

廖老师网上千题解答分类四、超纲代数方程不等式

10、已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两实根 α 、 β . 证明:

(1) 如果 $|\alpha| < 2, |\beta| < 2$, 那么 $2|a| < 4+b$, 且 $|b| < 4$;

(2) 如果 $2|a| < 4+b$, 且 $|b| < 4$, 那么如果 $|\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

证明 (I) **Q** $|\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

$$\therefore |b| = |\alpha\beta| < 4.$$

$$\textbf{Q} \quad |\alpha| < 2, |\beta| < 2.$$

$\therefore$ 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根都在区间 $(-2, 2)$ 内

因为二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 开口向上,

$$\therefore \begin{cases} f(2) = 4 + 2a + b > 0 \\ f(-2) = 4 - 2a + b > 0 \end{cases} \quad \text{P} \quad \begin{cases} 2a > -b - 4 \\ 2a < b + 4 \end{cases}$$

$$\therefore |2a| < 4+b, \text{ 即 } 2|a| < 4+b$$

$$(2)\textbf{Q} \quad 2|a| < 4+b, \quad |b| < 4$$

$$\therefore 4a^2 < (4+b)^2, \quad |\alpha\beta| < 4 \quad \text{由韦达定理得 } -a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha\beta$$

$$\therefore 4(a+b)^2 < (4+ab)^2 \Rightarrow (ab)^2 - 4a^2 - 4b^2 + 16 > 0$$

$$(a^2 - 4)(b^2 - 4) > 0,$$

$$\therefore a^2 > 4, b^2 > 4 \quad (\text{与 } |\alpha\beta| < 4 \text{ 矛盾, 舍去}), \text{ 或 } a^2 < 4, b^2 < 4$$

$$\therefore a^2 < 4, b^2 < 4 \text{ 即 } |\alpha| < 2, |\beta| < 2.$$

30、已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $|f(0)| \leq 1, |f(1)| \leq 1, |f(-1)| \leq 1$

求证: 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$

证明: $\because$ 设 $f(1) = m, f(-1) = n, f(0) = c,$

$$\therefore |m| \leq 1, |n| \leq 1, |c| \leq 1$$

$$a + b + c = m, \quad a - b + c = n$$

$$a = \frac{1}{2}(m + n - 2c), \quad b = \frac{1}{2}(m - n),$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{2}(m + n - 2c)x^2 + \frac{1}{2}(m - n)x + c$$

$$= m \left(\frac{x^2 + x}{2} \right) + n \left(\frac{x^2 - x}{2} \right) + c(1 - x^2).$$

$$|f(x)| \leq \left| m\left(\frac{x^2+x}{2}\right) \right| + \left| n\left(\frac{x^2-x}{2}\right) \right| + |c(1-x^2)| \leq \left| \frac{x^2+x}{2} \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| + |1-x^2|$$

(1) 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \frac{x^2+x}{2} \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| + |1-x^2| \\ &= -\frac{x^2+x}{2} + \frac{x^2-x}{2} + (1-x^2) \\ &= -x^2 - x + 1 = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \frac{x^2+x}{2} \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| + |1-x^2| = \left(\frac{x^2+x}{2} \right) + \left(\frac{-x^2+x}{2} \right) + (1-x^2) \\ &= -x^2 + x + 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

综上所述, 原命题成立

104、设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) - x = 0$ 的两根是 x_1, x_2 满足

$0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 求证 $x < f(x) < x_1$ (高考难题)

证明: $f(x) - x = 0$ 就是 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b-1}{a}, \quad x_1 x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$\text{当 } 0 < x < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$$

$$f(x) - x = a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Rightarrow f(x) > x$$

$$f(x) - x_1 = f(x) - x + x - x_1 = a(x - x_1)(x - x_2) + x - x_1 = (x - x_1)[a(x - x_2) + 1]$$

$$= a(x - x_1)\left[x - x_2 + \frac{1}{a}\right]$$

$$\text{Q } 0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a} \quad \wedge \quad x - x_1 < 0, \quad x - x_2 + \frac{1}{a} > 0, \quad \therefore f(x) < x_1$$

综上 $x < f(x) < x_1$

$$112、\text{解方程组} \begin{cases} x+y+z=9 \\ x^3+y^3+z^3=99(\text{联赛}) \\ xyz=24 \end{cases}$$

$$\text{解: } Q \quad x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+xz)]$$

$$\therefore 99-3 \times 24=9[9^2-3(xy+yz+xz)]$$

$$xy+yz+xz=26$$

$$\therefore x, y, z \text{ 是方程 } t^3-9t^2+26t-24=0 \text{ 的根}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \text{ 或} \\ z=4 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=4 \text{ 或} \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \text{ 或} \\ z=4 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \text{ 或} \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \text{ 或} \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

125、已知: 对于函数 $F(x)$, 若 $F(x)=x$, 则称 x 为 $F(x)$ 的“不动点”, 若 $F[F(x)]=x$, 则称 x 为 $F(x)$ 的“稳定点”, 函数 $F(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记作 A 和 B , 即 $A=\{x \mid F(x)=x\}$, $B=\{x \mid F[F(x)]=x\}$ (高考难题)

求证: (1) $A \subseteq B$

(2) 若 $F(x)=ax^2-1$ ($a \in R, x \in R$), 且 $A=B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围

(1) 证明 设 $x \in A = \{x \mid F(x)=x\}$

则 $F(x)=x \Rightarrow F(F(x))=F(x)=x \Rightarrow x \in B = \{x \mid F[F(x)]=x\}$

故 $A \subseteq B$

(2) 当 $a=0$ 时 $A=B=\{-1\} \neq \emptyset$

当 $a \neq 0$ 时, 由 $A \neq \emptyset$ 知方程 $ax^2-1=x$ 有实根,

$$\Delta = 1+4a \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } a \neq 0$$

方程 $F[F(x)]=x$ 就是 $a(ax^2-1)^2-1=x$

$$a(ax^2-x-1+x)^2-1=x$$

$$a(ax^2-x-1)^2+2ax(ax^2-x-1)+(ax^2-x-1)=0$$

$$(ax^2-x-1)[a(ax^2-x-1)+2ax+1]=0$$

$$ax^2-x-1=0 \quad \text{①} \quad \text{或} \quad a^2x^2+ax-a+1=0 \quad \text{②}$$

由 $A=B$ 知②无实根, 或②与①同解

由于②与①不可能解同解

$$\text{故 } \Delta = a^2-4a^2(-a+1) < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{4}$$

$$\text{综上 } -\frac{1}{4} \leq a < \frac{3}{4}$$

150、

急求卡丹公式

答：卡丹公式

$x^3 + px + q = 0$ 的根是

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

179、已知 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c, a > b > c, f(1) = 0$, 当 $f(m) = -a$ 成立时,

求证： $f(m+3) > 0$ (高考难题)

解： $f(1) = 0$,

$\therefore f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 1, 设另一根为 x_2

由韦达定理得： $1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, 故 $x_2 = \frac{c}{a}$

因此 $f(x) = a(x-1)(x - \frac{c}{a})$

$$\therefore f(1) = 0, \therefore a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$Qa > b > c, \therefore a + b + c > c + c + c = 3c \quad (2)$$

$$a + b + c < a + a + a = 3a \quad (3)$$

把(1) 代入(2)(3) 得 $3c < 0, 3a > 0, \therefore a > 0, c < 0$,

$$\therefore a > b, b = -a - c$$

$$\therefore a > -a - c \quad \therefore -2 < \frac{c}{a}$$

$$\therefore b > c, b = -a - c$$

$$\therefore -a - c > c \quad \therefore \frac{c}{a} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{故 } \therefore -2 < \frac{c}{a} < -1$$

由 $f(m) = -a, a > 0$ 得 $f(m) < 0$

$$\text{即 } a(m-1)(m - \frac{c}{a}) < 0,$$

$$(m-1)(m - \frac{c}{a}) < 0, \text{ 又 } \frac{c}{a} < -1 < 1$$

$$\therefore \frac{c}{a} < m < 1 \text{ 又 } \frac{c}{a} > -2, \therefore m+3 > \frac{c}{a} + 3 > -2 + 3 = 1$$

$$\therefore f(x) = a(x-1)(x - \frac{c}{a}) \text{ 的对称轴是 } x = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} < \frac{1+1}{2} = 1, a > 0 \text{ 开口向上}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增

$$\therefore f(m+3) > f(1) > 0$$

182、已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=cx^2+bx+a$ 当 $|x|\leq 1$ 时 $|f(x)|\leq 2$
 求证: 当 $|x|\leq 1$ 时 $|g(x)|\leq 4$ (高考难题)

证明: $\because$ 设 $f(1)=m$, $f(-1)=n$, $f(0)=c$,

$$\therefore |m|\leq 2, |n|\leq 2, |c|\leq 2 \quad a+b+c=m, \quad a-b+c=n$$

$$a=\frac{1}{2}(m+n-2c), \quad b=\frac{1}{2}(m-n),$$

$$g(x)=cx^2+bx+a=cx^2+\frac{1}{2}(m-n)x+\frac{1}{2}(m+n-2c)=c(x^2-1)+m\left(\frac{x+1}{2}\right)+n\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

$$\text{故 } |g(x)|\leq |c(x^2-1)|+|m\left(\frac{x+1}{2}\right)|+|n\left(\frac{1-x}{2}\right)|\leq 2|x^2-1|+2\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|+2\left|\left(\frac{1-x}{2}\right)\right|$$

$$\text{当 } |x|\leq 1 \text{ 时, } -1\leq x\leq 1, \quad x^2-1\leq 0, \quad \left(\frac{x+1}{2}\right)\geq 0, \quad \left(\frac{1-x}{2}\right)\geq 0$$

$$\text{故 } |g(x)|\leq 2(1-x^2)+2\left(\frac{x+1}{2}\right)+2\left(\frac{1-x}{2}\right)=4-x^2\leq 4$$

综上所述, 原命题成立

214、已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$, $f(x)-x=0$ 的两根满足

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$$

(1) 当 $0 < x < x_1$ 时, 求证 $x < f(x) < x_1$

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称, 求证 $x_0 < \frac{x_1}{2}$ (高考难题)

证明: (1) $f(x)-x=0$ 就是 $ax^2+(b-1)x+c=0$,

$$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}, \quad x_1x_2=-\frac{c}{a}, \quad \text{当 } 0 < x < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$$

$$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0 \Rightarrow f(x)>x$$

$$\begin{aligned} f(x)-x_1 &= f(x)-x+x-x_1=a(x-x_1)(x-x_2)+x-x_1=(x-x_1)[a(x-x_2)+1] \\ &= a(x-x_1)\left[x-x_2+\frac{1}{a}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Q } 0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a} \therefore (x-x_1)<0, \quad x-x_2+\frac{1}{a}>0, \therefore f(x)<x_1$$

$$(2) f(x) \text{ 的对称轴 } x=-\frac{b}{2a}, \text{ 故 } x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$\text{因为 } x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}, \text{ 所以因为 } \frac{b}{a}=\frac{1}{a}-x_1-x_2$$

$$\text{故 } \frac{x_1}{2}-x_0=\frac{x_1}{2}+\frac{b}{2a}=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{2a}-\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-x_2\right)>0, \text{ 因此 } \frac{x_1}{2}>x_0$$

297、已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其中 $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}$

若对任意的 x , 不等式 $4x \leq f(x) \leq 2(x^2 + 1)$ 恒成立, 且存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < 2(x_0^2 + 1)$ 成立, 求 c 的值

解: 联立 $y = 4x$ 与 $y = 2(x^2 + 1)$, 解得 $x_1 = x_2 = 1$

故 $y = 4x$ 与 $y = 2(x^2 + 1)$ 相切于点 $(1, 4)$

因 $4x \leq f(x) \leq 2(x^2 + 1)$ 恒成立

故 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 图象必与 $y = 4x$ 相切于点 $(1, 4)$

并且 $f(x) \leq 2(x^2 + 1)$ 恒成立, 故 $a + b + c = 4$ (1)

因 $f'(x) = 2ax + b$, 故 $f'(1) = 2a + b = 4$ (2)

由 (1) (2) 得 $b = 4 - 2a$, $c = a$

由 $f(x) \leq 2(x^2 + 1)$ 恒成立得, $ax^2 + (4 - 2a)x + a \leq 2(x^2 + 1)$

$(2 - a)x^2 + (2a - 4)x + 2 - a \geq 0$ 恒成立得, 故 $2 - a \geq 0, a \leq 2$

由于存在 x_0 , 使得 $f(x_0) < 2(x_0^2 + 1)$ 成立, 故 $a \neq 2$, 所以 $a < 2$

由于 $f(x) \geq 4x$ 恒成立得 $a > 0$, 所以 $0 < a < 2$ $a \in \mathbb{N}^*$, $a = 1$

$a = 1, b = 2, c = 1$

298、已知 $f(x) = ax^2 + 2bx + 4c, b = 4, c = \frac{3}{4}$ 时, 对于给定的负数 a 有一个最大的正

数 $M(a)$ 使得 $x \in [0, M(a)]$ 时, 都有 $|f(x)| \leq 5$, 问 a 为何值时 $M(a)$

解: $f(x) = ax^2 + 2bx + 4c = ax^2 + 8x + 3 = a(x^2 + \frac{8}{a}x) + 3 = a(x + \frac{4}{a})^2 + 3 - \frac{16}{a}$

对称轴是 $x = -\frac{4}{a}$, 纵截距为 3, 由于 $a < 0$ 因此抛物线开口向下。

(1) 当 $3 - \frac{16}{a} \leq 5$ 即 $a \leq -8$ 时

要使 $x \in [0, M(a)]$ 时 $|f(x)| \leq 5$, 只要当 $x \geq -\frac{4}{a}$ 时有 $ax^2 + 8x + 3 \geq -5$

解得 $-\frac{4}{a} \leq x \leq \frac{-4 - 2\sqrt{4 - 2a}}{a}$ 此时 $M(a) = \frac{-4 - 2\sqrt{4 - 2a}}{a}$

(2) 当 $3 - \frac{16}{a} > 5$ 即 $-8 < a < 0$ 时

要使 $x \in [0, M(a)]$ 时 $|f(x)| \leq 5$, 只要当 $0 < x \leq -\frac{4}{a}$ 时有 $ax^2 + 8x + 3 \leq 5$

解得 $0 < x \leq \frac{-4 + \sqrt{16 + 2a}}{a}$ 此时 $M(a) = \frac{-4 + \sqrt{16 + 2a}}{a}$

$$\text{综上 } M(a) = \begin{cases} \frac{-4-2\sqrt{4-2a}}{a} & (a \leq -8) \\ \frac{-4+\sqrt{16+2a}}{a} & (-8 < a < 0) \end{cases}$$

$$\text{由 } a \leq -8 \text{ 得 } M(a) = \frac{-4-2\sqrt{4-2a}}{a} = \frac{4}{\sqrt{4-2a}-2} \leq \frac{4}{\sqrt{20}-2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\text{由 } -8 < a < 0 \text{ 得 } M(a) = \frac{-4+\sqrt{16+2a}}{a} = \frac{2}{\sqrt{16+2a}+4} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } M(a) \text{ 最大值} = M(-8) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

304、已知 a, b, c 是实数, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax + b$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $|f(x)| \leq 1$ (1) 证明: $|c| \leq 1$; (2) 证明: 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 2$;

(3) 设 $a > 0$, 当 $-1 \leq x \leq 1$, $g(x)$ 的最大值为 2, 求 $f(x)$. (高考难题)

证明: (1) 因 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $|f(x)| \leq 1$ 故 $|f(0)| \leq 1$, 即 $|c| \leq 1$

(2) 设 $f(1) = m$, $f(-1) = n$, $f(0) = c$, 则 $|m| \leq 1$, $|n| \leq 1$, $|c| \leq 1$

$$\text{因为 } a+b+c=m, \quad a-b+c=n, \text{ 所以 } a = \frac{1}{2}(m+n-2c), \quad b = \frac{1}{2}(m-n),$$

$$g(x) = ax + b = \frac{1}{2}(m+n-2c)x + \frac{1}{2}(m-n) = m\left(\frac{x+1}{2}\right) + n\left(\frac{x-1}{2}\right) - cx.$$

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时 } |g(x)| \leq \left|m\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| + \left|n\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| + |cx|$$

$$\leq \left|\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| + |x| = \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{1-x}{2}\right) + |x| = 1 + |x| \leq 2$$

(3) 当 $a > 0$ 时 $g(x) = ax + b$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数

$g(x)$ 的最大值为 $g(1) = a + b = 2$

因 $a + b + c = m$, 故 $c = m - 2$, 因 $-1 \leq m \leq 1$, 故 $-3 \leq c \leq -1$ 又因为 $-1 \leq c \leq 1$

因此 $c = -1$, 所以 $f(0) = c = -1$

因为当 $-1 \leq x \leq 1$ 时 $|f(x)| \leq 1$, 故有 $f(x) \geq -1$

于是当 $x = 0$ 时 $f(x)$ 最小值 $= f(0) = -1$, 因此 $b = 0$, $a = 2$, 于是 $f(x) = 2x^2 - 1$

387、求证:若 $a>2, b>2$, 则下列两个二次方程 $x^2-ax+a+b=0, x^2-(a+b)x+ab=0$ 没有公共根
证明: $x^2-(a+b)x+ab=0$

的根是 $x_1 = a, x_2 = b$

假设两个二次方程有公共根, 则 a, b 中至少有一个是方程 $x^2-ax+a+b=0$ 的根

不妨设 a 是方程 $x^2-ax+a+b=0$ 的根,

则 $a^2-a^2b+a+b=0$

$$\text{故 } b = \frac{a^2 + a}{a^2 - 1} = \frac{a}{a - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \quad (1)$$

$$\text{因 } a > 2, \text{ 故由 (1) 得 } b = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ 这与 } b > 2 \text{ 相矛盾}$$

因此假设错误, 故原命题为真

213、已知: $x^2+bx+c=0$ 有 2 个实根, 求证: 一定存在整数 n 使得

$$|n^2 + bn + c| < \max\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \quad (\text{联赛})$$

解: 记 $f(x) = x^2 + bx + c$

设方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的 2 个实根为 a, b 则 $f(x) = x^2 + bx + c = (x - a)(x - b)$

$$|n^2 + bn + c| = |f(n)| = |(n - a)(n - b)|$$

$$\text{若 } a \text{ 为整数, 取 } n = a, \text{ 则 } |n^2 + bn + c| = 0 < \max\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

若 a 不是整数, 则有整数 m 使得 $m < a < m + 1$

(1) 当 $m \leq b \leq m + 1$ 时

$$\begin{aligned} |f(m)| &= |f(m+1)| = |(m-a)(m-b)| = |(m+1-a)(m+1-b)| \\ &= (a-m)(m+1-a)(b-m)(m+1-b) \\ &\leq \left[\frac{(a-m)+(m+1-a)}{2}\right]^2 \left[\frac{(b-m)+(m+1-b)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{于是有 } |f(m)| \leq \frac{1}{4} \text{ 或 } |f(m+1)| \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{取 } n = m \text{ 或 } n = m + 1 \text{ 就有 } |n^2 + bn + c| = |f(n)| \leq \frac{1}{4}$$

(2) 当 $b > m + 1$ 时

$$\begin{aligned} |f(m)| &= |f(m+1)| = |(m-a)(m-b)| = |(m+1-a)(m+1-b)| \\ &= [(a-m)(b-m-1)][(m+1-a)(b-m)] \\ &\leq \left[\frac{(a-m)(b-m-1)+(m+1-a)(b-m)}{2}\right]^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

于是有 $|f(m)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ 或 $|f(m+1)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

取 $n = m$ 或 $n = m+1$ 就有 $|n^2 + bn + c| = |f(n)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

(3) 当 $b < m$ 时

$$\begin{aligned} |f(m)| \cdot |f(m+1)| &= |(m-a)(m-b)| \cdot |(m+1-a)(m+1-b)| \\ &= [(a-m)(m+1-b)][(m+1-a)(m-b)] \\ &\leq \left[\frac{(a-m)(m+1-b) + (m+1-a)(m-b)}{2} \right]^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

于是有 $|f(m)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ 或 $|f(m+1)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

取 $n = m$ 或 $n = m+1$ 就有 $|n^2 + bn + c| = |f(n)| \leq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

综上知原命题成立

388、已知关于 x 的方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 和 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$, 若 m 为整数, 是求两方程的根都是整数的充要条件。(竞赛)

$$mx^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{的根是 } x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16m}}{2m} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-m}}{m} \text{ 是整数故}$$

$$\text{可设 } 1 - m = n^2, \quad m = 1 - n^2$$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{1-m}}{m} = \frac{2 \pm 2n}{1-n^2} = \frac{2}{1-n} \text{ 或 } \frac{2}{1+n} \text{ 都为整数, 故 } n = 0$$

$$\text{即 } m = 1 - n^2 = 1,$$

此时 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 就是 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 两根为整数

综上, 充要条件 $m = 1$

435、设 $f(x) = \log_a \frac{x-3}{x+3}$, 当 $x \in [m, n]$ 时, 恒有

$1 + \log_a(n-1) < \log_a \frac{x-3}{x+3} \leq \log_a(m-1)$, 则 m, n, a 各应在什么范围内? (竞赛)

解: $f(x) = \log_a \frac{x-3}{x+3}$ 定义域是 $x < -3$ 或 $x > 3$

$$1 + \log_a(n-1) < \log_a \frac{x-3}{x+3} \leq \log_a(m-1), \quad \log_a a(n-1) < \log_a \frac{x-3}{x+3} \leq \log_a(m-1)$$

$$\log_a a(n-1) < \log_a \left(1 - \frac{6}{x+3}\right) \leq \log_a(m-1) \text{ 对 } x \in [m, n] \text{ 恒成立}$$

因 $n-1 > 0$ 且 $m-1 > 0$ 故 $3 < m < n$

1°、当 $a > 1$ 时, $a(n-1) < 1 - \frac{6}{x+3} \leq (m-1)$ 对 $x \in [m, n]$ 恒成立

$$a(n-1) < 1 - \frac{6}{m+3}$$

$$1 - \frac{6}{n+3} \leq m-1 \quad (1) \quad \text{由于 } a > 1 \text{ 且 } n-1 > 2 \text{ 故, } a(n-1) > 2, \text{ 而 } 1 - \frac{6}{m+3} < 1 \text{ 故}$$

$$m > 3$$

$$1$$

(1) 不成立舍去

2°、当 $0 < a < 1$ 时, $a(n-1) > 1 - \frac{6}{x+3} \geq (m-1)$ 对 $x \in [m, n]$ 恒成立

$$\begin{cases} a(n-1) \leq 1 - \frac{6}{n+3} & (2) \\ 1 - \frac{6}{m+3} \geq m-1 & (3) \end{cases} \quad \text{由 (2) 解得 } an^2 - (2a+1)n - 3a+3 \leq 0, (n-3)(an+a-1) \leq 0$$

若 $\frac{1-a}{a} = 3$, 即 $a = \frac{1}{4}$ 时 $n = 3$ 则区间 $[m, n]$ 不存在舍去

若 $\frac{1-a}{a} < 3$ 即 $\frac{1}{4} < a < 1$ 时 $\frac{1-a}{a} \leq n \leq 3$ 与 $3 < m < n$ 矛盾, 舍去

若 $\frac{1-a}{a} > 3$, 即 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时 $3 \leq n \leq \frac{1-a}{a}$

当 $m > 3$ 时 (3) 一定成立

综上: $0 < a < \frac{1}{4}$, 且 $3 < m < n \leq \frac{1-a}{a}$

539、对于区间 $[a, b]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,

如果对任意 x 属于 $[a, b]$, 均有 $|f(x) - g(x)|$ 小于等于 1,

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是接近的,

若函数 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 $y = 2x - 3$ 在区间 $[a, b]$

上接近, 则该区间可以是 () (函数不等式)

解: $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2x - 3$

$$|f(x) - g(x)| = |x^2 - 5x + 5| \leq 1$$

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4) \leq 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \leq 0$$

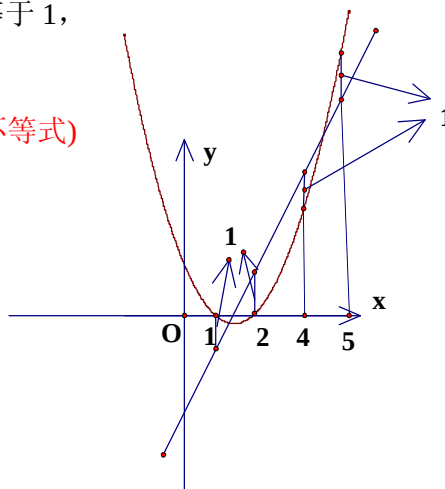
$$1 \leq x \leq 2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4$$

因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 或 $[3, 4]$

的任意一个闭的子区间上是接近的

如 $[1, 1.5]$, $[1.1, 1.5]$, $[3.4, 4]$, $[1, 2]$,

$[3, 4]$ 随意填一个都行



577、问题：好象韦达定理适用于 n 次方程,可是公式记不清楚,谁能讲讲呀
(方程) (高考不要求)

讲解：

设三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) 的三根分为 x_1, x_2, x_3

因为以 x_1, x_2, x_3 为根的三次方程是

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$\text{即 } x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

把三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) 三次项系数化为 1 后得

$$x^3 + \left(\frac{b}{a}\right)x^2 + \left(\frac{c}{a}\right)x + \frac{d}{a} = 0 \quad (2)$$

因为 (1) (2) 表示同一个方程

$$\text{因此 } x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

这就是三次方程的韦达定理

你自推导 4 次方程的韦达定理

580、解方程组

$$a+b+c+d=10$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100$$

$$abcd=24 \quad (\text{方程}) \quad (\text{高考不要求}) \quad (\text{竞赛})$$

解： $a+b+c+d=10$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{(a+b+c+d)^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2)}{2} = \frac{100-30}{2} = 35$$

$$abc+abd+acd+bcd$$

$$= \frac{(a+b+c+d)^3 - 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2) + 2(a^3+b^3+c^3+d^3)}{3}$$

$$= \frac{10^3 - 3 \times 10 \times 30 + 2 \times 100}{6} = 50$$

$$abcd=24$$

$\therefore a, b, c, d$ 是方程 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ 的四个根

$$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 11x^2 - 50x + 24 = 0$$

$$x^2(x-4)(x-6)+(x-4)(11x-6)=0, (x-4)[x^2(x-3)-3x^2+11x-6]=0$$

$$(x-4)[x^2(x-3)-(3x-2)(x-3)]=0, (x-4)(x-3)(x^2-3x+2)=0$$

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \\ d=3 \end{cases} \text{ 等等}$$

581、已知两个一元二次方程:

$$x^2-ax+(a+b)=0 \text{ 和 } x^2-(a+b)x+ab=0$$

其中 $ab \neq a+b, a>0, b>0$, 求证: 这两个方程没有公共根. (方程)(推理)

证明: 假设这两个方程有公共根 c 则 $c^2-abc+(a+b)=0$ (1) $c^2-(a+b)c+ab=0$ (2)

由(1)-(2)得 $(a+b)c-abc+(a+b)-ab=0$

$$c(a+b-ab)c+(a+b-ab)=0, \text{ 于是 } c=-1.$$

$$\text{把 } c=-1 \text{ 代入 } x^2-ax+(a+b)=0 \text{ 得 } 1+ab+a+b=0 \text{ (3)}$$

因为 $a>0, b>0$ 所以 $1+ab+a+b>0$ 与 (3) 相矛盾

因此, 假设不成立, 故原命题正确

$$587、 \text{ 设 } x_1, x_2 \text{ 是方程 } x^2+x+1=0 \text{ 的根, } \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \mathbf{L} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2006}$$

(复数)(高考不要求)

$$\text{解: 因为 } x_1, x_2 \text{ 是方程 } x^2+x+1=0, x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{x_2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = x_2, x_2^3=1$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \mathbf{L} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2006} = x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \mathbf{L} + x_2^{2006} =$$

$$= \frac{x_2(1-x_2^{2006})}{1-x_2} = \frac{x_2(1-x_2^2)}{1-x_2} = \frac{x_2-1}{1-x_2} = -1$$

$$614、 \text{ 解方程 } (3-2\sqrt{2})^x + (3+2\sqrt{2})^x = 34. \text{ (方程)}$$

$$\text{解: 设 } (3-2\sqrt{2})^x = t, \text{ 因 } (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9-8=1$$

$$\text{故 } (3+2\sqrt{2})^x = \frac{1}{t}, t + \frac{1}{t} = 34$$

$$\text{解得 } t = 17 \pm 6\sqrt{2},$$

当 $t = 17 - 6\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2$ 时, $x = 2$

当 $t = 17 + 6\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2$ 时, $x = \frac{1}{2}$

625、已知 $x^2 + x + 1 = 0$ 求 $(x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + \mathbf{L} + (x^{27} + \frac{1}{x^{27}})^2$

(方程) (竞赛)

解: 由 $x^2 + x + 1 = 0$ 得 $x + \frac{1}{x} = -1$, $x^3 = -1$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = -1, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 + 1 = 2$$

$$x^{3k+r} + \frac{1}{x^{3k+r}} = x^r + \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -1 (r=1) \\ -1 (r=2) \\ 2 (r=3) \end{cases}$$

于是原式 $= (1+1+4) \times 9 = 54$

627、已知: R_1, R_2 是方程 $\sqrt[3]{3x+37} - \sqrt[3]{3x-37} = \sqrt[3]{2}$ 的两个根, 求 $R_1^2 + R_2^2$

(方程) (竞赛)

解: $\sqrt[3]{3x+37} - \sqrt[3]{3x-37} = \sqrt[3]{2}$

两边立方得 $74 - 3\sqrt[3]{3x+37}\sqrt[3]{3x-37}(\sqrt[3]{3x+37} - \sqrt[3]{3x-37}) = 2$

$$74 - 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3x+37}\sqrt[3]{3x-37} = 2$$

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3x+37}\sqrt[3]{3x-37} = 24, \quad 2(3x+37)(3x-37) = 24^2, \quad x^2 = \frac{(37^2 + 12^3 \times 4)}{9}$$

$$\text{于是 } x^2 = \frac{(37^2 + 12^3 \times 4)}{9}, \quad R_1^2 + R_2^2 = \frac{2(37^2 + 12^3 \times 4)}{9} = 1840\frac{2}{9}$$

716、已知 a, b 满足 $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$, $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$, 求 $a+b$ (方程) (竞赛)

解 1: 由条件得

$$(a-1)^3 + 2(a-1) + 2 = 0 \quad (1) \quad (b-1)^3 + 2(b-1) - 2 = 0 \quad (2)$$

(1) + (2) 得

$$(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a-1) + 2(b-1) = 0 \quad (1)$$

$$(a+b-2)[(a-1)^2 + (b-1)^2 - (a-1)(b-1) + 2] = 0$$

因为 $(a-1)^2 + (b-1)^2 - (a-1)(b-1) + 2 > 0$

所以 $a+b-2=0$, 于是 $a+b=2$

749、 a 、 b 、 c 为实数， $ac < 0$ ，且 $\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{5}c = 0$ ，(方程)(不等式)(竞赛)

证明：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有大于 $\frac{3}{4}$ 而小于1的根。

证明：方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac$ ，因 $b^2 \geq 0$ ， $ac < 0$ ，故 $\Delta > 0$

因此，原方程有两个不等的实根

设两实根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (1)， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (2)

因 $ac < 0$ ，故 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ，不妨设 $x_1 < 0$ ， $x_2 > 0$

因 $\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{5}c = 0$ ，故 $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}b}{a} + \frac{\sqrt{5}c}{a} = 0$ (3)

把(1)(2)代入(3)得

$\sqrt{2} - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + \sqrt{5}x_1 x_2 = 0$ (4)

$\sqrt{2} - \sqrt{3}(x_1 + x_2) = -\sqrt{5}x_1 x_2 > 0$

$\sqrt{2} - \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}x_1 > 0$ (5)

由(4)得 $x_1(\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}x_2 - \sqrt{2}$ ， $x_1 = \frac{\sqrt{3}x_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}}$ (6)

(6)代入(5)得

$\sqrt{2} - \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}}\right) > 0$ ， $(\sqrt{2} - \sqrt{3}x_2)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}}\right) > 0$

$\frac{\sqrt{5}x_2(\sqrt{3}x_2 - \sqrt{2})}{\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}} < 0$ ，因 $x_2 > 0$ ，故 $\frac{\sqrt{3}x_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{5}x_2 - \sqrt{3}} < 0$

解得 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} < x_2 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ，因 $\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 1$ 故 $\frac{3}{4} < x_2 < 1$

859、(探究)(方程)(多项式)

探求： $1+x$ ， $1+x+x^2$ ， $1+x+x^2+x^3$ ， $\cdots$ 能不能在实式范围内因式分解

解： $1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$

另一方面方程 $1-x^{n+1} = 0$ 的根是

$x = \cos \frac{2kp}{n+1} + i \sin \frac{2kp}{n+1}$ ($k = 0, 1, 2, \cdots, n$)

由此可见

(1) 当方程 $1-x^n = 0$ 有非1的实根时， $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 可在实数范围内分解

例如 n 为奇数时， $n+1 = 2m$ ($m \in N$)，取 $k = m$ ，得方程的1根为-1

$1+x+x^2+\cdots+x^n$ 有因式 $x+1$

(2) 当方程 $1-x^n = 0$ 有两个共轭纯虚根时，还可继续分解

例如 $n+1 = 4m$ ($m \in N$)，取 $k = m$ 和 $2m$ 得得方程的 i 根为 $-i$

这时 $1+x+x^2+\cdots+x^n$ 有因式 $(x-i)(x+i) = x^2+1$

一般的情况还需认真研究

1015、(运算式)化简 $(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)$

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) &= \frac{(2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)}{2^2 - 1} \\
 &= \frac{(2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)}{3} = \frac{(2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)}{3} = \frac{(2^{32} - 1)(2^{32} + 1)}{3} \\
 &= \frac{2^{64} - 1}{3}
 \end{aligned}$$

1016、(运算式)分解因式: $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{解: } x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 &= \frac{1 - x^{10}}{1 - x^2} = \frac{(1 - x^5)(1 + x^5)}{1 - x^2} \\
 &= \frac{(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)}{1 - x^2} \\
 &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)
 \end{aligned}$$

已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 满足条件 $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 (m > 0)$

$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 求证

(1) $af(\frac{m}{m+1}) < 0$ (2) 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有解

证明: (1)

$$\begin{aligned} af(\frac{m}{m+1}) &= a[\frac{am^2}{(m+1)^2} + \frac{bm}{m+1} + c] = am[\frac{am}{(m+1)^2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}] = am[\frac{am}{(m+1)^2} - \frac{a}{m+2}] \\ &= a^2m[\frac{m}{(m+1)^2} - \frac{1}{m+2}] = a^2m \cdot \frac{m(m+2) - (m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)} = -\frac{ma^2}{(m+1)^2(m+2)} < 0 \end{aligned}$$

(2) 当 $a > 0$ 时 $f(\frac{m}{m+1}) = -\frac{ma}{(m+1)^2(m+2)} < 0$,

1° 当 $f(0) = c > 0$ 时, 则 $f(0)f(\frac{m}{m+1}) < 0$ 时, 于是 $f(x) = 0$ 在 $(0, \frac{m}{m+1})$ 上有解

2° 当 $f(0) = c = 0$ 时, $f(x) = 0$ 两根为 0 和 $-\frac{b}{a}$, 因 $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} = 0$, $-\frac{b}{a} = \frac{m+1}{m+2} \in (0, 1)$

3° 当 $f(0) = c < 0$ 时, $f(1) = a + b + c = a + b + c = a + c - \frac{(m+1)a}{m+2} - \frac{(m+1)c}{m}$
 $= \frac{a}{m+2} - \frac{c}{m} > 0$, 于是 $f(1)f(\frac{m}{m+1}) < 0$, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(\frac{m}{m+1}, 1)$ 上有解

同理可证当 $a < 0$ 时方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解

综上, 原命题成立