廖老师网上解题分类三、大纲代数方程不等式

18、设集合 $A=\{x\mid x^2-1=0,x\in R\}$， $B=\{x\mid x^2-2ax+b=0,x\in R\}$， $B\subseteq A$，$B\neq f$，求 a、b 的值

解： $A=\{1,-1\}$

因 $B\subseteq A$， $B\neq f$

故 $B=\{1,-1\}$，或 $B=\{1\}$，或 $B=\{-1\}$

（1）当 $B=\{1,-1\}$ 时 $\begin{cases}-1+1=2a\\-1\times1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$

（2）当 $B=\{1\}$ 时 $\begin{cases}1+1=2a\\1\times1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

（3）当 $B=\{-1\}$ 时 $\begin{cases}-1-1=2a\\-1\times(-1)=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

47、解不等式$|x^2-3x+2|>x^2-3|x|+2$

解：当$x\geq0$时

$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

$x^2-3x+2<0\Rightarrow1<x<2$

此时$1<x<2$

当$x<0$时，则$x^2-3x+2>0$

$|x^2-3x+2|>x^2+3x+2$

化为$x^2-3x+2>x^2+3x+2$

解得 $x<0$，综上，原不等式的解集为$\{x\mid x<0,\ 或1<x<2\}$

48、解不等式｜x^2－3x+2｜＞x^2－3｜x｜+2

解：

$\begin{cases}x^2-3x+2\geq0\\x^2-3x+2>x^2+3x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-3x+2<0\\-(x^2-3x+2)>x^2+3x+2\end{cases}$

52、题目：解关于 x 的不等式：$|\frac{x}{x-1}-1+a|>\frac{x}{x-1}-1+a$

解：$\frac{x}{x-1}-1+a<0$，　$\frac{x-x+1+ax-a}{x-1}<0$，$\frac{ax-a+1}{x-1}<0$

当$a=0$时$\frac{1}{x-1}<0$解集$\{x|x<1\}$

当$a>0$时$\frac{x-1+\frac{1}{a}}{x-1}<0$解集$\{x|1-\frac{1}{a}<x<1\}$

当$a>0$时$\frac{x-1+\frac{1}{a}}{x-1}>0$解集$\{x|x<1$或$x>1-\frac{1}{a}$

53、题目：解不等式$(\lg x+3)^7+(\lg x)^7+\ \lg x^2+3>0$

解：$(\lg x+3)^7+(\lg x+3)>(-\lg x)^7+（-\lg x)$，设$f(x)=x^7+x$

则原不等式就是$f(\lg x+3)>f(-\lg x)$

由于函数$f(x)=x^7+x$是 R^+上的增函数

故$\lg x+3>-\lg x$，　$\lg x>-\frac{3}{2}$，　$x>10^{-\frac{3}{2}}$

58、已知全集 U=R，$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$,

,若(C_RA)∪B=C_RA，求实数 a 的取值范围

解：$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

∵（C_RA）∪B=C_RA，　∴$B\subseteq C_RA$

∴ 2,3都不是方程$x^2-ax+a^2-19=0$的根

$2^2-2a+a^2-19\neq0$且$3^2-3a+a^2-19\neq0$　解得$a\neq5$且$a\neq-3$且$a\neq-2$

60、设$A=\{x|x^2-2px-15=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$,若 A∩B={5},

求 A∪B,

解：∵A∩B={5}

∴5∈A，且 5∈B　　∴$5^2-10p-15=0$，且$5^2-25+q=0$，$p=1$，$q=0$

$A=\{x|x^2-2x-15=0\}=\{5,-3\}$　　$B=\{x|x^2-5x=0\}=\{5,0\}$

$A\cup B=\{5,-3,0\}$

84、解方程$x^3-2x^2-x+2=0$

$x^3-2x^2-x+2=0$， $x^2(x-2)-(x-2)=0$， $(x-2)(x^2-1)=0$

$x=2或x=\pm1$

119、 已知集合$A=\{x\,|\,(x+2)(x+1)(2x-1)>0\}$， $B=\{x\,|\,x^2+ax+b\leq 0\}$

$A\cup B=\{x\,|\,x+2>0\}$， $A\cap B=\{x\,|\,\frac{1}{2}<x\leq 3\}$，求实数$a$、$b$的值

解： $A=\{x\,|\,(x+2)(x+1)(2x-1)>0\}=(-2,-1)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

因$A\cup B=(-2,+\infty)$， $A\cap B=(\frac{1}{2},3]$，故$B=[1,3]$

于是$\begin{cases}-1+3=-a\\-1\times3=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$

157、已知$\{x\,|\,x^2-x\leq 0\}$在$\{x\,|\,x^2-4x+m\geq 0\}$范围内,求m的范围

解：$\{x\,|\,x^2-x\leq 0\}$＝[0，1]

依题意$f(x)=x^2-4x+m\geqslant 0$对$x\in$ [0，1]恒成立

由于$f(x)=x^2-4x+m$＝$(x-2)^2+m-4$在$x\in$ [0，1]上递减

所以$f(x)_{\min}=f(1)=m-3\geq 0\Rightarrow m\geq 3$

115、已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$满足$f(1)=1$， $f(-1)=0$，对任意实数x都有$f(x)\geq x$（1）证明$a>0$，$c>0$（2）$g(x)=f(x)-mx(x\in R)$,求m的取值范围，使$g(x)$在区间[-1，1]上是增函数(高考难题)

（1）证明：因$f(1)=1$， $f(-1)=0$

故$\begin{cases}a+b+c=1\\a-b+c=0\end{cases}$， $\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{2}-a\end{cases}$， $f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$

对任意实数x都有$f(x)\geq x$，即$ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\geq 0$对$x\in R$恒成立

故$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=(\frac{1}{2})^2-4a(\frac{1}{2}-a)\le 0 \end{cases}$，$(4a-1)^2\le 0$

又$(4a-1)^2\ge 0$故$4a-1=0$，$a=\frac{1}{4}>0$，$c=\frac{1}{4}>0$

（2）$g(x)=f(x)-mx=\frac{1}{4}x^2+(\frac{1}{2}-m)x+\frac{1}{4}$

对称轴是$x=\frac{m-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=2m-1$，使$g(x)$在区间[-1，1]上是增函数的充要条件是

区间[-1，1]在对称轴是$x=2m-1$的右边，即$2m-1\le -1$故$m\le 0$

143、.若 1＜x≤2，不等式$ax^2-2ax-1<0$恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：不等式$ax^2-2ax-1<0$，对 1＜x≤2 恒成立

当$x=2$时 $a\in R$

当 1＜x<2 时$a(x^2-2x)<1$，$x^2-2x<0$

$a>\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{(x-1)^2-1}$对 1＜x<2 恒成立

由于在 1＜x<2 时$\frac{1}{(x-1)^2-1}<-1$，故$a\ge -1$

综上$a\ge -1$

152、已知 f(x)是定义在(0,∞)上的增函数，且$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$，对 x,y>0 都成立，若 f(3)=1，（1）求 f(9)的值；　（2）解不等式$f(x)-f(\frac{1}{x-5})>2$

解：　在$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$中令$x=9,y=3$得

$f(3)=f(9)-f(3)$，故　$f(9)=2f(3)=2$

（2）不等式$f(x)-f(\frac{1}{x-5})>2$就是

$f[x(x-5)]>f(9)$

因为 f(x)是定义在(0,∞)上的增函数

所以$x(x-5)>9$且$x(x-5)>0$

即$x(x-5)>9$解得$x<\frac{5-\sqrt{61}}{2}$或$x>\frac{5+\sqrt{61}}{2}$

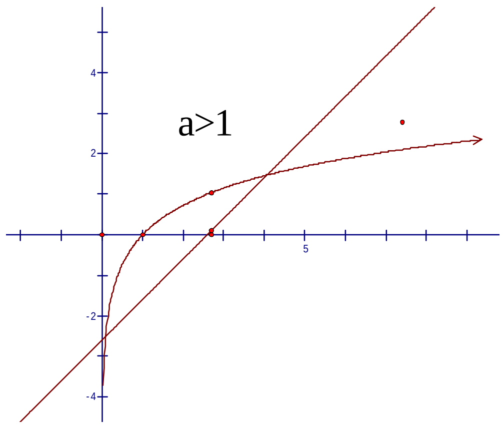
对称轴 $x=\dfrac{-\frac{a}{2}-b}{2}=-\dfrac{2+2b}{4}$

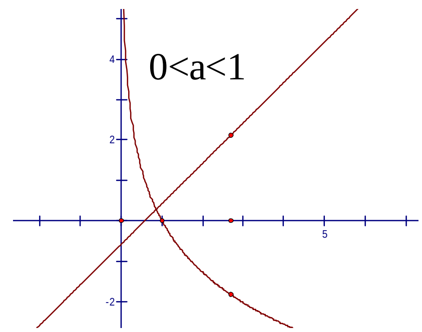
f(x)在 $(-\infty,-\dfrac{a+2b}{4})$ 递减，在 $(-\dfrac{a+2b}{4},+\infty)$ 递增

158、$P=\{(x,y)\,|\,y=x-a\}$， $Q=\{(x,y)\,|\,y=\log_a x\}$，若 $P\cap Q$ 有 4 个子集，求 a 的范围

解：因 $P\cap Q$ 有 4 个子集，故 $P\cap Q$ 有 2 个元素

方程组 $\begin{cases}y=x-a\\ y=\log_a x\end{cases}$ 有两组不同的解





由图象知当 $a>1$ 时符合条件

209、已知 $f(x)=x^2+(a+1)x+b$，且 f(3)=3，又 f(x)≥x 恒成立,求 a，b 的值

解：$\because\ f(3)=3$

$\therefore 9+3(a+1)+b=3\Rightarrow b=-3a-9$

$f(x)=x^2+(a+1)x-3a-9$

$\because\ f(x)\geq x$ 恒成立

$\therefore x^2+ax-3a-9\geq 0$ 恒成立

$\therefore \Delta=a^2-4(-3a-9)=a^2+12a+36=(a+6)^2\leq 0$

又 $(a+6)^2\geq 0$，故 $(a+6)^2=0$， $a=-6$， $b=-3a-9=9$

211、对于函数 f(x),若存在 x 属于 R,使 f(x)=x 成立,则称 x 为不动点,已知 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-1$ (a 不为 0),若对于任意实数 b,函数 f(x)恒有两个相异的不动点,求 a 的取值范围?

解：由 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-1=x$

得 $ax^2+bx+b-1=0$

若对于任意实数 b,函数 f(x)恒有两个相异的不动点,

则 $\Delta=b^2-4a(b-1)>0$ 对 b 恒成立

$b^2-4ab+4a>0$ 对 b 恒成立

于是 $16a^2-16a<0$ 解得 $0<a<1$

243、解关于 x 的不等式 $|\log_a x|<|\log_a ax^2|-2$ (其中 0<a<1),

解：设 $t=\log_a x$ 则原不等式化为

|t|<|1+2t|-2

当 $t>0$ 时，t<1+2t-2， $t>1$， $\log_a x>1$， $0<x<a$

当 $-\dfrac{1}{2}\le t\le 0$ 时， -t<1+2t-2， $t>\dfrac{1}{3}$，此时无解

当 $t<-\dfrac{1}{2}$ 时， -t<-1-2t-2， $t<-3$， $\log_a x<-3$， $x>\dfrac{1}{a^3}$

综上，原不等式的解集是{x| $x>\dfrac{1}{a^3}$ 或 $0<x<a$ }

290、求关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 在[0，2]上有解的 m 值集合

解：由于 x=0 不是解

故 $x+\dfrac{1}{x}=1-m$

因 $x\in(0,2]$，故 $x+\dfrac{1}{x}\ge 1$， $1-m\ge 1$， $m\le 0$

316、已知集合 A={x|-2<x<-1 或 x>1},B={x|a≤x≤b},且 $A\cap B$={x|1<x≤3}，

$A\cup B$={x|x>-2}试求 a，b 的值

解：A={x|-2<x<-1 或 x>1},B={x|a≤x≤b},

$A\cap B$={x|1<x≤3}，$A\cup B$={x|x>-2}

在数轴上可以看出

则 b=3，a=-1

326、已知集合 A={x|x^2-5x+4≤0}与 B={x|x^2-2ax+a+2≤0}，若 B 是 A 的子集，求 a 的范围？

解：设 $f(x)=$ x^2-2ax+a+2

（1） 当$\Delta=4a^2-4(a+2)=4(a-2)(a+1)<0$

即$-1<a<2$时，B=f，有 B⊆A

（2） 当$\Delta=4a^2-4(a+2)=4(a-2)(a+1)\geq 0$

即$a\leq -1或a\geq 2$时，B⊆A，的充要条件是

$\begin{cases} f(-1)\geq 0 \\ f(4)\geq 0 \\ -1\leq a\leq 4 \end{cases}$ 即$\begin{cases} 3-a\geq 0 \\ 18-7a\geq 0 \\ -1\leq a\leq 4 \end{cases}\Rightarrow -1\leq a\leq \dfrac{18}{7}$ 此时$a=-1或2\leq a\leq \dfrac{18}{7}$

综上$-1\leq a\leq \dfrac{18}{7}$

338、已知 a>0,且 a 不等于 1，f(x)=x^2-a^x，当 x∈（－1，1）时，均有$f(x)<\dfrac{1}{2}$,则实数 a 的取值范围是______

解：$f(x)<\dfrac{1}{2}$就是$x^2-a^x<\dfrac{1}{2}$，$x^2-\dfrac{1}{2}<a^x$

作 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2}$ x∈（－1，1），$g(x)=a^x$的图象

由图象知，

当$0<a<1$时 $f(1)\leq g(1)\Rightarrow 1^2-\dfrac{1}{2}\leq a$，$\dfrac{1}{2}\leq a$，此时$\dfrac{1}{2}\leq a<1$

当$a>1$时 $f(-1)\leq g(1)\Rightarrow 1^2-\dfrac{1}{2}\leq a^{-1}$，$a\leq 2$，此时$1<a\leq 2$

综上，$\dfrac{1}{2}\leq a<1或1<a\leq 2$

342、$\sqrt{1-x^2}>x+b$的解集是$[-1,\dfrac{1}{2})$，求b

解：不等式的解集的边界只有两种可能

（1） 定义域的边界

（2） 方程的根

由于$\sqrt{1-x^2}>x+b$的解集是$[-1,\dfrac{1}{2})$，$\dfrac{1}{2}$不是定义域$[-1,1]$边界

故$\dfrac{1}{2}$只能是方程$\sqrt{1-x^2}=x+b$的根

所以$\sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{1}{2}+b$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

352、已知:ab≠0,求证：a+b=1 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$

$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)=0$

$\Leftrightarrow (a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$（1）

由于 $a^2-ab+b^2=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2 \neq 0$

故（1）式 $\Leftrightarrow a+b=1$

384、已知不等式 $\frac{x^2-6x+10}{ax^2+2(a+1)x+9a+4}>0$ 解集为空集求实数 a 的取值范围

解：$x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$ 总成立

故 $\frac{1}{ax^2+2(a+1)x+9a+4}>0$ 解集为空集

故不存在 x 的值使 $ax^2+2(a+1)x+9a+4>0$

因此当 $x\in R$ 时，恒有 $ax^2+2(a+1)x+9a+4\le 0$

故 $\begin{cases} a<0 \\ 4(a+1)^2-4a(9a+4)\le 0 \end{cases} \Rightarrow a\le -\frac{1}{2}$

385、求 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$ 的定义域

解：$\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0 \\ |x+1|-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -1 或 x\ge 4 \\ x\neq 1 且 x\neq -3 \end{cases}$

故定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,-1]\cup[4,+\infty)$

439、二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为负数，且满足 $f(x)=f(2-x)(x\in R)$，求不等式 $f(1+lgx)>f(1+lg(1-x))$ 的解集(好题)

解：因 $f(x)=f(2-x)$ 恒成立

故二次函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

因二次函数 $y=f(x)$ 的二次项系数为负数

故二次函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上递增，在 $[1,+\infty)$ 上递减

不等式 $f(1+lgx) > f(1+lg(1-x))$ 可化为

|(1+lgx)-1|<|[1+lg(1-x)]-1|

|lgx|<|lg(1-x)|（1）

由 $x>0$且$1-x>0$ 得 $0<x<1$

故（1）可化为-lgx<-lg(1-x)

$l$gx>lg(1-x)

x>1-x， $x.>\frac{1}{2}$

综上原不等式的解集是 $\{x|\frac{1}{2}<x<1\}$

461、解不等式 $-1 £ x-1 < x^2 - 1 £ 1$

解：$\begin{cases} x-1\geq -1 \\ x^2-1>x-1 \\ x^2-1\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x<0,\text{或}x>1 \\ -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 1<x\leq \sqrt{2}$

478、已知 $9^x-10\bullet 3^x+9\leq 0$,求函数 $y=(\frac{1}{4})^{x-1}-4(\frac{1}{2})^x+2$ 的最值

解：$9^x-10\bullet 3^x+9\leq 0$，$(3^x-1)(3^x-9)\leq 0$，$1\leq 3^x\leq 9$， $0\leq x\leq 2$

$y=(\frac{1}{4})^{x-1}-4(\frac{1}{2})^x+2=4(\frac{1}{4})^x-4(\frac{1}{2})^x+2$

设 $t=(\frac{1}{2})^x$，则 $y=4t^2-4t+2=4(t-\frac{1}{2})^2+1$

因 $0\leq x\leq 2$， $t=(\frac{1}{2})^x$ 故 $t\in[\frac{1}{4},1]$

因 $t\in[\frac{1}{4},1]$， $y=4(t-\frac{1}{2})^2+1$ 故 $y\in[1,2]$

493、若向量 $\vec{a}=(mx^2,-1)$ 与 $\vec{b}=(\frac{1}{mx-1},x)$, $\vec{a}\bullet\vec{b}>0$,求实数 x 的取值范围

解：因 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\frac{mx^2}{mx-1}-x=\frac{x}{mx-1}$，故 $\frac{x}{mx-1}>0$

（1）当 $m=0$ 时 $-x>0$， $x<0$

（2）当 $m>0$ 时 $x<0$ 或 $x>\frac{1}{m}$

（3）当 $m<0$ 时 $\frac{x}{x-\frac{1}{m}}<0$ 故 $\frac{1}{m}<x<0$

524、解不等式：$(x-1)\sqrt{x+2}\ge 0$

解 1：$(x-1)\sqrt{x+2}>0$ 或 $(x-1)\sqrt{x+2}=0$

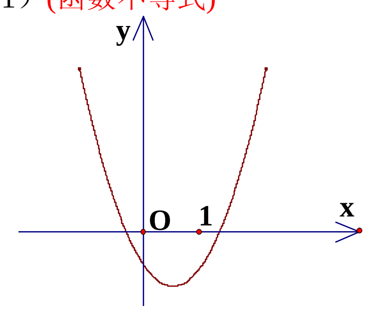
$x>1$ 或 $x=1$或$x=0$

解集为 $\{x \mid x\ge 1或x=-2\}$

解 2：定义域是 $x\ge -2$
当 $x\ge 1$ 时原不等式成立
当 $-2<x<1$ 时原不等式不成立
当 $x=-2$ 时原不等式不成立

故解集为解集为 $\{x \mid x\ge 1或x=-2\}$

532、二次函数 f(x)=$x^2+2(p-2)x+p$，若在区间[0，1]内至少存在一个实数 c，使 f(x)>0,则实数 p 的取值范围是（　）
A、(1,4)　B、(1,+∞）　C、（0，+∞）　D、（0，1）(函数不等式)
解：使 f（C）>0，求实数 p 的取值范围。
　　此题从正面下手比较难，正难则反，
　　考虑在[0，1]内没有点满足 f(x)>0
于是 $\begin{cases} f(0)=p\le 0 \\ f(1)=3p-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\le 0 \\ p\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow p\le 0$
其补集为(1,+∞）故选 C



533、已知 $P_1(x_1，1994)$和 $P_2(x_2，1994)$在二次函数 f(x)=ax^2+bx+7(a≠0)的图象上，则 f(x_1+x_2)=______ (函数)

解 1：$P_1(x_1，1994)$和 $P_2(x_2，1994)$关于直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称

f(x)=ax^2+bx+7 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$

于是 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

f(x_1+x_2)= $f(-\frac{b}{a})=a(-\frac{b}{a})^2+b(-\frac{b}{a})+7=7$
解 2：依题意方程 ax^2+bx+7=1994
的两根为 $x_1和x_2$ 于，由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 以下同解 1

613、已知函数 $y=ax^2+bx+c(a>b>c$ 且 $a+b+c=0)$图像特征的研究
显然，$a>0,c<0$,抛物线开口向上，在 y 轴上的截距为负，
b 的符号不定，对称轴的位置不定，可它的位置真的是任意的吗？
请大家提供帮助？(函数) (推理)

解∵ $a+b+c=0$, (1)

∴ $f(1)=0$, $ax^2+bx+c=0$ 的根为 1，设另一根为 x_2

由韦达定理得：$1\bullet x_2=\frac{c}{a}$，故 $x_2=\frac{c}{a}$，因此 $f(x)=a(x-1)(x-\frac{c}{a})$

$\because a>b>c$, ∴ $a+b+c>c+c+c=3c$ (2)

$a+b+c<a+a+a=3a$ (3)

把(1) 代入(2) (3) 得 $3c<0$, $3a>0$, ∴ $a>0,c<0$,

∵ $b>c$， $c=-a-b$ ∴ $b>-a-b$ ∴ $\frac{b}{a}>-\frac{1}{2}$

∵ $a>b$，$\frac{b}{a}<1$，∴ $-\frac{1}{2}<\frac{b}{a}<1$，故 $-\frac{1}{2}<-\frac{b}{2a}<\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}<\frac{b}{a}<1\Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{-a-c}{a}<1\Rightarrow-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$

可见，抛物线开口向上，在 y 轴上的截距为负

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}\in$（$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$）

与 x 轴的交点是（1，0）和（$\frac{c}{a}$，0），这里 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$

721、$f(x)=\frac{x}{ax+b}$, $f(2)=1$,且 $f(x)-x=0$ 有唯一解，求 f(x) (函数) (方程)

解：$f(x)=\frac{x}{ax+b}$，由 $f(2)=1$,得 $\frac{2}{2a+b}=1, 2a+b=2, b=2-2a$，

方程 $f(x)=x$,就是 $\frac{x}{ax+b}=x$，

即 $x=x(ax+b)$，$x_1=0$,或 $x_2=\frac{1-b}{a}=\frac{2a-1}{a}=2-\frac{1}{a}$

再看一下方程 $\frac{x}{ax+2-2a}=x$

方程有唯一解，故

（1）$x_1==x_2$，$0=2-\frac{1}{a}$，$a=\frac{1}{2}$，此时 $b=1$，$f(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x+1}$

（2）0 是增根，$0a+2-2a=0$，$a=1$，此时 $b=0$，$f(x)=\frac{x}{x}=1(x\neq 0)$

（3）$2-\frac{1}{a}$ 是增根，$a(2-\frac{1}{a})+2-2a=0$，$1=0$ 不可能

综上所述，$f(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x+1}$ 或 $f(x)=1(x\neq 0)$

733、已知 f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c),f(1)=0，f(m)= -a 有解

(1)求证 f(x)在区间{x|x⩾0}是单调增函数

(2)g(x)=f(x)+bx 若 g(x)的图象与 x 轴有两个不同的交点,那么这两点的距离的取值范围是什么呢? (函数) (方程) (不等式) (推理)

（1）证明∵ $f(1)=0$,

由 $f(1)=0$,得 $a+b+c=0$ 又 $a>b>c$,

故 $3a>a+b+c=0$， $a>0$，

$3c<a+b+c=0$， $c<0$

方程 f(m)=-a 有解，就是 $am^2+bm+c+a=0$ 有解

于是，$\Delta=b^2-4a(a+c)=b^2+4ab=b(b+4a)=b(3a-c)\geq 0$

因为 $3a-c>0$，所以 $b\geq 0$

因此，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\leq 0$

所以 f(x)在区间{x|x⩾0}是单调增函数

（2）设 g(x)=f(x)+bx= $ax^2+2bx+c$ 的图象与 x 的交点之间的距离为 d

则 $d=\dfrac{\sqrt{4b^2-4ac}}{a}=2\sqrt{(\dfrac{b}{a})^2-\dfrac{c}{a}}=2\sqrt{(\dfrac{b}{a})^2+\dfrac{b}{a}+1}$

由 $b\geq 0$， $a>0$ 得 $\dfrac{b}{a}\geq 0$

由 $a>b$，得 $\dfrac{b}{a}<1$

由 $b>c$， $c=-a-b$，得 $b>-a-b$， $2b>-a$， $\dfrac{b}{a}>-\dfrac{1}{2}$

故 $0\leq\dfrac{b}{a}<1$

$d=2\sqrt{(\dfrac{b}{a})^2+\dfrac{b}{a}+1}\in[2,2\sqrt{3})$

780、如果关于 x 的方程 a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0 有两个相等的实数根，（abc 不等于 0）

求证： a,b,c的倒数成等差数列 (方程)

证明：易知 1 是原方程的根，又因为原方程有两个相等的实根

所以，原方程的两根都为 1

由韦达定理得， $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}=1\times 1=1$

所以 $bc+ab=2ac$， 两边都除以 abc 得， $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

949、(方程)

若方程 $8x^2+(k+1)x+k-7=0$ 有两个负根，则 k 的取值范围是______

解：$\Delta=(k+1)^2-32(k-7)\ge 0$

$$x_1+x_2=-\frac{k+1}{8}<0$$

$$x_1x_2=\frac{k-7}{8}>0$$

求交集即可

981、(不等式)

若 $ax^2+bx+c<0$ 的解集｛x|x<-3 或 x>1｝,求不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

解：$ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-3或x>1\}$

则 $\begin{cases}a<0\\-3+1=-\dfrac{b}{a}\\-3\times1=\dfrac{c}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\\b=2a\\c=-3a\end{cases}$

于是 $cx^2-bx+a>0$ 化为 $-3ax^2-2ax+a>0$，$3x^2+2x-1>0$

$(3x-1)(x+1)>0$ 　　解集为 $\{x\mid x<-1或x>\frac{1}{3}\}$

1131、(方程)

解方程 $2t^3-6t^2+6t+1=0$

解：原不等式可化为 $t^3-3t^2+3t=-\frac{1}{2}$

$$t^3-3t^2+3t-1=-\frac{3}{2}$$

$(t-1)^3=-\frac{3}{2}$，于是 $t=1-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

1136、(函数)

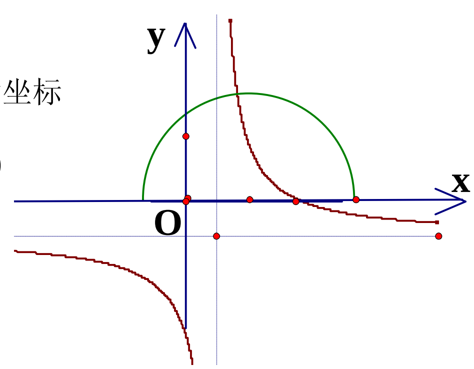
方程 $\sqrt{4+4x-x^2}=\dfrac{2-x}{x-1}$ 的实根共有几个?,

解：方程 $\sqrt{4+4x-x^2}=\dfrac{2-x}{x-1}$ 的实根

是函数 $y=\sqrt{4+4x-x^2}$ 与 $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ 交点的横坐标

因 $y=\sqrt{4+4x-x^2}\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=8(y\ge 0)$

$$y=\frac{2-x}{x-1}=\frac{1}{x-1}-1$$



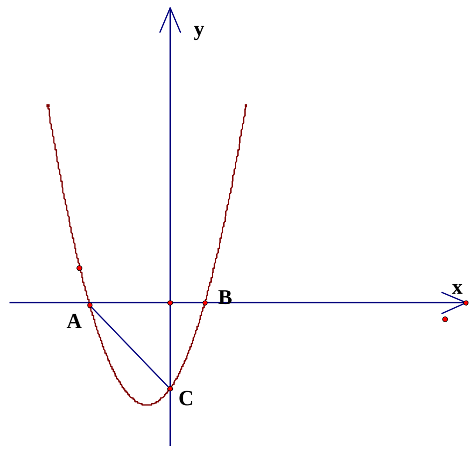
故可作出它们图象，有 1 个交点

于是原方程只 1 一个的实根

1198、(函数)

已知二次函数 $y=ax^2+ax-m$ 的图象交 x 轴于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$两点,$x_1<x_2$,交 y 轴的负半轴于 C 点,且 AB=3，tan∠BAC=1.

求此二次函数的解析式



解：由韦达得 $x_1+x_2=-1$，　$x_1x_2=\dfrac{-m}{a}$

由 AB=3 得 $x_2-x_1=3$

于是 $x_2=1$，　$x_1=-2$

由 tan∠BAC=1 得 $C(0,-2)$

于是有 $m=2$，　$1\times(-2)=\dfrac{-2}{a}$，　$a=1$

1256、(方程)

求方程 $x(x+1)(x-1)(x+2)=5040$ 的整数解

解：5040=7×8×9×10，　于是 x=8 或 x=-9

1315

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22439&show=0

$\lg(ax)\lg(ax^2)=4$ 所有解都＞ 1 求 a 范围

解：$(\lg a+\lg x)(\lg a+2\lg x)=4$

设 $t=\lg x$，则方程 $(t+\lg a)(2t+\lg a)=4$，即 $t^2+(3\lg a)t+\lg^2 a-4=0$

的两根都有是正数，于是 $\begin{cases}9\lg^2 a-4(\lg^2 a-4)=5\lg^2 a+16\ge 0\\ \lg^2 a-4>0\\ -3\lg a>0\end{cases}$　　解得 $0<a<\dfrac{1}{100}$

1322

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22453&show=0

方程 $4x^4-12x^3-7x^2+22x+14=0$ 有 4 实根，且其中 2 根和为 1。解此方程。

解：有两根和为 1，故必有因式形如 $2x^2-2x+c$

$2x^2(2x^2-2x+c)-4x(2x^2-2x+c)-(15+2c)x^2+(4c+22)x+14=0$

令 $15+2c=4c+22$，得 $c=-\dfrac{7}{2}$

故 $x^2(4x^2-4x=7)-2x(2x^2-2x-7)-8x^2+8x+14=0$

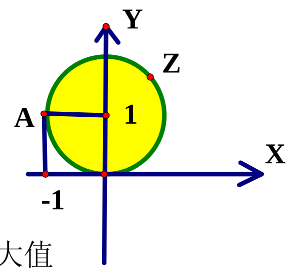
$(4x^2-4x=7)(x^2-2x-2)=0$，于是 $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{2}$，　$x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$

1324
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22457&show=0

有一个复数 z，$z\bar{z}+iz-i\bar{z}\le 0$，求 z+1-$i$ 的模的最大值,书上正确答案是(根号5+1),但不知道过程如何求解

解：$z\bar{z}+iz-i\bar{z}\le 0$，$z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1\le 1$，$(z-i)(\overline{z+i})\le 1$

$|z-i|\le 1$，　复数 z 对应的点 Z 的集为合为如图的圆盘



设$-1+i$对应的点为 A(-1,i)

$|z+1-i|$=|ZA|其最大值是 2

故原来的答案不对

要成为原来的答案,应改为求$|z+1+i|$或$|z-1-i|$的最大值

改条件也行

1429、

已知命题 p：不等式$|x|+|x-1|>m$的解集是 R，命题 p：$f(x)=-(2-2m)^x$ 是减函数，若 p 或 q 真，p 且 q 假，则实数 m 的取值范围是__________

解：p 真，则$m<1$，设为集 A　　q 真，则$5-2m>1$，$m<2$,设为集 B

p 或 q 真，p 且 q 假

集 $A\cup B=(-\infty,2)$，$A\cap B=(-\infty,1)$，$C_R(A\cap B)=[1,+\infty)$

所求为（$A\cup B)\cap C_R(A\cap B)=[1,2)$

1474

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292222&page=1#pid3031962

|f(x)|>g(x)等价于 f(x)>g(x)或 f(x)<-g(x)为什么?

解不等式时经常用到:|f(x)|>g(x)等价于 f(x)>g(x)或 f(x)<-g(x),如:|2x-1|>x 等价于 2x-1>x 或 2x-1<-x 从而得到不等式的解集。它的理论依据在哪？我怎么想不明白?

答：g(x)>0 时应该没问题吧

若 g(x)＝0 时也不会有问题吧

若 g(x)<0 时，|f(x)|>g(x)是总成立的，

f(x)>g(x)或 f(x)<-g(x)也是总成立的

两个命题在任何情况下都是同真假的当然是等价的