $x=b$

在选支 B 中，方程 (1) 就是 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$ 无实根，因此 $g[f(x)]$ 不可能是 $x^2+x+\frac{1}{5}$

故选 B

371、设 f 是在实数范围内的函数，且有 $f(x+T)=kf(x)$ ，其中 T 和 k 是正数，证明

对任意实数 x 有 $f(x)=a^x g(x)$ ，其中 a 为常数， $g(x)$ 是周期为 T 的函数 (竞赛)

分析： $\frac{f(T+x)}{a^{T+x}} = \frac{kf(x)}{a^T a^x}$ ，令 $\frac{k}{a^T} = 1$ ，得 $a = k^{\frac{1}{T}}$

因此取 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$ ，就有 $g(x)$ 是周期为 T 的函数

并且 $f(x) = a^x g(x)$

证明：设 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$

则 $g(T+x) = k^{-\frac{T+x}{T}} f(T+x) = k^{-\frac{T}{T}-\frac{x}{T}} \cdot kf(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x) = g(x)$

故 $g(x)$ 是周期为 T 的函数

因为 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$

所以 $f(x) = k^{\frac{x}{T}} g(x)$ ，令 $a = k^{\frac{1}{T}}$ ，就有 $f(x) = a^x g(x)$

423、若函数 $y = \frac{ax+1}{4x+3}$ 在其定义域内存在反函数,

(1)求 a 的取值范围;(2)求此函数的值域.(高考不要求)

解: 由 $y = \frac{ax+1}{4x+3} = \frac{\frac{a}{4}(4x+3)+1-\frac{3a}{4}}{4x+3} = \frac{a}{4} + \frac{1-\frac{3a}{4}}{4x+3}$

当 $1 - \frac{3a}{4} = 0$, 即 $a = \frac{4}{3}$ 时 $y = \frac{ax+1}{4x+3} = \frac{1}{3}$ 为常函数, 没有反函数, 此外都有反函数

故 $a \neq \frac{4}{3}$, 此函数的值域是 $y \neq \frac{a}{4}$

424、已知 $f(x) = 2x^2 - 4x + 1, x \in [-4, 0]$. 解不等式 $f^{-1}(7x) < f^{-1}(x-1)$

(高考不要求)

解: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$

$f(x)$ 在 $x \in [-4, 0]$ 上是减函数, 且 $1 \leq f(x) \leq 49$

因此 $f^{-1}(x)$ 是定义在 $[1, 49]$ 上的减函数

故不等式 $f^{-1}(7x) < f^{-1}(x-1)$ 可化为

$$\begin{cases} 7x > x-1 \\ 1 \leq 7x \leq 49 \\ 1 \leq x-1 \leq 49 \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq x \leq 7$$

425、若函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y+2) + 3$,

又 $f(1)=1$, 若 t 为自然数, 试求 $f(t)$ 的表达式

解: 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = -3$

令 $x = t, y = 1$, 得 故 $f(t+1) = f(t) + f(1) + 3t(t+3) + 3 = f(t) + 3t^2 + 9t + 4$,

$f(t+1) - f(t) = 3t^2 + 9t + 4$, 当 $t \in N$ 时

$$f(t) = f(0) + [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \mathbf{L} + [f(t) - f(t-1)]$$

$$= -3 + 4 + (3 \times 1^2 + 9 \times 1 + 4) + (3 \times 2^2 + 9 \times 2 + 4) + \mathbf{L} + [3 \times (t-1)^2 + 9 \times (t-1) + 4]$$

$$= 1 + 3 \times \frac{(t-1)t(2t-1)}{6} + 9 \times \frac{(t-1)t}{2} + 4(t-1) = t^3 + 3t^2 - 3$$

432、已知函数 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} (x \geq 1)$ ，求其反函数的定义域和单调区间

(高考不要求)

$$\text{解: } f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} (x \geq 1)$$

当 $x=1$ 时 $f(x)=0$,

当 $x>1$ 时 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ 是真分数, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1$

故 $f(x)$ 的值域是 $[0, 1)$, 即 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$

当 $x>1$ 时

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3} > 0$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数

故 $f^{-1}(x)$ 在 $[0, 1)$ 上是增函数

445、求 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ 的值域

解: $y^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \in [2, 4]$, $y \geq 0$, 故 $\sqrt{2} \leq y \leq 2$

447、 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 的反函数是什么? (高考不要求)

$$\text{解: } \sqrt{x-5} = 2x - y$$

$$x-5 = 4x^2 - 4yx + y^2$$

$$4x^2 - (4y+1)x + 5 + y^2 = 0$$

$$x = \frac{4y+1 \pm \sqrt{8y-79}}{8}$$

故所求的反函数是 $y = \frac{4x+1+\sqrt{8x-79}}{8} (x \geq 10)$

$y = 2x - \sqrt{x-5}$ 的定义域是 $[5, +\infty)$

$$y^2 = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x-5}} = \frac{4\sqrt{x-5}-1}{2\sqrt{x-5}}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 5\frac{1}{16}$

当 $5 < x < 5\frac{1}{16}$ 时 $y' < 0$ 故 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 在 $5 < x < 5\frac{1}{16}$ 上递减

当 $x > 5\frac{1}{16}$ 时 $y' > 0$ 故 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 在 $x > 5\frac{1}{16}$ 上递增

因此 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 没有反函数

467、已知 $A=B=\mathbb{R}$, x 属于 A , y 属于 B , $f: x \rightarrow y = ax+b$, 若 1, 8 的原象分别是 3 和 10, 求 5 在 f 下的象(函数)

解: 因为 1, 8 的原象分别是 3 和 10

所以 $a+b=3$ 且 $8a+b=10$

解得 $a=1$, $b=2$

因此 $f: x \rightarrow y = x+2$

故 5 在 f 下的象是 $y=5+2=7$

492、 $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, 求其反函数的定义域(函数) (高考不要求)

解: $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$y - x = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ (y - x)^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x \geq 0 & (1) \\ (y - x)^2 = x^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $y^2 - 2xy = -1$, 易知 $y = 0$ 等式不成立, 故 $y \neq 0$, $x = \frac{y^2 + 1}{2y}$ 代入 (1)

$$y - \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 0, \quad \frac{y^2 - 1}{y} \geq 0, \quad \text{解得 } y \geq 1 \text{ 或 } -1 \leq y < 0$$

故其反函数的定义域为 $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$

566、题: 2, 15, 7, 40, 77 接下来的数是什么?

想不出什么方便的方法, 只好用插值法了 (数值计算)

解: 设

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + \frac{15(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} \\ &+ \frac{7(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + \frac{40(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} + \frac{77(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(6) = \frac{2(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + \frac{15(6-1)(6-3)(6-4)(6-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$+ \frac{7(6-1)(6-2)(6-4)(6-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + \frac{40(6-1)(6-2)(6-3)(6-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} + \frac{77(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

$$= 2 - 75 + 70 - 400 + 770 = 367$$

592、求 $y = x\sqrt{1-2x}$ 的值域(不等式)

解：定义域为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ ，当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时

$$y = x\sqrt{1-2x} = \sqrt{xx(1-2x)} \leq \sqrt{\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时取等号}$$

当 $x \leq 0$ 时 $y = x\sqrt{1-2x}$ 是增函数，

$$y = x\sqrt{1-2x} \leq 0\sqrt{1-2 \times 0} = 0, \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时 } y = x\sqrt{1-2x} \rightarrow -\infty$$

综上 $y = x\sqrt{1-2x}$ 的值域是 $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{9}]$

628、已知定义域为 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$ 同时满足：对任意的 $x \in [0,1]$ ，总有 $f(x) \geq 0$ ，

$$f(1)=1, \text{ 若 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \in [0,1] \text{ 有 } f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$$

(1)求 $f(x)$ 的最大值 (2)求证 $f(x) \leq 2x$ (函数) (推理) (高考难题)

(1)解：设任意 $x_1, x_2 \in [0,1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 - x_1 \in [0,1]$ ，于是 $f(x_2 - x_1) \geq 0$

$$f(x_2) = f(x_2 - x_1 + x_1) \geq f(x_2 - x_1) + f(x_1) \geq f(x_1)$$

于是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 不减， $f(x)$ 的最大值 $= f(1) = 1$

(2)证明 $f(0+1) \geq f(0) + f(1) \geq f(0) \geq 0$ ，又 $f(0) \geq 0 \geq f(0) = 0$

$$f(0+1) \geq f(0) + f(1) \geq f(0) \geq 0, \text{ 又 } f(0) \geq 0 \geq f(0) = 0$$

当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时， $f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(1) = 1 \leq 2x$

当 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时， $2f(\frac{1}{2}) \leq f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}, f(x) \leq f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} \leq 2x$ ，

当 $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$ 时， $2f(\frac{1}{4}) \leq f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}, f(\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{4}, f(x) \leq f(\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{4} \leq 2x$ ，

假设 $\frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}$ 时，都有 $f(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}$ 且 $f(x) \leq 2x$

则当 $\frac{1}{2^{n+2}} \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ 时，

$$2f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq f(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}, f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}, f(x) \leq f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq 2x$$

于是 $f(x) \leq 2x$ 对所有的 $x \in [0,1]$ 总成立

655、 $y = f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x+a)$ 与 $f(x+a)$ 互为反函数, 若

$f(a) = a$, 则 $f(2a) = ()$ (函数) (高考不要求)

A -a B 0 C a D 2a

解: 由 $y = f^{-1}(x+a)$ 得 $x+a = f(y)$, $x = f(y) - a$

故 $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数是 $y = f(x) - a$

故 $f(x+a) = f(x) - a$, $f(2a) = f(a) - a = 0$

777、试定义两个函数 $f(x), g(x)$ 满足

(1) 它们定义域均为 $(0, 1)$ (2) 他们的值域都是 $[0, 1]$

(3) 对于任意的实数 $a \in (0, 1)$, $f(x) = a$ 有惟一解, $g(x) = a$ 有无穷多解

解: (1) 当 $x \in (0, 1)$ 且为无理数时 $f(x) = x$

当 $x \in (0, 1)$ 且为有理数时, 我们先把 $(0, 1)$ 中的有理数按如下方法排成队

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \mathbf{L}$, 删除重复的有理数后的序列为

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \mathbf{L}, a_n, \mathbf{L}$

定义 $f(a_1) = 0, f(a_2) = 1, f(a_3) = a_1, f(a_4) = a_2, \mathbf{L}$, 当 $n \geq 3$ 时 $f(a_n) = a_{n-2}$

(2) $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件

803、 $f(x) = -bx^2 + ax$, $a > 0, b > 1, x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1$,

命题 $P: x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1$, 命题 $Q: b-1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$

证明: $P \Rightarrow Q$ (函数) (推理)

证明: $f(x) = -bx^2 + ax = -b(x^2 - \frac{a}{b}x) = -b(x - \frac{a}{2b})^2 + \frac{a^2}{2b}$

在 $\frac{a}{2b} \geq 1$ 即 $a \geq 2b$ 的条件下, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $f(1) = a - b \leq 1$, 于是 $a \leq b + 1$, 故 $2b \leq b + 1, b \leq 1$

与 $b > 1$ 矛盾, 因此 $\frac{a}{2b} < 1$, 在此大前提下

命题 P 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{a}{2b}) = \frac{a^2}{2b} \leq 1 \\ f(1) = a - b \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2\sqrt{b} \\ a \geq b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b} \Leftrightarrow \text{命题 P 成立}$

804、 $f(x) = -bx^2 + ax$, $a > 0, 0 < b \leq 1$,

求使 $x \in [0,1], |f(x)| \leq 1$ 成立的充要条件 (函数) (推理)

解: $f(x) = -bx^2 + ax = -b(x^2 - \frac{a}{b}x) = -b(x - \frac{a}{2b})^2 + \frac{a^2}{2b}$

(1) 当 $\frac{a}{2b} \geq 1$ 即 $a \geq 2b$ 时, 当 $x \in [0,1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $f(1) = a - b \leq 1$, 即 $a \leq b + 1$, 由于 $2b \leq b + 1$

故此时 $2b \leq a \leq b + 1$

(2) 当 $\frac{a}{2b} < 1$ 即 $0 < a < 2b$ 时, 当 $x \in [0,1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $\begin{cases} f(\frac{a}{2b}) = \frac{a^2}{2b} \leq 1 \\ f(1) = a - b \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2\sqrt{b} \\ a \geq b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$

由于 $2\sqrt{b} \geq 2b$, $b - 1 \leq 0$ 此时 $0 < a \leq 2b$

综上: $0 < a \leq b + 1$

923、(函数)

函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数是

A、 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ B、 $y = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ C、 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ D、 $y = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

解: 原函数当 $x = 0$ 时 $y = 0$ 于是排除 A、B

原函数当 x 是很大的正数时, y 也是较大的正数, 于是排除 D

故选 C

924、(函数)

已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1 \neq x_2$, $l \neq -1$,

$a = \frac{x_1 + lx_2}{1+l}$, $b = \frac{x_2 + lx_1}{1+l}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(a) - f(b)|$, 则

A、 $l < 0$ B、 $l = 0$ C、 $0 < l < 1$ D、 $l \geq 1$

解: 当 $l = 0$ 时 $a = x_1$, $b = x_2$ 则 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(a) - f(b)|$ 不成立
排除 B

当 $0 < l < 1$ 或 $l \geq 1$ 时 a, b 是以 x 轴上以数 x_1, x_2 为端点的线段的内分点
作图可知, $|f(x_1) - f(x_2)| > |f(a) - f(b)|$, 于是排除 C、D

综上, 选 A

947、(导数)

已知函数 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的反函数, $g(x)=2^x-1$, 设 $a>b>0$, 比较 $\frac{f(a)}{a}$ 与 $\frac{f(b)}{b}$ 的大小。

解: $g(x)=2^x-1$ 的反函数是 $y=\log_2(x+1)$

故 $f(x)=\log_2(x+1)$

$$\text{设 } F(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\log_2(x+1)}{x}=\frac{\ln(x+1)}{x \ln 2}, \quad F'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2 \ln 2},$$

$$\text{设 } q(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1), \quad \text{则 } q'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{(x+1)^2}$$

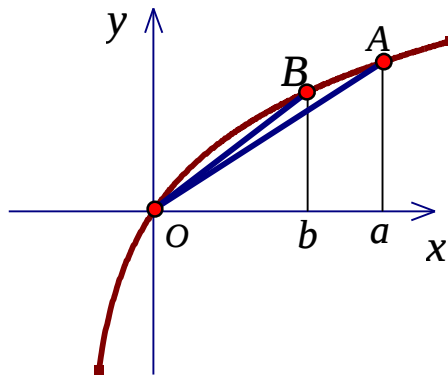
当 $x=0$ 时 $q'(x)=0$,

当 $x>0$ 时 $q'(x)<0$, 故 $q(x)<q(0)=0$,

$$\text{于是当 } x>0 \text{ 时 } F'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2 \ln 2}<0$$

因此 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减,

因 $a>b>0$ 故 $F(a)<F(b)$ 即 $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$



注: 若是小题可用图象 $\frac{f(a)}{a}=k_{OA}, \frac{f(b)}{b}=k_{OB}$

975、(函数)

设 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且函数 $y=f(x+2)$ 与 $y=f^{-1}(x-1)$ 互为反函数, 求 $f^{-1}(1)-f^{-1}(0)$ 的值。

解: 先求 $y=f(x+2)$ 的反函数

$$\text{由 } y=f(x+2) \text{ 得 } x+2=f^{-1}(y), \quad x=f^{-1}(y)-2$$

于是 $y=f(x+2)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)-2$

$$\text{因此 } f^{-1}(x)-2=f^{-1}(x-1)$$

$$f^{-1}(x)-f^{-1}(x-1)=2$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } f^{-1}(1)-f^{-1}(0)=2$$

977、(函数)(推理)

已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > b > c)$ 的图像上有两点 $A(m_1, f(m_1))$, $B(m_2, f(m_2))$, 满足 $f(1)=0$ 且 $a^2 + [f(m_1) + f(m_2)]a + f(m_1)f(m_2) = 0$

(1) 求证: $f(x)$ 的图像被 x 轴所截得的线段长的取值范围是 $[2, 3)$ 。

(2) 求证: $b \geq 0$ (3) 问能否得出 $f(m_1 + 3)$, $f(m_2 + 3)$ 中至少有一个为正数?

请证明你的结论。

$$(1) a^2 + [f(m_1) + f(m_2)]a + f(m_1)f(m_2) = 0, [a + f(m_1)][a + f(m_2)] = 0$$

$$f(m_1) = -a \text{ 或 } f(m_2) = -a, \text{ 故方程 } ax^2 + bx + c = -a \text{ 有实根}$$

$$\text{于是 } \Delta = b^2 - 4a(a+c) \geq 0 \text{ ①}$$

$$\because f(1)=0, \therefore a+b+c=0$$

$$\mathbf{Q} a > b > c, \therefore 0 = a+b+c > c+c+c=3c, \quad 0 = a+b+c < a+a+a=3a, \therefore a > 0, \quad c < 0,$$

$$\because a > b, \quad b = -a - c \therefore a > -a - c \quad \therefore -2 < \frac{c}{a} \text{ ②}$$

$$\because b > c, \quad b = -a - c \therefore -a - c > c \quad \therefore \frac{c}{a} < -\frac{1}{2} \text{ ③}$$

$$\text{把 } b = -a - c \text{ 代入 ① 得 } (a+c)(c-3a) \geq 0, \quad (\frac{c}{a}+1)(\frac{c}{a}-3) \geq 0, \quad \frac{c}{a} \leq -1 \text{ 或 } \frac{c}{a} \geq 3 \text{ ④}$$

$$\text{由 ②③④ 得 } -2 < \frac{c}{a} \leq -1$$

因为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根是

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

所以 $f(x)$ 的图像被 x 轴所截得的线段长

$$l = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{(a-c)^2}}{a} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

这个关于 $\frac{c}{a}$ 函数在 $-2 < \frac{c}{a} \leq -1$ 上递减, 于是 $l \in [2, 3)$

$$(2) \text{ 因 } b = -a - c, \quad a > 0 \text{ 故 } \frac{b}{a} = -1 - \frac{c}{a}$$

$$\text{因 } -2 < \frac{c}{a} \leq -1 \text{ 故 } 0 \leq -1 - \frac{c}{a} < 1, \text{ 所以 } \frac{b}{a} \geq 0, \quad b \geq 0$$

$$(3) \text{ 若 } f(m_1) = -a, \text{ 因 } a > 0 \text{ 得 } f(m_1) < 0$$

$$\text{因 } f(1)=0 \text{ 故 } f(x) = a(x-1)(x-\frac{c}{a})$$

$$\text{即 } f(m_1) = a(m_1-1)(m_1-\frac{c}{a}) < 0, \quad (m_1-1)(m_1-\frac{c}{a}) < 0,$$

$$\text{因 } \frac{c}{a} \leq 1 \text{ 故 } \frac{c}{a} < m_1 < 1 \text{ 又 } \frac{c}{a} > -2, \text{ 故 } m_1+3 > \frac{c}{a}+3 > -2+3=1$$

$$\text{因 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递增, 故 } f(m_1+3) > f(1)=0$$

$$\text{若 } f(m_2) = -a \text{ 同理可证 } f(m_2+3) > 0$$

因此 $f(m_1+3)$, $f(m_2+3)$ 中至少有一个为正数

988、(函数)

已知函数 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$ 的反函数的对称中心是 $(-1, 3)$, 则实数 a 等于()

A、-2、 B、3 C、2 D、-4

解：因 $f(x)$ 反函数的对称中心是 $(-1, 3)$,

故 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1} = \frac{-1-(x-a-1)}{x-a-1} = \frac{-1}{x-a-1} - 1$ 对称中心为 $(3, -1)$

于是 $a+1=3$, $a=2$

1003、(函数)

在 $P(1,1), Q(1,2), M(2,3), N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 四点中, 函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像与其反

函数图像的公共点只可能是点

A.P B.Q C.M D.N

解：函数 $y = a^x$, 反函数 $y = \log_a x$

第一步：检验 A, 把 $P(1,1)$ 代入 $y = a^x$ 得 $a=1$, 与 $a \neq 1$ 矛盾

第二步：检验 B, 把 $P(1,2)$ 代入 $y = \log_a x$, $\log_a 1 = 2$ 矛盾式

第三步：检验 C, 把 $P(2,3)$ 代入 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$, 得

$a = \sqrt{3}$ 和 $a = \sqrt[3]{2}$ 矛盾

故选 D

1030、(函数)(推理)

已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 当 $|x| \leq 1$ 时有 $|f(x)| \leq 1$

(I) 求证：当 $|x| \leq 2$ 时 $|ax^2 + bx + c| \leq 7$

(II) 求证： $|x| \leq 1$ 时 $|2ax + b| \leq 4$ 并讨论等号能否成立

(III) 求证： $|x| \leq 1$ 时 $|cx^2 + bx + a| \leq 2$

证明：(I) 设 $f(1) = m$, $f(-1) = n$, $f(0) = c$,

因为，当 $|x| \leq 1$ 时有 $|f(x)| \leq 1$, 所以, $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$, $|c| \leq 1$

因为, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$, $f(0) = c$

所以 $a + b + c = m$, $a - b + c = n$ 解得 $a = \frac{1}{2}(m + n - 2c)$, $b = \frac{1}{2}(m - n)$,

于是 $f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{2}(m + n - 2c)x^2 + \frac{1}{2}(m - n)x + c$

$= \frac{1}{2}m(x^2 + x) + \frac{1}{2}n(x^2 - x) + c(1 - x^2)$

$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|m||x^2 + x| + \frac{1}{2}|n||x^2 - x| + |c||1 - x^2|$

$\leq \frac{1}{2}|x^2 + x| + \frac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2|$

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (x^2-1) = 2x^2 - 1 \leq 7$$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) - \frac{1}{2}(x^2-x) + (1-x^2) = 1+x-x^2 < 1+1-0 = 2$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时, } |f(x)| \leq -\frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (1-x^2) = 1-x-x^2 < 1+1-0 = 2$$

$$\text{当 } -2 \leq x \leq -1 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (x^2-1) = 2x^2 - 1 \leq 7$$

综上所述, $|f(x)| \leq 7$

$$(II) \text{ 因 } 2ax+b = m(x+\frac{1}{2}) + n(x-\frac{1}{2}) + 2cx$$

$$\text{故 } |2ax+b| \leq |m|(x+\frac{1}{2}) + |n|(x-\frac{1}{2}) + |2c||x| \leq |x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| + |x|$$

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时, } |x+\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}, |x-\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}, |x| \leq 1, \text{ 于是 } |2ax+b| \leq 4$$

$$\text{当 } |x+\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}, |x-\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}, |x|=1 \text{ 同时成立时取等号, 这是不可能的, 等号不成立}$$

$$(III) g(x) = cx^2 + bx + a = cx^2 + \frac{1}{2}(m-n)x + \frac{1}{2}(m+n-2c)$$

$$= c(x^2-1) + m\left(\frac{x+1}{2}\right) + n\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$\text{故 } |g(x)| \leq |c(x^2-1)| + |m\left(\frac{x+1}{2}\right)| + |n\left(\frac{1-x}{2}\right)| \leq (x^2-1) + \left|\frac{x+1}{2}\right| + \left|\frac{1-x}{2}\right|$$

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时, 有 } -1 \leq x \leq 1, x^2-1 \leq 0, \left(\frac{x+1}{2}\right) \geq 0, \left(\frac{1-x}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{故 } |g(x)| \leq (1-x^2) + \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{1-x}{2}\right) = 2-x^2 \leq 2, \text{ 综上所述, 原命题成立}$$

1206、(函数)

已知 $y = f(2x+1)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称, 则 $g(x) + g(-x)$ 的值为()

A、2 B、0 C、1 D、不能确定

解: 因 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称

$$\text{故 } g(x) = f^{-1}(x)$$

$y = f(2x+1)$ 是奇函数于是它的反函数 $y = \frac{1}{2}f^{-1}(x)-1$ 也是奇函数,

$$\text{故 } \frac{1}{2}f^{-1}(x)-1 + \frac{1}{2}f^{-1}(-x)-1 = 0, \text{ 即 } f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 2, \text{ 故选 A}$$

1214、(函数)(竞赛)

$f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数, 且 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$, 则 $f(1)=?$

解: 设 $f(1)=m$, 在 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$ 中令 $x=1$ 得

$$mf(m+1)=1, \text{ 于是 } f(m+1)=\frac{1}{m}$$

在 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$ 中令 $x=m+1$ 得

$$\frac{1}{m}f(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})=1, \text{ 于是 } f(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})=m=f(1)$$

因 $f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数

$$\text{故 } \frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}=1, \text{ 解得 } m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{当 } f(1)=m=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 时}$$

$$\text{因 } f(m+1)=\frac{1}{m}, \text{ 故 } f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是 $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)<f(1)$ 与 $f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数相矛盾

$$\text{因此 } f(1)=m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ 解完}$$

$$\text{注: 函数 } f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 满足条件, 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\sqrt{5}}{2}=0$$

1231、(方程)(函数)

已知 $a>0$, 设 x_1, x_2 为方程 $ax^2+(b-1)x+1=0$ 的两根, 如果 $x_1<2$, 且 $|x_1-x_2|=2$, 求 b 的取值范围

解: 设 $f(x)=ax^2+(b-1)x+1 \quad (a>0)$

因 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$, 所以 x_1, x_2 同号.

(1) 当 $x_1+x_2=\frac{1-b}{a}>0$, 即 $b<1$ 时 x_1, x_2 同正

因 $x_1<2$, $|x_1-x_2|=2$, 于是 $0<x_1<2<x_2$, 且 $x_2-x_1=2$

$$\therefore \text{其充要条件是} \begin{cases} a > 0, b < 1 \\ f(2) < 0 \\ f(0) > 0 \\ \frac{\sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{a} = 2 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a > 0, b < 1 \\ 4a + 2b - 1 < 0 \text{ ①} \\ (2a+1)^2 = (b-1)^2 + 1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由②得 } a = \frac{\sqrt{(b-1)^2 + 1} - 1}{2} \text{ 代入①, 解得 } b < \frac{1}{4}$$

(2) 当 $x_1 + x_2 = \frac{1-b}{a} < 0$, 即 $b > 1$ 时 x_1, x_2 同负, $x_1 < 2$, $|x_1 - x_2| = 2$, 的充要条件是

$$\begin{cases} a > 0, b > 1 \\ (b-1)^2 - 4a > 0 \\ \frac{\sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{a} = 2 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a > 0, b > 1 \\ (b-1)^2 = 4a^2 + 4a > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } b > 1$$

综上: $b < \frac{1}{4}$ 或 $b > 1$

1236、(函数)(竞赛)

设定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{1}{1+|x-1|}$, $x \neq 1$, 若关于 x 的方程 $f(x) = 1$, $x = 1$

$[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$ 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 等于 ()

A、5 B、 $\frac{2b^2+2}{b^2}$ C、13 D、 $\frac{3c^2+2}{c^2}$

答: $[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$ (*) 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 于是

$t^2 + bt + c = 0$ 有正实根, 且 1 为必为一根, 否则

(1) $t^2 + bt + c = 0$ 有两个异于 1 的正根, 则(*)有 4 根

(2) $t^2 + bt + c = 0$ 有恰有一个异于 1 的正根, 则(*)只有 2 根

故 $t^2 + bt + c = 0$ 的正根只能为 1

当 $f(x) = 1$ 时, $x = 0, 1, 2$, 于是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$, 选 A

1243、已知函数 $f(x)$ 定义域是 $\mathbb{R}$ ，且对任意实数 a 都有 $y = f^{-1}(x+a)$ 与

$y = f(x+a)$ 互为反函数，若 $f(2)=1$ ，则 $f(1)=$ _____

解 1: $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数是 $y = f(x)-a$ ，又是 $y = f(x+a)$

于是 $f(x)-a = f(x+a)$ 对 x 与 a 恒成立，令 $x=1, a=1$ 得 $f(1)-1 = f(2)=1$ ，

故 $f(1)=2$

解 2:

因为 $f(2)=1$ 所以 $f(1+1)=1$ ，于是点 $A(1,1)$ 在 $y = f(x+1)$ 的图象上

令 $a=1$ 得 $y = f(x+1)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x+1)$

故把 A 的横纵坐标对调后所得的点 $B(1,1)$ 在 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象上

因此， $f^{-1}(1+1)=1$ 即 $f^{-1}(2)=1 \Rightarrow f(1)=2$

1251、(竞赛)(函数)

已知函数 $f(x-2) = f(2-x)$ ， $f(7+x) = f(7-x)$ ， $x \in [0,7]$ ，只有 $f(1)=f(3)=0$

(1)判定函数 $f(x)$ 其奇偶性(2)求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-2005,2005]$ 上根的个数

解: (1) 因为 $f(x-2) = f(2-x)$

所以 $f(-x) = f[(-x-2)+2] = f[2-(-x-2)] = f(x)$

于是 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称

(2) 因为 $f(7+x) = f(7-x)$

所以 $f(x)$ 图象关于 $x=7$ 对称，并且

$$f(14+x) = f[7+(7+x)] = f[7-(7+x)] = f(-x) = f(x)$$

于是 $f(x)$ 以 14 为周期

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,7]$ ，只有 $f(1)=f(3)=0$ ，图象关于 $x=7$ 对称

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,14]$ ，只有 $f(1)=f(3)=f(11)=f(13)=0$

$f(x)$ 在区间 $[0,14]$ ，只有 $f(1)=f(3)=f(11)=f(13)=0$

因为 $2005 = 143 \times 14 + 3$

故方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0, 2005]$ 上有 $4 \times 143 + 2 = 574$ 个根

于是 $f(x)$ 在区间 $[-2005, 2005]$ 上根的个数有 $574 \times 2 = 1148$ 个

如果按原题已知函数 $f(2+x) = f(2-x)$, $f(7+x) = f(7-x)$, 可得最小正周期为 10, 证法如下

$$\begin{aligned} f(x+10) &= f[7+(3+x)] = f[7-(3+x)] = f(4-x) = f[2-(-2+x)] \\ &= f[2+(-2+x)] = f(x) \end{aligned}$$

1274、(函数)(竞赛)

已知函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象关于直线 $y = x$

对称, 记 $g(x) = f(x)[f(x) + f(2) - 1]$, 若 $y = g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上是增函数, 则实数

a 的范围是() A、 $[2, +\infty)$, B、 $(0, 1) \cup (0, 2)$ C、 $[\frac{1}{2}, 1)$ D、 $(0, \frac{1}{2}]$

解 1: $f(x) = \log_a x$,

$$g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a} (\log_a x + \log_a 2 - 1) + \frac{\log_a x}{x \ln a} = \frac{1}{x \ln a} (2 \log_a x + \log_a 2 - 1) \geq 0$$

对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

当 $a > 1$ 时, 因 $\frac{1}{x \ln a} > 0$, 故 $2 \log_a x + \log_a 2 - 1 \geq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

$$\log_a 2x^2 \geq \log_a a, \quad 2x^2 \geq a, \quad \frac{1}{2} \geq a, \quad \text{此时无解}$$

当 $a < 1$ 时, 因 $\frac{1}{x \ln a} < 0$, 故 $2 \log_a x + \log_a 2 - 1 \leq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

$$\log_a 2x^2 \leq \log_a a, \quad 2x^2 \geq a, \quad \frac{1}{2} \geq a, \quad \text{此时 } 0 < a \leq \frac{1}{2}, \quad \text{于是选 D}$$

解 2: $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$

设 $t = \log_a x$, 于是 $g(x) = y = t(t + 2 \log_a 2 - 1)$

取 $a = 2$ 得 $t = \log_2 x$, $y = t(t + 1)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 2] \Rightarrow t \in [-1, 1]$ 外函数有增有减, 去 A

取 $a = \frac{3}{4}$, $-\log_a 2 + 1 > 1$, 于是 $\frac{-\log_a 2 + 1}{2} > \frac{1}{2}$, $t = \log_2 x \in [-m, m]$,

$m = \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = 1$, 于是 $t = \log_2 x \in [-m, m]$ 有增有减, 去 B、C, 故选 D

解 3: $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$

设 $t = \log_a x$, 于是 $g(x) = y = t(t + 2 \log_a 2 - 1)$, 对称轴 $t = \frac{-\log_a 2 + 1}{2}$

(1) 当 $a > 1$ 时, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $t = \log_a x \in [\log_a \frac{1}{2}, \log_a 2]$

$$\frac{-\log_a 2 + 1}{2} \leq \log_a \frac{1}{2}, \quad -\log_a 2 + 1 \leq 2 \log_a \frac{1}{2}, \quad \log_a a \leq \log_a \frac{1}{2}, \quad a \leq \frac{1}{2} \text{ 矛盾}$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $t = \log_a x \in [\log_a 2, \log_a \frac{1}{2}]$

$$\frac{-\log_a 2 + 1}{2} \geq \log_a \frac{1}{2}, \quad \log_a a \geq \log_a \frac{1}{2}, \quad a \leq \frac{1}{2}, \quad \text{于是 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 故选 D}$$

1296、(函数)

求函数 $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 400} - 3x (0 \leq x \leq 100)$ 的最小值

$$\text{解: } y + 3x = 5\sqrt{x^2 + 400}$$

$$\text{平方整理得 } 16x^2 - 6yx - y^2 + 10000 = 0$$

$$\Delta = 36y^2 - 64(-y^2 + 10000) = 100y^2 - 64 \times 10000 \geq 0$$

解得 $y \geq 80$ 或 $y \leq -80$

$$\text{因 } x \geq 0, \text{ 故 } y = 5\sqrt{x^2 + 400} - 3x > 5x - 3x \geq 0$$

$$\text{于是 } y \geq 80, \text{ 当且仅当 } \Delta = 0 \text{ 时上式取等号, 此时 } x = \frac{6 \times 80}{2 \times 16} = 15 \in [0, 100]$$

故当 $x = 15$ 时, y 取最小值 80

评: (1) 解题不要一味追求巧法, 对于大多数题目来说通法是最好的

(2) 一个题目能够有多种解法, 更有利于学生的理解

1351

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0>

$$f(x) = |\lg x|, \quad a, b \text{ 满足 } f(a) = f(b) = 2f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), \text{ 且 } 0 < a < b,$$

求证: $3 < b < 2 + \sqrt{2}$

证明: 由 $f(a) = f(b)$, 得 $|\lg a| = |\lg b|$, $\lg a = \pm \lg b$, 但 $0 < a < b$

于是 $\lg a = -\lg b$, $0 < a < 1 < b$, $ab = 1$,

$$\text{由 } f(b) = 2f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \text{ 得, } |\lg b| = 2\left|\lg\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\right|$$

$$\text{因 } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \geq \sqrt{ab} = 1, \quad b > 1 \text{ 故, } \lg b = 2\lg\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2}b\right)^2, \quad 4b = \left(\frac{1}{b} + b\right)^2 = b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$$

$$\text{因 } \frac{1}{b^2} > 0, \text{ 故 } 4b > b^2 + 2, \text{ 解得 } 2 - \sqrt{2} < b < 2 + \sqrt{2}$$

因 $\frac{1}{b^2} < 1$, 故 $4b < b^2 + 3$, 解得 $b < 1$ 或 $b > 3$

于是 $3 < b < 2 + \sqrt{2}$

1352

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0>

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 当实数 p, q 满足 $p+q=1$ 时

证明 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$ 对于任意实数 x, y 都成立的充要条件是 $0 \leq p \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{证明: } pf(x)+qf(y)-f(px+qy) &= p(p+q)f(x)+q(p+q)f(y)-f(px+qy) \\ &= p^2f(x)+q^2f(y)+pq[f(x)+f(y)]-f(px+qy) \\ &= p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(x^2+ax+b+y^2+ay+b)-2pqxy-apx-aqy-b \\ &= pq(x-y)^2+p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(ax+b+ay+b)-pax-aqy-b \\ &= pq(x-y)^2+p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(ax+b+ay+b)-p(p+q)ax-q(p+q)ay-b(p+q)^2 \\ &= pq(x-y)^2 \end{aligned}$$

(1) 若 $0 \leq p \leq 1$, 因 $p+q=1$, 故 $0 \leq q \leq 1$ 则 $pq(x-y)^2 \geq 0$

于是 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$

(2) 若 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$, 于任意实数 x, y 都成立, 则 $pq \geq 0$

于是 $p(1-p) \geq 0$, 故 $0 \leq p \leq 1$

1363

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23955&start=0&show=0>

求 $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 的值域

解: (1) 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 0$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

设 $u = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, $t = \frac{1}{x} > 0$,

则 $y = -\frac{1}{\sqrt{u}}$ 于是 $u = 2t^2 + 2t + 1 > 1$

因 $y = -\frac{1}{\sqrt{u}}$ 在 $u \in (1, +\infty)$ 上递增, 于是 $y \in (-1, 0)$

$$(3) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

设 $u = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, $t = \frac{1}{x} < 0$,

$$\text{则 } y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad u = 2t^2 + 2t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{因 } y = \frac{1}{\sqrt{u}} \text{ 在 } u \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上递减, 于是 } y \in (0, \sqrt{2}]$$

综上所述, $y \in (-1, \sqrt{2}]$

1365

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=24110&show=0>

$$f(x) = \log_2 \frac{3x^2 + 2x + n}{mx^2 + 1}, \quad \text{当 } n = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 的值域为 } \mathbb{R}, \text{ 求 } m \text{ 的取值范围}$$

$$\text{解: 当 } n = -1 \text{ 时, } f(x) = \log_2 \frac{3x^2 + 2x - 1}{mx^2 + 1} \text{ 的值域为 } \mathbb{R}$$

$$\text{于是 } t = \frac{3x^2 + 2x - 1}{mx^2 + 1} \text{ 可取到所有正数}$$

即 t 取到所有正数时, 关于 x 的方程 $(tm - 3)x^2 - 2x + t + 1 = 0$ 都有实数根

也就是 $4 - 4(tm - 3)(t + 1) \geq 0$ 对 $t > 0$ 恒成立

$$1 - (tm - 3)(t + 1) \geq 0$$

$$t(t + 1)m - 3t - 4 \leq 0 \text{ 对 } t > 0 \text{ 恒成立}$$

$$m \leq \frac{3t + 4}{t(t + 1)} \text{ 对 } t > 0 \text{ 恒成立}$$

$$\text{设 } u = 3t + 4 > 4, \quad \frac{3t + 4}{t(t + 1)} = \frac{u}{\frac{u - 4}{3} \cdot \frac{u - 1}{3}} = \frac{9u}{u^2 - 5u + 4} = \frac{9}{u + \frac{4}{u} - 5} > 0$$

于是 $m \leq 0$

1402

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=286960&pid=2982424&page=1&extra=pageD1#pid2982424>

在 $f(x)=\sin x$, $f(x)=2^x$, $f(x)=2x+1$, $f(x)=\log_2 x$, $f(x)=x^2$ 这五个函数中, 四个正实数 x_1, x_2, a, b 满足 $x_1 \neq x_2, a \neq b$, 则当 $|b-a| > |x_2-x_1|$ 时, 使

$|f(b)-f(a)| > |f(x_2)-f(x_1)|$ 恒成立的函数的个数是

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

答: 横向距离很大时, 纵向距离可以趋于 0 的, 显然不行

指对函数这样不均匀变化的横向距离小的时候, 纵向距离仍可以很大的也不行

象直线函数这样均匀变化时结论成立

换一种方法说, 导函数是连续变化的就不成立

因此选 A

1455

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=280581&page=3#pid2925379>

$f(x)=1$ 不是周期函数?

答: 常数函数是以任意非零实数为周期的周期函数, 无最小正周期

1468、

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=287865&page=1#pid2991269>

由等式 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$

定义映射 $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. 则 $f(4, 3, 2, 1) = \underline{\hspace{2cm}}?$

答: 设 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$

令 $x=0$ 代入得 $1 = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$

于是 $f(4, 3, 2, 1) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$

廖老师网上千题解答二、超纲函数

6、求 $y = x + \sqrt{1-x^2}$ 的值域

解：由 $1-x^2 \geq 0$ 得 $-1 \leq x \leq 1$ ，于是可设 $x = \sin q$ ($-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}$)，

则 $y = \sin q + \cos q = \sqrt{2} \sin(q + \frac{\pi}{4})$ ，

$$-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq q + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(q + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2}$$

11、已知 $y = f(x+1)+1$ 过点 (m,n) ，求 $y = f(x-1)-1$ 的反函数过点_____。

解： $y = f(x+1)+1$ 过点 $(m,n) \Rightarrow n = f(m+1)+1 \Rightarrow n-2 = f(m+2-1)-1$

$\Rightarrow y = f(x-1)-1$ 过点 $(m+2, n-2) \Rightarrow y = f(x-1)-1$ 的反函数过点 $(n-2, m+2)$

46 如何找一个函数 $f(x)$ 使 $f(x_1)=y_1$ ， $f(x_2)=y_2$ ， $f(x_3)=y_3$ ， $f(x_4)=y_4$

答

(1)插值公式构造是找一个函数 $f(x)$ 它在给定的 n 个 x 的值时，函数取到给定的 n 个值的公式

例如找一个函数 $f(x)$ 使， $f(x_1)=y_1$ ， $f(x_2)=y_2$ ， $f(x_3)=y_3$

适合这一条件的函数有很多其中之一是

$$f(x) = \frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

这个函数叫做插值函数，也叫做插值公式。

(2)自己想一想 $f(x_1)=y_1$ ， $f(x_2)=y_2$ ， $f(x_3)=y_3$ ， $f(x_4)=y_4$ 的插值公式。

(3)为什么适合条件 $f(x_1)=y_1$ ， $f(x_2)=y_2$ ， $f(x_3)=y_3$ 函数 $f(x)$ 有无穷多个呢？

$$f(x) = \frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

当 a 取任意实数时都行

(4)数列是定义在正整数集上的函数，因此数列也有插值公式的。

63、已知 $f(x) = \frac{2x}{1+x}$

求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + \dots + f(\frac{100}{2}) +$
 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + \dots + f(\frac{100}{3}) + \dots + f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + f(\frac{3}{100}) + \dots + f(\frac{100}{100})$

解 $\because f(x) = \frac{2x}{1+x}, f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+x} \therefore f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{1+x} = 2$

由于

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) +$
 $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + \dots + f(\frac{100}{2}) +$
 $f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) + \dots + f(\frac{100}{3}) +$
 $\dots$
 $f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + f(\frac{3}{100}) + \dots + f(\frac{100}{100})$

关于的对角线对称的两数的和是 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 2$ ，对角线上有 100 个 $f(1) = 1$ ，

故这 1 万个数的和为 10000

8 5、函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，若存在 $x_0 \in D$ ，使 $f(x_0) = x_0$ ，则称以 (x_0, x_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点。若 $D = \mathbb{R}$ ，则“ $f(x)$ 为奇函数，且有有限个不动点”是“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”的

- (A) 充要条件
- (B) 充分不必要条件
- (C) 必要不充分条件
- (D) 既不充分也不必要条件

选 B，函数的不动点既是该函数图象与 $y=x$ 的交点

因为 $f(x)$ 为奇函数且定义域为 $\mathbb{R}$ ，所以 $f(x)$ 必过 $(0,0)$ 点

因为 $f(x)$ 为奇函数所以说如果它在第一象限与 $y=x$ 有交点则有在第三象限的交点所以“ $f(x)$ 为奇函数且定义域为 $\mathbb{R}$ 且有有限个不动点”说明了 $f(x)$ 有奇数个不动点

而“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”可以很容易地画出一个与 $y=x$ 交点只有一个的直线（例如 $y=2$ ）所以说“ $f(x)$ 为奇函数，且有有限个不动点”是“ $f(x)$ 有不动点，且个数为奇数个”的充分不必要条件

97、函数 $y=x+\sqrt{x^2+x+1}$ 的值域为_____.

解: $y-x=\sqrt{x^2+x+1}$

$$\begin{cases} y \geq x \\ x^2+x+1 \geq 0 \\ (y-x)^2 = x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x & (1) \\ (y-x)^2 = x^2+x+1 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $x = \frac{y^2-1}{2y+1}$

代入 (1) 得 $y \geq \frac{y^2-1}{2y+1}$, $\frac{y^2+y+1}{2y+1} \geq 0$, $y > -\frac{1}{2}$

123、 若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在 $(0, 1)$ 内恰有一解则 a 的取值范围是?

解: 当 $a=0$ 时原方程就是 $-x-1=0$, $x=-1 \notin (0, 1)$

当 $a \neq 0$ 时, 设 $f(x) = 2ax^2 - x - 1$

① 当 $f(0)f(1) < 0$ 时, 方程 $(0, 1)$ 内恰有一解,

$-1 \cdot (2a-1-1) < 0$, 解得 $a > 1$

② 当方程一个根是 1 时, 则另一个根是 $x = -\frac{1}{2} \notin (0, 1)$

综上: $a > 1$

142、求 $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ 的值域

解 1: $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

用几何意义得 $y \in (-1, 1)$

解 2: $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -1$

故得 $y \in (-1, 1)$

149、 $\sqrt{x^2+1}-ax \geq 1$ 怎么用图象解呀？

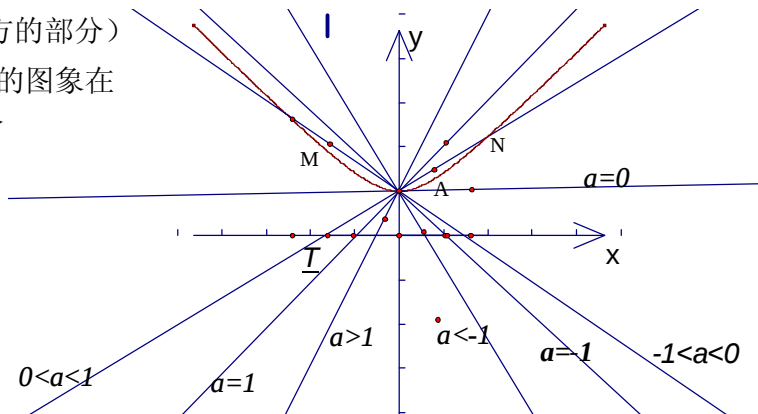
解： $\sqrt{x^2+1}-ax \geq 1$ 化为 $\sqrt{x^2+1} \geq ax+1$

设 $y_1 = \sqrt{x^2+1}$, $y_2 = ax+1$

作出它们的图象

(图中双曲线去掉 x 轴下方的部分)

由观察双曲线 $y_1 = \sqrt{x^2+1}$ 的图象在
直线 $y_2 = ax+1$ 上方的部分



由方程 $\sqrt{x^2+1} = ax+1$, 得 $x^2+1 = a^2x^2 + 2ax+1$

$$(1-a^2)x^2 = 2ax$$

当 $a = \pm 1$ 时, $x = 0$

$$\text{当 } a \neq \pm 1 \text{ 时, } x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$$

1° 当 $a=0$ 时, 解集为 $\mathbb{R}$

2° 当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 0] \cup [\frac{2a}{1-a^2}, +\infty)$

3° 当 $a \geq 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 0]$

4° 当 $a \leq -1$ 时, 解集为 $[0, +\infty)$

5° 当 $-1 < a < 0$ 时, 解集为 $(-\infty, \frac{2a}{1-a^2}] \cup [0, +\infty)$

194、求函数 $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的值域 (联赛)

解: $y - x = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$$\text{等价于 } \begin{cases} y-x \geq 0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \\ (y-x)^2 = x^2-3x+2 \end{cases} \quad \text{等价于 } \begin{cases} y-x \geq 0 & (1) \\ (y-x)^2 = x^2-3x+2 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $x = \frac{y^2-2}{2y-3}$ 代入 (1) 得

$$y - \frac{y^2-2}{2y-3} \geq 0 \text{ 解得 } y \geq 2 \text{ 或 } 1 \leq y < \frac{3}{2}$$

223、已知奇函数 $F(x)$ 定义域为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 且在 $(-\infty, -2)$ 上是增函数, 又

$F(-3)=0, f(\theta)=\cos 2\theta - 2m\cos \theta + 4m, \theta \in [0, \frac{p}{2}]$, 又集合

$M=\{m \mid F[f(\theta)]>0\}, N=\{m \mid f(\theta)>2\}$, 求 $M \cap N$

解: 由 $F[f(\theta)]>0$ 得

$-3 < f(\theta) < -2$, 或 $f(\theta) > 3$

又 $f(\theta) > 2$

故 $M \cap N = \{m \mid f(\theta) > 3\}$

$\cos 2\theta - 2m\cos \theta + 4m > 3$

$m(4 - 2\cos) > 3 - \cos 2q$

$$m > \frac{4 - 2\cos^2 q}{4 - 2\cos q} = \frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q}$$

设 $t = 2 - \cos q \in [1, 2]$ 和, 则 $\cos q = 2 - t$

$$\frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q} = \frac{2 - (2 - t)^2}{t} = \frac{2 + 2t - t^2}{t} = \frac{2}{t} - t + 2$$

在 $t \in [1, 2]$ 上递减, 故 $\frac{2 - \cos^2 q}{2 - \cos q}$ 最大值为 3

因此 $m > 3$, 即 $M \cap N = \{m \mid m > 3\}$

227、已知 $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x + a$, $a > 1$, 若 $|f(x) - ag(x)| \leq |f(x)|$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立, 求 a 的范围

解: $|f(x) - ag(x)| \leq |f(x)|$,

$$U \quad |2\sqrt{x} - a(x + a)| \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x}$$

$$U \quad -2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x} - a(x + a) \leq 2\sqrt{x},$$

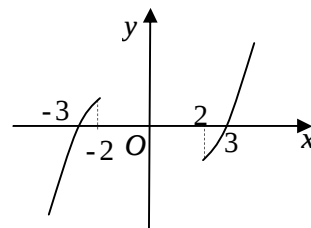
设 $t = \sqrt{x} \in [1, 2]$,

$$-2t \leq 2t - a(t^2 + a) \leq 2t$$

$at^2 - 4t + a^2 \leq 0$ 且 $-a(t^2 + a) \leq 0$ (显然成立)

$$U \quad at^2 - 4t + a^2 \leq 0 \text{ 对 } t \in [1, 2] \text{ 恒成立}$$

设 $Q(t) = at^2 - 4t + a^2, Q(t)_{\max} \leq 0$, 对称轴 $t = \frac{2}{a}$



(1) 当 $1 < a \leq \frac{4}{3}$ 时, $t = \frac{2}{a} \in [\frac{3}{2}, 2)$, $Q(t)_{\max} = Q(1) = a - 4 + a^2 \leq 0, a + a^2 \leq 4$, 成立

(2) 当 $a > \frac{4}{3}$ 时, $t = \frac{2}{a} \in (0, \frac{3}{2})$, $Q(t)_{\max} = Q(2) = 4a - 8 + a^2 \leq 0, a^2 + 4a - 8 \leq 0$

解得 $-2 - 2\sqrt{3} \leq a \leq -2 + 2\sqrt{3}$. 此时 $\frac{4}{3} < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

综上 $1 < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

解 2: 从设 $Q(t)_{\max} \leq 0$ 开始, 由于 $a > 1$

于是 $\begin{cases} Q(1) = a - 4 + a^2 \leq 0 \\ Q(2) = 4a - 8 + a^2 \leq 0 \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq -2 + 2\sqrt{3}$

234、已知 $3f(x+1) - 2f(x-1) = 2x+17$, 求 $f(x)$ (高考不要求)

解: $f(x+1) + k(x+1) + b = \frac{2}{3}[f(x-1) + k(x-1) + b]$

得 $3f(x+1) - 2f(x-1) = -kx - 5k - b$

$-k = 2$ 且 $-5k - b = 17$

$\therefore k = -2$ 且 $b = -7$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = \frac{2}{3}[f(x-1) - 2(x-1) - 7]$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = \frac{2}{3}[f(x-1) - 2(x-1) - 7]$

$f(x+1) - 2(x+1) - 7 = c(\frac{2}{3})^x$

$f(x+1) = c(\frac{2}{3})^{\frac{x}{2}} + 2x + 9 (c \in R)$, 以上解答不一定正确

237、若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数 R 上的函数, 且方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 ()

A. $x^2 + x - \frac{1}{5}$ B. $x^2 + x + \frac{1}{5}$ C. $x^2 - \frac{1}{5}$ D. $x^2 + \frac{1}{5}$

解: 用特例法, 令 $g(x) = x$, 则 $f[g(x)] = f(x)$, $g[f(x)] = f(x)$
方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实根就是 $f(x) = x$ 有实根

对选项逐一判断, 可知只有 $x^2 + x + \frac{1}{5} = x$ 无实数解, 故选 B

说明: 本题是 2004 年浙江理卷, 第 12 题

248、题目:设自然数集 N 与集合 A 之间存在双射 $f:N \rightarrow A$, 则称 A 是可数无限集. 证明整数集 Z 为可数无限集.

最近在研究数学分析,可是发现原本很简单的题目自己都变得无能为力了.对于这个题目,入手我感觉还可以,就是试图找到 N 与 Z 之间的一个双射.可是对于这两个数集是否能构成我束手无策了.显然 Z 的范围要比 N 大(不知这样说可不可以),怎样才能找到那样的一个双射呢?(高考不要求)

证明:把 Z 中的元素按如下顺序排列

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ……

让上面的每个元素与它的序号对应就建立了一个从 Z 到 N 的一一映射

因此 Z 是可数无限集

256、已知函数 $F(X)$ 对任意的实数 X, Y 都有 $F(X+Y)=F(X)+F(Y)+2Y(X+Y)+1$, 且 $F(1)=1$ 问题:若 X 属于 N_+ , 试求 $F(X)$ 的表达式.

解: $F(X+Y)=F(X)+F(Y)+2Y(X+Y)+1$ 中

令 $y=1$ 得 $F(X+1)=F(x)+F(1)+2(X+1)+1= F(x)+ 2X+4$

$F(X+1)- F(x)=2X+4$

当 X 属于 N^* 且 $X \geq 2$ 时

$F(X)= F(1)+ F(2)- F(1)+ F(3)- F(2)+ \dots + F(x)- F(x-1)$

$=1+6+8+10+\dots + 2X+4$

$=1+(x-1)(6+ 2X+4)/2= x^2+4x-4$ 对 $x=1$ 也成立

故当 X 属于 N^* 时 $F(X) = x^2+4x-4$. 157、

276、对于在区间 $[m, n]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对任意的 $x \in [m, n]$, 均有 $|f(x)-g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是接近的, 否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是非接近的, 现有两个函数

$f_1(x) = \log_a(x-3a)$ 与 $f_2(x) = \log_a \frac{1}{x-a} (a > 0, a \neq 1)$ 讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间

$[a+2, a+3]$ 上是否是接近的.

解: $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域分别为 $[a, +\infty)$ 和 $[3a, +\infty)$

首先要有 $[a+2, a+3] \subseteq [a, +\infty)$ 且 $[a+2, a+3] \subseteq [3a, +\infty)$

故 $a+2-3a > 0, a+2-a > 0, \therefore 0 < a < 1$,

由 $|f_1(x)-f_2(x)| = |\log_a(x^2-4ax+3a^2)| \leq 1$, 得 $-1 \leq \log_a(x^2-4ax+3a^2) \leq 1$

因 $0 < a < 1$ 故 $\frac{1}{a} > x^2-4ax+3a^2 > a(1)$

设 $g(x) = x^2-4ax+3a^2 = (x-2a)^2 - a^2$ 使(1)对 $x \in [a+2, a+3]$ 恒成立的充要条件是

$g(x)_{\min} > a$ 且 $g(x)_{\max} < \frac{1}{a}$

$g(x)$ 对称轴 $x=2a, a+2-2a=2-a > 0$, 即 $a+2 > 2a$

故 $g(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上递增,

因此, $g(x)_{\min} = g(a+2) = 9-6a, g(x)_{\max} = g(a+3) = 4-4a$.

所以 $9-6a > a$ 且 $4-4a < \frac{1}{a}$

解得: $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$,

故当 $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$ 时 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上是接近, 此外是不接近的.

294、函数 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $x \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ 的值域中有 10 个不同的整数,求 n

解: $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$

(1) 当 $n \geq 0$ 时区间 $[n, n+1]$ 在对称轴右边

所以 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 在区间 $[n, n+1]$ 上递增

故 $f(x) \in [n^2 + n + \frac{1}{2}, (n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}]$

$$(n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2} - (n^2 + n + \frac{1}{2}) = 10$$

$$(2n+1)+1=10, \quad n=4$$

(2) 当 $n = -1$ 时区间 $[n, n+1] = [-1, 0]$ 则 $f(x) \in [-\frac{1}{4}, 1]$ 不合舍去

(3) 当 $n \leq -2$ 时区间 $[n, n+1]$ 在对称轴左边

所以 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$ 在区间 $[n, n+1]$ 上递减

故 $f(x) \in [(n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}, n^2 + n + \frac{1}{2}]$

$$(n^2 + n + \frac{1}{2}) - ((n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}) = 10$$

$$-(2n+1)-1=10, \quad n=-6$$

综上 $n = 4$ 或 -6

295、定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) = f(x+2)$, 且 $f(1) = 2$

则 $f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2005) = \dots$

解: 定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = f(0) = 0$$

$$f(4) = f(2) = 0$$

.....

因此

$$f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2004) = 0$$

$$\text{又 } f(2005) = f(1) = 2$$

故原式 $= 2$

337、若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 R 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是

A、 $x^2+x-\frac{1}{5}$ B、 $x^2+x+\frac{1}{5}$ C、 $x^2-\frac{1}{5}$ D、 $x^2+\frac{1}{5}$

解法 1：设 $f(x)=x$ ，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$ ，故方程 $x-f[g(x)]=0$

就是 $x-g[f(x)]=0$ 即 $g[f(x)]=x$ (1)

选支 A，方程 (1) 就是 $x^2+x-\frac{1}{5}=x$ 有实根

选支 B，方程 (1) 就是 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$ 无实根

选支 C，方程 (1) 就是 $x^2-\frac{1}{5}=x$ 有实根

选支 D，方程 (1) 就是 $x^2+\frac{1}{5}=x$ 有实根

故选 B

解法 2、设方程 $x-f[g(x)]=0$ 的实根为 a ，则化为 $f[g(a)]=a$

故 $g\{f[g(a)]\}=g(a)$

设 $g(a)=b$ ，则 $g[f(b)]=b$

故方程 $g[f(x)]=x$ (1) 有实根 $x=b$

在选支 B 中，方程 (1) 就是 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$ 无实根，因此 $g[f(x)]$ 不可能是 $x^2+x+\frac{1}{5}$

故选 B

371、设 f 是在实数范围内的函数，且有 $f(x+T)=kf(x)$ ，其中 T 和 k 是正数，证明

对任意实数 x 有 $f(x)=a^x g(x)$ ，其中 a 为常数， $g(x)$ 是周期为 T 的函数 (竞赛)

分析： $\frac{f(T+x)}{a^{T+x}} = \frac{kf(x)}{a^T a^x}$ ，令 $\frac{k}{a^T} = 1$ ，得 $a = k^{\frac{1}{T}}$

因此取 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$ ，就有 $g(x)$ 是周期为 T 的函数

并且 $f(x) = a^x g(x)$

证明：设 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$

则 $g(T+x) = k^{-\frac{T+x}{T}} f(T+x) = k^{-\frac{T}{T}-\frac{x}{T}} \cdot kf(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x) = g(x)$

故 $g(x)$ 是周期为 T 的函数

因为 $g(x) = k^{-\frac{x}{T}} f(x)$

所以 $f(x) = k^{\frac{x}{T}} g(x)$ ，令 $a = k^{\frac{1}{T}}$ ，就有 $f(x) = a^x g(x)$

423、若函数 $y = \frac{ax+1}{4x+3}$ 在其定义域内存在反函数,

(1)求 a 的取值范围;(2)求此函数的值域.(高考不要求)

解: 由 $y = \frac{ax+1}{4x+3} = \frac{\frac{a}{4}(4x+3)+1-\frac{3a}{4}}{4x+3} = \frac{a}{4} + \frac{1-\frac{3a}{4}}{4x+3}$

当 $1 - \frac{3a}{4} = 0$, 即 $a = \frac{4}{3}$ 时 $y = \frac{ax+1}{4x+3} = \frac{1}{3}$ 为常函数, 没有反函数, 此外都有反函数

故 $a \neq \frac{4}{3}$, 此函数的值域是 $y \neq \frac{a}{4}$

424、已知 $f(x) = 2x^2 - 4x + 1, x \in [-4, 0]$. 解不等式 $f^{-1}(7x) < f^{-1}(x-1)$

(高考不要求)

解: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$

$f(x)$ 在 $x \in [-4, 0]$ 上是减函数, 且 $1 \leq f(x) \leq 49$

因此 $f^{-1}(x)$ 是定义在 $[1, 49]$ 上的减函数

故不等式 $f^{-1}(7x) < f^{-1}(x-1)$ 可化为

$$\begin{cases} 7x > x-1 \\ 1 \leq 7x \leq 49 \\ 1 \leq x-1 \leq 49 \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq x \leq 7$$

425、若函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y+2) + 3$,

又 $f(1)=1$, 若 t 为自然数, 试求 $f(t)$ 的表达式

解: 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = -3$

令 $x = t, y = 1$, 得 故 $f(t+1) = f(t) + f(1) + 3t(t+3) + 3 = f(t) + 3t^2 + 9t + 4$,

$f(t+1) - f(t) = 3t^2 + 9t + 4$, 当 $t \in N$ 时

$$f(t) = f(0) + [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \mathbf{L} + [f(t) - f(t-1)]$$

$$= -3 + 4 + (3 \times 1^2 + 9 \times 1 + 4) + (3 \times 2^2 + 9 \times 2 + 4) + \mathbf{L} + [3 \times (t-1)^2 + 9 \times (t-1) + 4]$$

$$= 1 + 3 \times \frac{(t-1)t(2t-1)}{6} + 9 \times \frac{(t-1)t}{2} + 4(t-1) = t^3 + 3t^2 - 3$$

432、已知函数 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} (x \geq 1)$ ，求其反函数的定义域和单调区间

(高考不要求)

$$\text{解: } f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} (x \geq 1)$$

当 $x=1$ 时 $f(x)=0$,

当 $x>1$ 时 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ 是真分数, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1$

故 $f(x)$ 的值域是 $[0, 1)$, 即 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$

当 $x>1$ 时

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3} > 0$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数

故 $f^{-1}(x)$ 在 $[0, 1)$ 上是增函数

445、求 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ 的值域

解: $y^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \in [2, 4]$, $y \geq 0$, 故 $\sqrt{2} \leq y \leq 2$

447、 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 的反函数是什么? (高考不要求)

$$\text{解: } \sqrt{x-5} = 2x - y$$

$$x-5 = 4x^2 - 4yx + y^2$$

$$4x^2 - (4y+1)x + 5 + y^2 = 0$$

$$x = \frac{4y+1 \pm \sqrt{8y-79}}{8}$$

故所求的反函数是 $y = \frac{4x+1+\sqrt{8x-79}}{8} (x \geq 10)$

$y = 2x - \sqrt{x-5}$ 的定义域是 $[5, +\infty)$

$$y^2 = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x-5}} = \frac{4\sqrt{x-5}-1}{2\sqrt{x-5}}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 5\frac{1}{16}$

当 $5 < x < 5\frac{1}{16}$ 时 $y' < 0$ 故 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 在 $5 < x < 5\frac{1}{16}$ 上递减

当 $x > 5\frac{1}{16}$ 时 $y' > 0$ 故 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 在 $x > 5\frac{1}{16}$ 上递增

因此 $y = 2x - \sqrt{x-5}$ 没有反函数

467、已知 $A=B=\mathbb{R}$, x 属于 A , y 属于 B , $f: x \rightarrow y = ax+b$, 若 1, 8 的原象分别是 3 和 10, 求 5 在 f 下的象(函数)

解: 因为 1, 8 的原象分别是 3 和 10

所以 $a+b=3$ 且 $8a+b=10$

解得 $a=1$, $b=2$

因此 $f: x \rightarrow y = x+2$

故 5 在 f 下的象是 $y=5+2=7$

492、 $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, 求其反函数的定义域(函数) (高考不要求)

解: $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$y - x = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ (y - x)^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x \geq 0 & (1) \\ (y - x)^2 = x^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $y^2 - 2xy = -1$, 易知 $y = 0$ 等式不成立, 故 $y \neq 0$, $x = \frac{y^2 + 1}{2y}$ 代入 (1)

$$y - \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 0, \quad \frac{y^2 - 1}{y} \geq 0, \quad \text{解得 } y \geq 1 \text{ 或 } -1 \leq y < 0$$

故其反函数的定义域为 $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$

566、题: 2, 15, 7, 40, 77 接下来的数是什么?

想不出什么方便的方法, 只好用插值法了 (数值计算)

解: 设

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + \frac{15(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} \\ &+ \frac{7(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + \frac{40(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} + \frac{77(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(6) = \frac{2(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + \frac{15(6-1)(6-3)(6-4)(6-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$+ \frac{7(6-1)(6-2)(6-4)(6-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + \frac{40(6-1)(6-2)(6-3)(6-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} + \frac{77(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

$$= 2 - 75 + 70 - 400 + 770 = 367$$

592、求 $y = x\sqrt{1-2x}$ 的值域(不等式)

解：定义域为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ ，当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时

$$y = x\sqrt{1-2x} = \sqrt{xx(1-2x)} \leq \sqrt{\left(\frac{x+x+1-2x}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时取等号}$$

当 $x \leq 0$ 时 $y = x\sqrt{1-2x}$ 是增函数，

$$y = x\sqrt{1-2x} \leq 0\sqrt{1-2 \times 0} = 0, \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时 } y = x\sqrt{1-2x} \rightarrow -\infty$$

综上 $y = x\sqrt{1-2x}$ 的值域是 $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{9}]$

628、已知定义域为 $[0,1]$ 的函数 $f(x)$ 同时满足：对任意的 $x \in [0,1]$ ，总有 $f(x) \geq 0$ ，

$$f(1)=1, \text{ 若 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \in [0,1] \text{ 有 } f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$$

(1)求 $f(x)$ 的最大值 (2)求证 $f(x) \leq 2x$ (函数) (推理) (高考难题)

(1)解：设任意 $x_1, x_2 \in [0,1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 - x_1 \in [0,1]$ ，于是 $f(x_2 - x_1) \geq 0$

$$f(x_2) = f(x_2 - x_1 + x_1) \geq f(x_2 - x_1) + f(x_1) \geq f(x_1)$$

于是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 不减， $f(x)$ 的最大值 $= f(1) = 1$

(2)证明 $f(0+1) \geq f(0) + f(1) \geq f(0) \geq 0$ ，又 $f(0) \geq 0 \geq f(0) = 0$

$$f(0+1) \geq f(0) + f(1) \geq f(0) \geq 0, \text{ 又 } f(0) \geq 0 \geq f(0) = 0$$

当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时， $f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(1) = 1 \leq 2x$

当 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时， $2f(\frac{1}{2}) \leq f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}, f(x) \leq f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} \leq 2x$ ，

当 $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$ 时， $2f(\frac{1}{4}) \leq f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}, f(\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{4}, f(x) \leq f(\frac{1}{4}) \leq \frac{1}{4} \leq 2x$ ，

假设 $\frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}$ 时，都有 $f(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}$ 且 $f(x) \leq 2x$

则当 $\frac{1}{2^{n+2}} \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ 时，

$$2f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq f(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}, f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}, f(x) \leq f(\frac{1}{2^{n+1}}) \leq 2x$$

于是 $f(x) \leq 2x$ 对所有的 $x \in [0,1]$ 总成立

655、 $y = f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x+a)$ 与 $f(x+a)$ 互为反函数, 若

$f(a) = a$, 则 $f(2a) = ()$ (函数) (高考不要求)

A -a B 0 C a D 2a

解: 由 $y = f^{-1}(x+a)$ 得 $x+a = f(y)$, $x = f(y) - a$

故 $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数是 $y = f(x) - a$

故 $f(x+a) = f(x) - a$, $f(2a) = f(a) - a = 0$

777、试定义两个函数 $f(x), g(x)$ 满足

(1) 它们定义域均为 $(0, 1)$ (2) 他们的值域都是 $[0, 1]$

(3) 对于任意的实数 $a \in (0, 1)$, $f(x) = a$ 有惟一解, $g(x) = a$ 有无穷多解

解: (1) 当 $x \in (0, 1)$ 且为无理数时 $f(x) = x$

当 $x \in (0, 1)$ 且为有理数时, 我们先把 $(0, 1)$ 中的有理数按如下方法排成队

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \mathbf{L}$, 删除重复的有理数后的序列为

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \mathbf{L}, a_n, \mathbf{L}$

定义 $f(a_1) = 0, f(a_2) = 1, f(a_3) = a_1, f(a_4) = a_2, \mathbf{L}$, 当 $n \geq 3$ 时 $f(a_n) = a_{n-2}$

(2) $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件

803、 $f(x) = -bx^2 + ax$, $a > 0, b > 1, x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1$,

命题 $P: x \in [0, 1], |f(x)| \leq 1$, 命题 $Q: b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$

证明: $P \Rightarrow Q$ (函数) (推理)

证明: $f(x) = -bx^2 + ax = -b(x^2 - \frac{a}{b}x) = -b(x - \frac{a}{2b})^2 + \frac{a^2}{2b}$

在 $\frac{a}{2b} \geq 1$ 即 $a \geq 2b$ 的条件下, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $f(1) = a - b \leq 1$, 于是 $a \leq b + 1$, 故 $2b \leq b + 1, b \leq 1$

与 $b > 1$ 矛盾, 因此 $\frac{a}{2b} < 1$, 在此大前提下

命题 P 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{a}{2b}) = \frac{a^2}{2b} \leq 1 \\ f(1) = a - b \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2\sqrt{b} \\ a \geq b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b} \Leftrightarrow \text{命题 P 成立}$

804、 $f(x) = -bx^2 + ax$, $a > 0, 0 < b \leq 1$,

求使 $x \in [0,1], |f(x)| \leq 1$ 成立的充要条件 (函数) (推理)

解: $f(x) = -bx^2 + ax = -b(x^2 - \frac{a}{b}x) = -b(x - \frac{a}{2b})^2 + \frac{a^2}{2b}$

(1) 当 $\frac{a}{2b} \geq 1$ 即 $a \geq 2b$ 时, 当 $x \in [0,1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $f(1) = a - b \leq 1$, 即 $a \leq b + 1$, 由于 $2b \leq b + 1$

故此时 $2b \leq a \leq b + 1$

(2) 当 $\frac{a}{2b} < 1$ 即 $0 < a < 2b$ 时, 当 $x \in [0,1]$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$ 恒成立

的充要条件是 $\begin{cases} f(\frac{a}{2b}) = \frac{a^2}{2b} \leq 1 \\ f(1) = a - b \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2\sqrt{b} \\ a \geq b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$

由于 $2\sqrt{b} \geq 2b$, $b - 1 \leq 0$ 此时 $0 < a \leq 2b$

综上: $0 < a \leq b + 1$

923、(函数)

函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数是

A、 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ B、 $y = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ C、 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ D、 $y = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

解: 原函数当 $x = 0$ 时 $y = 0$ 于是排除 A、B

原函数当 x 是很大的正数时, y 也是较大的正数, 于是排除 D

故选 C

924、(函数)

已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1 \neq x_2$, $l \neq -1$,

$a = \frac{x_1 + lx_2}{1+l}$, $b = \frac{x_2 + lx_1}{1+l}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(a) - f(b)|$, 则

A、 $l < 0$ B、 $l = 0$ C、 $0 < l < 1$ D、 $l \geq 1$

解: 当 $l = 0$ 时 $a = x_1$, $b = x_2$ 则 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(a) - f(b)|$ 不成立
排除 B

当 $0 < l < 1$ 或 $l \geq 1$ 时 a , b 是以 x 轴上以数 x_1, x_2 为端点的线段的内分点
作图可知, $|f(x_1) - f(x_2)| > |f(a) - f(b)|$, 于是排除 C、D

综上, 选 A

947、(导数)

已知函数 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的反函数, $g(x)=2^x-1$, 设 $a>b>0$, 比较 $\frac{f(a)}{a}$ 与 $\frac{f(b)}{b}$ 的大小。

解: $g(x)=2^x-1$ 的反函数是 $y = \log_2(x+1)$

故 $f(x) = \log_2(x+1)$

$$\text{设 } F(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\log_2(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x \ln 2}, \quad F'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2 \ln 2},$$

$$\text{设 } q(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1), \quad \text{则 } q'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

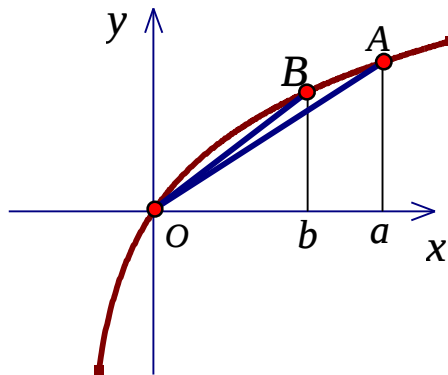
当 $x=0$ 时 $q'(x)=0$,

当 $x>0$ 时 $q'(x)<0$, 故 $q(x)<q(0)=0$,

$$\text{于是当 } x>0 \text{ 时 } F'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2 \ln 2} < 0$$

因此 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减,

因 $a>b>0$ 故 $F(a)<F(b)$ 即 $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$



注: 若是小题可用图象 $\frac{f(a)}{a} = k_{OA}, \frac{f(b)}{b} = k_{OB}$

975、(函数)

设 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且函数 $y = f(x+2)$ 与 $y = f^{-1}(x-1)$ 互为反函数, 求 $f^{-1}(1) - f^{-1}(0)$ 的值。

解: 先求 $y = f(x+2)$ 的反函数

$$\text{由 } y = f(x+2) \text{ 得 } x+2 = f^{-1}(y), \quad x = f^{-1}(y) - 2$$

于是 $y = f(x+2)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x) - 2$

$$\text{因此 } f^{-1}(x) - 2 = f^{-1}(x-1)$$

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(x-1) = 2$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = 2$$

977、(函数)(推理)

已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > b > c)$ 的图像上有两点 $A(m_1, f(m_1))$, $B(m_2, f(m_2))$, 满足 $f(1)=0$ 且 $a^2 + [f(m_1) + f(m_2)]a + f(m_1)f(m_2) = 0$

(1) 求证: $f(x)$ 的图像被 x 轴所截得的线段长的取值范围是 $[2, 3)$ 。

(2) 求证: $b \geq 0$ (3) 问能否得出 $f(m_1 + 3)$, $f(m_2 + 3)$ 中至少有一个为正数?

请证明你的结论。

$$(1) a^2 + [f(m_1) + f(m_2)]a + f(m_1)f(m_2) = 0, [a + f(m_1)][a + f(m_2)] = 0$$

$$f(m_1) = -a \text{ 或 } f(m_2) = -a, \text{ 故方程 } ax^2 + bx + c = -a \text{ 有实根}$$

$$\text{于是 } \Delta = b^2 - 4a(a+c) \geq 0 \quad ①$$

$$\because f(1)=0, \therefore a+b+c=0$$

$$\mathbf{Q} a > b > c, \therefore 0 = a+b+c > c+c+c=3c, \quad 0 = a+b+c < a+a+a=3a, \therefore a > 0, c < 0,$$

$$\because a > b, b = -a-c \therefore a > -a-c \quad \therefore -2 < \frac{c}{a} \quad ②$$

$$\because b > c, b = -a-c \therefore -a-c > c \quad \therefore \frac{c}{a} < -\frac{1}{2} \quad ③$$

$$\text{把 } b = -a-c \text{ 代入 } ① \text{ 得 } (a+c)(c-3a) \geq 0, \quad \left(\frac{c}{a}+1\right)\left(\frac{c}{a}-3\right) \geq 0, \quad \frac{c}{a} \leq -1 \text{ 或 } \frac{c}{a} \geq 3 \quad ④$$

$$\text{由 } ②③④ \text{ 得 } -2 < \frac{c}{a} \leq -1$$

因为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根是

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

所以 $f(x)$ 的图像被 x 轴所截得的线段长

$$l = |x_2 - x_1| = x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{(a-c)^2}}{a} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

这个关于 $\frac{c}{a}$ 函数在 $-2 < \frac{c}{a} \leq -1$ 上递减, 于是 $l \in [2, 3)$

$$(2) \text{ 因 } b = -a-c, a > 0 \text{ 故 } \frac{b}{a} = -1 - \frac{c}{a}$$

$$\text{因 } -2 < \frac{c}{a} \leq -1 \text{ 故 } 0 \leq -1 - \frac{c}{a} < 1, \text{ 所以 } \frac{b}{a} \geq 0, b \geq 0$$

$$(3) \text{ 若 } f(m_1) = -a, \text{ 因 } a > 0 \text{ 得 } f(m_1) < 0$$

$$\text{因 } f(1)=0 \text{ 故 } f(x) = a(x-1)\left(x - \frac{c}{a}\right)$$

$$\text{即 } f(m_1) = a(m_1-1)\left(m_1 - \frac{c}{a}\right) < 0, (m_1-1)\left(m_1 - \frac{c}{a}\right) < 0,$$

$$\text{因 } \frac{c}{a} \leq 1 \text{ 故 } \frac{c}{a} < m_1 < 1 \text{ 又 } \frac{c}{a} > -2, \text{ 故 } m_1+3 > \frac{c}{a}+3 > -2+3=1$$

$$\text{因 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递增, 故 } f(m_1+3) > f(1)=0$$

$$\text{若 } f(m_2) = -a \text{ 同理可证 } f(m_2+3) > 0$$

因此 $f(m_1+3)$, $f(m_2+3)$ 中至少有一个为正数

988、(函数)

已知函数 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$ 的反函数的对称中心是 $(-1, 3)$, 则实数 a 等于()

A、-2、 B、3 C、2 D、-4

解：因 $f(x)$ 反函数的对称中心是 $(-1, 3)$,

$$\text{故 } f(x) = \frac{a-x}{x-a-1} = \frac{-1-(x-a-1)}{x-a-1} = \frac{-1}{x-a-1} - 1 \text{ 对称中心为 } (3, -1)$$

于是 $a+1=3$, $a=2$

1003、(函数)

在 $P(1,1), Q(1,2), M(2,3), N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 四点中, 函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像与其反

函数图像的公共点只可能是点

A.P B.Q C.M D.N

解：函数 $y = a^x$, 反函数 $y = \log_a x$

第一步：检验 A, 把 $P(1,1)$ 代入 $y = a^x$ 得 $a=1$, 与 $a \neq 1$ 矛盾

第二步：检验 B, 把 $P(1,2)$ 代入 $y = \log_a x$, $\log_a 1 = 2$ 矛盾式

第三步：检验 C, 把 $P(2,3)$ 代入 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$, 得

$a = \sqrt{3}$ 和 $a = \sqrt[3]{2}$ 矛盾

故选 D

1030、(函数)(推理)

已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 当 $|x| \leq 1$ 时有 $|f(x)| \leq 1$

(I) 求证：当 $|x| \leq 2$ 时 $|ax^2 + bx + c| \leq 7$

(II) 求证： $|x| \leq 1$ 时 $|2ax + b| \leq 4$ 并讨论等号能否成立

(III) 求证： $|x| \leq 1$ 时 $|cx^2 + bx + a| \leq 2$

证明：(I) 设 $f(1) = m$, $f(-1) = n$, $f(0) = c$,

因为，当 $|x| \leq 1$ 时有 $|f(x)| \leq 1$, 所以, $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$, $|c| \leq 1$

因为, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$, $f(0) = c$

所以 $a + b + c = m$, $a - b + c = n$ 解得 $a = \frac{1}{2}(m + n - 2c)$, $b = \frac{1}{2}(m - n)$,

于是 $f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{2}(m + n - 2c)x^2 + \frac{1}{2}(m - n)x + c$

$$= \frac{1}{2}m(x^2 + x) + \frac{1}{2}n(x^2 - x) + c(1 - x^2)$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|m||x^2 + x| + \frac{1}{2}|n||x^2 - x| + |c||1 - x^2|$$

$$\leq \frac{1}{2}|x^2 + x| + \frac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2|$$

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (x^2-1) = 2x^2 - 1 \leq 7$$

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) - \frac{1}{2}(x^2-x) + (1-x^2) = 1+x-x^2 < 1+1-0 = 2$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时, } |f(x)| \leq -\frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (1-x^2) = 1-x-x^2 < 1+1-0 = 2$$

$$\text{当 } -2 \leq x \leq -1 \text{ 时, } |f(x)| \leq \frac{1}{2}(x^2+x) + \frac{1}{2}(x^2-x) + (x^2-1) = 2x^2 - 1 \leq 7$$

综上所述, $|f(x)| \leq 7$

$$(II) \text{ 因 } 2ax+b = m(x+\frac{1}{2}) + n(x-\frac{1}{2}) + 2cx$$

$$\text{故 } |2ax+b| \leq |m|(x+\frac{1}{2}) + |n|(x-\frac{1}{2}) + |2c||x| \leq |x+\frac{1}{2}| + |x-\frac{1}{2}| + |x|$$

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时, } |x+\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}, |x-\frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}, |x| \leq 1, \text{ 于是 } |2ax+b| \leq 4$$

$$\text{当 } |x+\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}, |x-\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}, |x|=1 \text{ 同时成立时取等号, 这是不可能的, 等号不成立}$$

$$(III) g(x) = cx^2 + bx + a = cx^2 + \frac{1}{2}(m-n)x + \frac{1}{2}(m+n-2c)$$

$$= c(x^2-1) + m\left(\frac{x+1}{2}\right) + n\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$\text{故 } |g(x)| \leq |c(x^2-1)| + |m\left(\frac{x+1}{2}\right)| + |n\left(\frac{1-x}{2}\right)| \leq (x^2-1) + \left|\frac{x+1}{2}\right| + \left|\frac{1-x}{2}\right|$$

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时, 有 } -1 \leq x \leq 1, x^2-1 \leq 0, \left(\frac{x+1}{2}\right) \geq 0, \left(\frac{1-x}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{故 } |g(x)| \leq (1-x^2) + \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{1-x}{2}\right) = 2-x^2 \leq 2, \text{ 综上所述, 原命题成立}$$

1206、(函数)

已知 $y = f(2x+1)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称, 则 $g(x) + g(-x)$ 的值为()

A、2 B、0 C、1 D、不能确定

解: 因 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $y = x$ 对称

$$\text{故 } g(x) = f^{-1}(x)$$

$y = f(2x+1)$ 是奇函数于是它的反函数 $y = \frac{1}{2}f^{-1}(x)-1$ 也是奇函数,

故 $\frac{1}{2}f^{-1}(x)-1 + \frac{1}{2}f^{-1}(-x)-1 = 0$, 即 $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 2$, 故选 A

1214、(函数)(竞赛)

$f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数, 且 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$, 则 $f(1)=?$

解: 设 $f(1)=m$, 在 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$ 中令 $x=1$ 得

$$mf(m+1)=1, \text{ 于是 } f(m+1)=\frac{1}{m}$$

在 $f(x)f[f(x)+\frac{1}{x}]=1$ 中令 $x=m+1$ 得

$$\frac{1}{m}f(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})=1, \text{ 于是 } f(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})=m=f(1)$$

因 $f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数

$$\text{故 } \frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}=1, \text{ 解得 } m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{当 } f(1)=m=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 时}$$

$$\text{因 } f(m+1)=\frac{1}{m}, \text{ 故 } f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

于是 $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)<f(1)$ 与 $f(x)$ 是一个定义在正实数集上的增函数相矛盾

$$\text{因此 } f(1)=m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{ 解完}$$

$$\text{注: 函数 } f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 满足条件, 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\sqrt{5}}{2}=0$$

1231、(方程)(函数)

已知 $a>0$, 设 x_1, x_2 为方程 $ax^2+(b-1)x+1=0$ 的两根, 如果 $x_1<2$, 且 $|x_1-x_2|=2$, 求 b 的取值范围

解: 设 $f(x)=ax^2+(b-1)x+1 \quad (a>0)$

因 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$, 所以 x_1, x_2 同号.

(1) 当 $x_1+x_2=\frac{1-b}{a}>0$, 即 $b<1$ 时 x_1, x_2 同正

因 $x_1<2, |x_1-x_2|=2$, 于是 $0<x_1<2<x_2$, 且 $x_2-x_1=2$

$$\therefore \text{其充要条件是} \begin{cases} a > 0, b < 1 \\ f(2) < 0 \\ f(0) > 0 \\ \frac{\sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{a} = 2 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a > 0, b < 1 \\ 4a + 2b - 1 < 0 \text{ ①} \\ (2a+1)^2 = (b-1)^2 + 1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由②得 } a = \frac{\sqrt{(b-1)^2 + 1} - 1}{2} \text{ 代入①, 解得 } b < \frac{1}{4}$$

(2) 当 $x_1 + x_2 = \frac{1-b}{a} < 0$, 即 $b > 1$ 时 x_1, x_2 同负, $x_1 < 2$, $|x_1 - x_2| = 2$, 的充要条件是

$$\begin{cases} a > 0, b > 1 \\ (b-1)^2 - 4a > 0 \\ \frac{\sqrt{(b-1)^2 - 4a}}{a} = 2 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a > 0, b > 1 \\ (b-1)^2 = 4a^2 + 4a > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } b > 1$$

综上: $b < \frac{1}{4}$ 或 $b > 1$

1236、(函数)(竞赛)

设定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{1}{1+|x-1|}$, $x \neq 1$, 若关于 x 的方程 $f(x) = 1$, $x = 1$

$[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$ 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 等于 ()

A、5 B、 $\frac{2b^2+2}{b^2}$ C、13 D、 $\frac{3c^2+2}{c^2}$

答: $[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$ (*) 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 , 于是

$t^2 + bt + c = 0$ 有正实根, 且 1 为必为一根, 否则

(1) $t^2 + bt + c = 0$ 有两个异于 1 的正根, 则(*)有 4 根

(2) $t^2 + bt + c = 0$ 有恰有一个异于 1 的正根, 则(*)只有 2 根

故 $t^2 + bt + c = 0$ 的正根只能为 1

当 $f(x) = 1$ 时, $x = 0, 1, 2$, 于是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$, 选 A

1243、已知函数 $f(x)$ 定义域是 $\mathbb{R}$ ，且对任意实数 a 都有 $y = f^{-1}(x+a)$ 与

$y = f(x+a)$ 互为反函数，若 $f(2)=1$ ，则 $f(1)=$ _____

解 1: $y = f^{-1}(x+a)$ 的反函数是 $y = f(x)-a$ ，又是 $y = f(x+a)$

于是 $f(x)-a = f(x+a)$ 对 x 与 a 恒成立，令 $x=1, a=1$ 得 $f(1)-1 = f(2)=1$ ，

故 $f(1)=2$

解 2:

因为 $f(2)=1$ 所以 $f(1+1)=1$ ，于是点 $A(1,1)$ 在 $y = f(x+1)$ 的图象上

令 $a=1$ 得 $y = f(x+1)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x+1)$

故把 A 的横纵坐标对调后所得的点 $B(1,1)$ 在 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象上

因此， $f^{-1}(1+1)=1$ 即 $f^{-1}(2)=1 \Rightarrow f(1)=2$

1251、(竞赛)(函数)

已知函数 $f(x-2) = f(2-x)$ ， $f(7+x) = f(7-x)$ ， $x \in [0,7]$ ，只有 $f(1)=f(3)=0$

(1)判定函数 $f(x)$ 其奇偶性(2)求方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-2005,2005]$ 上根的个数

解: (1) 因为 $f(x-2) = f(2-x)$

所以 $f(-x) = f[(-x-2)+2] = f[2-(-x-2)] = f(x)$

于是 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称

(2) 因为 $f(7+x) = f(7-x)$

所以 $f(x)$ 图象关于 $x=7$ 对称，并且

$$f(14+x) = f[7+(7+x)] = f[7-(7+x)] = f(-x) = f(x)$$

于是 $f(x)$ 以 14 为周期

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,7]$ ，只有 $f(1)=f(3)=0$ ，图象关于 $x=7$ 对称

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,14]$ ，只有 $f(1)=f(3)=f(11)=f(13)=0$

$f(x)$ 在区间 $[0,14]$ ，只有 $f(1)=f(3)=f(11)=f(13)=0$

因为 $2005 = 143 \times 14 + 3$

故方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0, 2005]$ 上有 $4 \times 143 + 2 = 574$ 个根

于是 $f(x)$ 在区间 $[-2005, 2005]$ 上根的个数有 $574 \times 2 = 1148$ 个

如果按原题已知函数 $f(2+x) = f(2-x)$, $f(7+x) = f(7-x)$, 可得最小正周期为 10, 证法如下

$$\begin{aligned} f(x+10) &= f[7+(3+x)] = f[7-(3+x)] = f(4-x) = f[2-(-2+x)] \\ &= f[2+(-2+x)] = f(x) \end{aligned}$$

1274、(函数)(竞赛)

已知函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象关于直线 $y = x$

对称, 记 $g(x) = f(x)[f(x) + f(2) - 1]$, 若 $y = g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上是增函数, 则实数

a 的范围是() A、 $[2, +\infty)$, B、 $(0, 1) \cup (0, 2)$ C、 $[\frac{1}{2}, 1)$ D、 $(0, \frac{1}{2}]$

解 1: $f(x) = \log_a x$,

$$g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a} (\log_a x + \log_a 2 - 1) + \frac{\log_a x}{x \ln a} = \frac{1}{x \ln a} (2 \log_a x + \log_a 2 - 1) \geq 0$$

对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

当 $a > 1$ 时, 因 $\frac{1}{x \ln a} > 0$, 故 $2 \log_a x + \log_a 2 - 1 \geq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

$$\log_a 2x^2 \geq \log_a a, \quad 2x^2 \geq a, \quad \frac{1}{2} \geq a, \quad \text{此时无解}$$

当 $a < 1$ 时, 因 $\frac{1}{x \ln a} < 0$, 故 $2 \log_a x + \log_a 2 - 1 \leq 0$ 对 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立

$$\log_a 2x^2 \leq \log_a a, \quad 2x^2 \geq a, \quad \frac{1}{2} \geq a, \quad \text{此时 } 0 < a \leq \frac{1}{2}, \quad \text{于是选 D}$$

解 2: $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$

设 $t = \log_a x$, 于是 $g(x) = y = t(t + 2 \log_a 2 - 1)$

取 $a = 2$ 得 $t = \log_2 x$, $y = t(t + 1)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 2] \Rightarrow t \in [-1, 1]$ 外函数有增有减, 去 A

取 $a = \frac{3}{4}$, $-\log_a 2 + 1 > 1$, 于是 $\frac{-\log_a 2 + 1}{2} > \frac{1}{2}$, $t = \log_2 x \in [-m, m]$,

$m = \log_{\frac{3}{4}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = 1$, 于是 $t = \log_2 x \in [-m, m]$ 有增有减, 去 B、C, 故选 D

解 3: $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_a x (\log_a x + \log_a 2 - 1)$

设 $t = \log_a x$, 于是 $g(x) = y = t(t + 2 \log_a 2 - 1)$, 对称轴 $t = \frac{-\log_a 2 + 1}{2}$

(1) 当 $a > 1$ 时, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $t = \log_a x \in [\log_a \frac{1}{2}, \log_a 2]$

$$\frac{-\log_a 2 + 1}{2} \leq \log_a \frac{1}{2}, \quad -\log_a 2 + 1 \leq 2 \log_a \frac{1}{2}, \quad \log_a a \leq \log_a \frac{1}{2}, \quad a \leq \frac{1}{2} \text{ 矛盾}$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, $t = \log_a x \in [\log_a 2, \log_a \frac{1}{2}]$

$$\frac{-\log_a 2 + 1}{2} \geq \log_a \frac{1}{2}, \quad \log_a a \geq \log_a \frac{1}{2}, \quad a \leq \frac{1}{2}, \quad \text{于是 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 故选 D}$$

1296、(函数)

求函数 $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 400} - 3x (0 \leq x \leq 100)$ 的最小值

$$\text{解: } y + 3x = 5\sqrt{x^2 + 400}$$

$$\text{平方整理得 } 16x^2 - 6yx - y^2 + 10000 = 0$$

$$\Delta = 36y^2 - 64(-y^2 + 10000) = 100y^2 - 64 \times 10000 \geq 0$$

解得 $y \geq 80$ 或 $y \leq -80$

$$\text{因 } x \geq 0, \text{ 故 } y = 5\sqrt{x^2 + 400} - 3x > 5x - 3x \geq 0$$

$$\text{于是 } y \geq 80, \text{ 当且仅当 } \Delta = 0 \text{ 时上式取等号, 此时 } x = \frac{6 \times 80}{2 \times 16} = 15 \in [0, 100]$$

故当 $x = 15$ 时, y 取最小值 80

评: (1) 解题不要一味追求巧法, 对于大多数题目来说通法是最好的

(2) 一个题目能够有多种解法, 更有利于学生的理解

1351

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0>

$$f(x) = |\lg x|, \quad a, b \text{ 满足 } f(a) = f(b) = 2f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), \text{ 且 } 0 < a < b,$$

求证: $3 < b < 2 + \sqrt{2}$

证明: 由 $f(a) = f(b)$, 得 $|\lg a| = |\lg b|$, $\lg a = \pm \lg b$, 但 $0 < a < b$

于是 $\lg a = -\lg b$, $0 < a < 1 < b$, $ab = 1$,

$$\text{由 } f(b) = 2f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \text{ 得, } |\lg b| = 2\left|\lg\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\right|$$

$$\text{因 } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \geq \sqrt{ab} = 1, \quad b > 1 \text{ 故, } \lg b = 2\lg\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2}b\right)^2, \quad 4b = \left(\frac{1}{b} + b\right)^2 = b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}$$

$$\text{因 } \frac{1}{b^2} > 0, \text{ 故 } 4b > b^2 + 2, \text{ 解得 } 2 - \sqrt{2} < b < 2 + \sqrt{2}$$

因 $\frac{1}{b^2} < 1$, 故 $4b < b^2 + 3$, 解得 $b < 1$ 或 $b > 3$

于是 $3 < b < 2 + \sqrt{2}$

1352

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23596&start=0&show=0>

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 当实数 p, q 满足 $p+q=1$ 时

证明 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$ 对于任意实数 x, y 都成立的充要条件是 $0 \leq p \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{证明: } pf(x)+qf(y)-f(px+qy) &= p(p+q)f(x)+q(p+q)f(y)-f(px+qy) \\ &= p^2f(x)+q^2f(y)+pq[f(x)+f(y)]-f(px+qy) \\ &= p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(x^2+ax+b+y^2+ay+b)-2pqxy-apx-aqy-b \\ &= pq(x-y)^2+p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(ax+b+ay+b)-pax-aqy-b \\ &= pq(x-y)^2+p^2(ax+b)+q^2(ay+b)+pq(ax+b+ay+b)-p(p+q)ax-q(p+q)ay-b(p+q)^2 \\ &= pq(x-y)^2 \end{aligned}$$

(1) 若 $0 \leq p \leq 1$, 因 $p+q=1$, 故 $0 \leq q \leq 1$ 则 $pq(x-y)^2 \geq 0$

于是 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$

(2) 若 $pf(x)+qf(y) \geq f(px+qy)$, 于任意实数 x, y 都成立, 则 $pq \geq 0$

于是 $p(1-p) \geq 0$, 故 $0 \leq p \leq 1$

1363

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23955&start=0&show=0>

求 $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 的值域

解: (1) 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 0$

(2) 当 $x > 0$ 时, $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

设 $u = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, $t = \frac{1}{x} > 0$,

则 $y = -\frac{1}{\sqrt{u}}$ 于是 $u = 2t^2 + 2t + 1 > 1$

因 $y = -\frac{1}{\sqrt{u}}$ 在 $u \in (1, +\infty)$ 上递增, 于是 $y \in (-1, 0)$

(3) 当 $x < 0$ 时, $y = -\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

设 $u = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, $t = \frac{1}{x} < 0$,

$$\text{则 } y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad u = 2t^2 + 2t + 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{因 } y = \frac{1}{\sqrt{u}} \text{ 在 } u \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上递减, 于是 } y \in (0, \sqrt{2}]$$

综上所述, $y \in (-1, \sqrt{2}]$

1365

<http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=24110&show=0>

$$f(x) = \log_2 \frac{3x^2 + 2x + n}{mx^2 + 1}, \quad \text{当 } n = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 的值域为 } \mathbb{R}, \text{ 求 } m \text{ 的取值范围}$$

$$\text{解: 当 } n = -1 \text{ 时, } f(x) = \log_2 \frac{3x^2 + 2x - 1}{mx^2 + 1} \text{ 的值域为 } \mathbb{R}$$

$$\text{于是 } t = \frac{3x^2 + 2x - 1}{mx^2 + 1} \text{ 可取到所有正数}$$

即 t 取到所有正数时, 关于 x 的方程 $(tm - 3)x^2 - 2x + t + 1 = 0$ 都有实数根

也就是 $4 - 4(tm - 3)(t + 1) \geq 0$ 对 $t > 0$ 恒成立

$$1 - (tm - 3)(t + 1) \geq 0$$

$$t(t + 1)m - 3t - 4 \leq 0 \text{ 对 } t > 0 \text{ 恒成立}$$

$$m \leq \frac{3t + 4}{t(t + 1)} \text{ 对 } t > 0 \text{ 恒成立}$$

$$\text{设 } u = 3t + 4 > 4, \quad \frac{3t + 4}{t(t + 1)} = \frac{u}{\frac{u - 4}{3} \cdot \frac{u - 1}{3}} = \frac{9u}{u^2 - 5u + 4} = \frac{9}{u + \frac{4}{u} - 5} > 0$$

于是 $m \leq 0$

1402

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=286960&pid=2982424&page=1&extra=pageD1#pid2982424>

在 $f(x)=\sin x$, $f(x)=2^x$, $f(x)=2x+1$, $f(x)=\log_2 x$, $f(x)=x^2$ 这五个函数中, 四个正实数 x_1, x_2, a, b 满足 $x_1 \neq x_2, a \neq b$, 则当 $|b-a| > |x_2-x_1|$ 时, 使

$|f(b)-f(a)| > |f(x_2)-f(x_1)|$ 恒成立的函数的个数是

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

答: 横向距离很大时, 纵向距离可以趋于 0 的, 显然不行

指对函数这样不均匀变化的横向距离小的时候, 纵向距离仍可以很大的也不行

象直线函数这样均匀变化时结论成立

换一种方法说, 导函数是连续变化的就不成立

因此选 A

1455

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=280581&page=3#pid2925379>

$f(x)=1$ 不是周期函数?

答: 常数函数是以任意非零实数为周期的周期函数, 无最小正周期

1468、

<http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=287865&page=1#pid2991269>

由等式 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$

定义映射 $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. 则 $f(4, 3, 2, 1) = \underline{\hspace{2cm}}?$

答: 设 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$

令 $x=0$ 代入得 $1 = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$

于是 $f(4, 3, 2, 1) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$