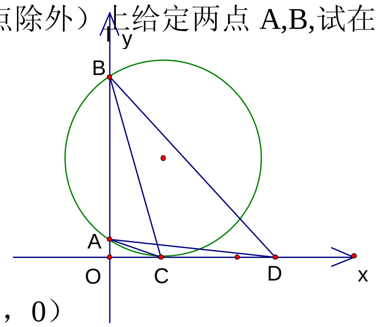
廖老师网上千题解答分类六、超纲三角

27、在平面直角坐标系中，在 y 轴的正半轴（原点除外）上给定两点 A,B,试在 x 轴的正半轴上求一点 C，使角 ACB 取得最大值



解：如图，过 A、B 作圆与 x 轴正半轴切于点 C，则 x 轴上除 C 点外，其它点都在圆外，例如点 D，由圆外角小于圆周角得，

$\angle ACB > \angle ADB$

∴点 C 为所求的点，由切割线定理

OC=$\sqrt{OA\bullet OB}=\sqrt{x_Ax_B}$，故 C 的坐标是（$\sqrt{x_Ax_B}$，0）

68、已知 sinA+sinB=1,cosA+cosB=1，求 cos(A-B)=_____,cos(A+B)=_____.

解： sinA+sinB=1 ①

cosA+cosB=1 ②

由①^2 +②^2 得

2+2 cos(A-B)=2

cos(A-B)=0

由①÷②得 $\tan\frac{A+B}{2}=1$，cos(A+B)=$\frac{1-\tan^2\frac{A+B}{2}}{1+\tan^2\frac{A+B}{2}}=0$

69、若锐角 A、B、C 满足

$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，试证 A+B+C= π

证明：∵ $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

∴ $\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

∴ $-\frac{\cos A+\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2})\sin\frac{C}{2}$

$\sin^2\frac{C}{2}-(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2})\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=0$

（$\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}$）（$\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}$）= 0

∵A、B、C 是锐角

∴ $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$ ∴ $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{p}{2}$ 故 A+B+C= π

70、计算 $\dfrac{3}{\sin^2 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}+64\sin^2 20^\circ$

解：$\dfrac{3}{\sin^2 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}+64\sin^2 20^\circ$

$=\dfrac{3\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ+64\sin^2 20^\circ\sin^2 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)(\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)+16\sin^2 20^\circ\sin^2 40^\circ}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}$

$=\dfrac{4\cos 10^\circ\cos 50^\circ+4(1-\cos 40^\circ)(1-\cos 80^\circ)}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}$

$=\dfrac{4(\cos 10^\circ\cos 50^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ)+4(1-\cos 40^\circ-\cos 80^\circ)}{\sin^2 20^\circ\cos^2 20^\circ}$

$=\dfrac{4\cos 40^\circ+4(1-\cos 40^\circ-\cos 80^\circ)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}=\dfrac{4(1-\cos 80^\circ)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}=\dfrac{8\sin^2 40^\circ}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}=32$

102、求 10cot(arccot3+arccot7+arccot13+arccot21)的值(高考不要求)

解：cot(arccot3+arccot7)＝$\dfrac{3\times 7-1}{3+7}=2$，cot(arccot13+arccot21)＝$\dfrac{13\times 21-1}{13+21}=8$

10cot(arccot3+arccot7+arccot13+arccot21)= $10\times\dfrac{2\times 8-1}{2+8}=23$

134、不等边△ABC 的两边上的高分别为 4 和 12，若第三条高的长也为整数，则它的最大可能值为多少？(初中竟赛)

解：设第三条高的长的 x，三条高 4、12、x 相应的边为 a、b、c

则 $4a=12b=xc,\Rightarrow c=\dfrac{12b}{x}$，$a=3b$

$\because a-b<c<a+b$

$\therefore 2b<\dfrac{12b}{x}<3b\Rightarrow 4<x<6$，故 x 的最大值为 5

167、在三角形 ABC 中，若 $c^2=a^2+b^2$，则此三角形为直角三角形。若 $c^n=a^n+b^n$(n>2,且 $n\in N^+$)。问此三角形为何种三角形？(趣题)

解：因为 $a^n+b^n=c^n$（$n>2$）　$(\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n=1$，$\frac{a}{c}<1,\frac{b}{c}<1$

则 $f(x)=(\frac{a}{c})^x+(\frac{b}{c})^x$ 递减

由 $n>2$ 得则 $f(n)<f(2)$ 因 $f(n)=(\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n=1$，$f(2)=(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2$

故 $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2>1$，$a^2+b^2>c^2$，三角形 ABC 为锐角三角形

176、求值$\cos\frac{p}{7}+\mathbf{cos}\frac{3p}{7}+\mathbf{cos}\frac{5p}{7}$(竞赛)

解：$\cos\frac{p}{7}+\cos\frac{p}{7}+\cos\frac{p}{7}=\dfrac{2\sin\frac{p}{7}\cos\frac{p}{7}+2\cos\frac{3p}{7}\sin\frac{p}{7}+2\cos\frac{5p}{7}\sin\frac{p}{7}}{2\sin\frac{p}{7}}$

$=\dfrac{\sin\frac{2p}{7}+\sin\frac{4p}{7}-\sin\frac{2p}{7}+\sin\frac{6p}{7}-\sin\frac{4p}{7}}{2\sin\frac{p}{7}}=\dfrac{\sin\frac{6p}{7}}{2\sin\frac{p}{7}}=\frac{1}{2}$

241、在锐角三角形 ABC 中 求证 sinA+sinB+sinC>2 (高考不要求)

解：设$\angle B=x$，则$\angle C=p-A-x$，

因为ΔABC 是锐角三角形

所以$0<A<\frac{p}{2},0<x<\frac{p}{2}$，　$A+x>\frac{p}{2}$，故$\frac{p}{2}-A<x<\frac{p}{2}$

则 sinA+sinB+sinC＝ $f(x)=\sin A+\sin x+\sin(p-x-A)$

$=\sin A+\sin x+\sin(x+A)$

$f'(x)=\cos x+\cos(x+A)=2\cos\frac{A}{2}\cos(x+\frac{A}{2})$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{p}{2}-\frac{A}{2}$

当$\frac{p}{2}-A<x<\frac{p}{2}-\frac{A}{2}$时 $f'(x)>0$，　$f(x)$ 递增

当$\frac{p}{2}-\frac{A}{2}<x<\frac{p}{2}$时 $f'(x)<0$，　$f(x)$ 递减

因此 $f(x)>f(\frac{p}{2}-A)=f(\frac{p}{2})=\sin A+\cos A+1=\sqrt{2}\sin(A+\frac{p}{4})+1$

由于$0<A<\frac{p}{2}\Rightarrow 0<A+\frac{p}{4}<\frac{3p}{4}$

故$\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\frac{p}{4})>\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

所以 $f(x)>2$，即 sinA+sinB+sinC>2

高一解法：设$\angle B=x$，则$\angle C=p-A-x$，

因为ΔABC 是锐角三角形

所以$0<A<\frac{p}{2},0<x<\frac{p}{2}$，　$A+x>\frac{p}{2}$，故$\frac{p}{2}-A<x<\frac{p}{2}$

则 sinA+sinB+sinC＝ $f(x)=\sin A+\sin x+\sin(p-x-A)$

$=\sin A+\sin x+\sin(x+A)=\sin A+2\cos\frac{A}{2}\sin(x+\frac{A}{2})$

因为$\frac{p}{2}-A<x<\frac{p}{2}$

所以$\frac{p}{2}-\frac{A}{2}<x+\frac{A}{2}<\frac{p}{2}+\frac{A}{2}$

$\sin(x+\frac{A}{2})>\sin(\frac{p}{2}+\frac{A}{2})=\sin(\frac{p}{2}-\frac{A}{2})=\cos\frac{A}{2}$

$f(x)>\sin A+2\cos^2\frac{A}{2}=\sin A+\cos A+1=\sqrt{2}\sin(A+\frac{p}{4})+1$

由于$0<A<\frac{p}{2}\Rightarrow 0<A+\frac{p}{4}<\frac{3p}{4}$

故$\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\frac{p}{4})>\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

所以 $f(x)>2$，即 $\sin A+\sin B+\sin C>2$

247、已知 $\cos(A-B)=a,\sin(A-C)=b$，求证

$\cos^2(B-C)=a^2+b^2-2ab\sin(B-C)$

证明：$a^2+b^2=\cos^2(A-B)+\sin^2(A-C)=\frac{1+\cos 2(A-B)}{2}+\frac{1-\cos 2(A-C)}{2}$

$=1+\frac{\cos 2(A-B)}{2}-\frac{\cos 2(A-C)}{2}=1-\sin(2A-B-C)\sin(C-B)$

$-2ab=-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)$

$a^2+b^2-2ab\sin(B-C)$

$=\cos^2(A-B)+\sin^2(A-C)-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)$

$=\frac{1+\cos 2(A-B)}{2}+\frac{1-\cos 2(A-C)}{2}-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)$

$=1+\frac{\cos 2(A-B)}{2}-\frac{\cos 2(A-C)}{2}-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)$

$=1-\sin(2A-B-C)\sin(C-B)-2\cos(A-B)\sin(A-C)\sin(B-C)$

$=1+\sin(B-C)\ \{\sin[(A-B)+(A-C)]-2\cos(A-B)\sin(A-C)\}$

$=1+\sin(B-C)\ \sin[(A-B)-(A-C)]$

$=1-\sin^2(B-C)=\cos^2(B-C)$

254、已知ΔABC 的三边长为 a,b,c,求证： $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

用高一方法证明

证明： $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}[\sin(B+\frac{A}{2})-\sin\frac{A}{2}]$

$\le\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}(1-\sin\frac{A}{2})\le\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

当 $B+\frac{A}{2}=90^\circ$ 且 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ 时取到“=”号

即 $A=B=C=60^\circ$ 时 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 取最大值 $\frac{1}{8}$

261、不等式 $p\cos x\le 2\sqrt{2}x$ （ $0\le x\le\frac{p}{2}$ ）的解集为

解： $p\cos x\le 2\sqrt{2}x$

作出 $y=p\cos x$ 和 $y=2\sqrt{2}x$ 的图象

易知交点横坐标为 $\frac{p}{4}$

故解集为 $[\frac{p}{4},\frac{p}{2}]$

271、已知 A,B 为锐角,sinA=x,cosB =y,cos(A+B)=-3/5,写出 y 和 x 的关系式以及定义域

解：因 A,B 为锐角

故 $y=\cos B=\cos[(A+B)-A]=\cos(A+B)\cos A-\sin(A+B)\sin A$

$=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{4}{5}x$

因 $\cos(A+B)=-\frac{3}{5}$， A,B 为锐角

故 $A+B=p-\arccos\frac{3}{5}$

$A=p-\arccos\frac{3}{5}-B$， $B\in(0,\frac{p}{2})$

故 $B\in(\frac{p}{2}-\arccos\frac{3}{5},p-\arccos\frac{3}{5})$

又因 $A\in(0,\frac{p}{2})$

故 $A\in(\frac{p}{2}-\arccos\frac{3}{5},\frac{p}{2})$

因此 $x=\sin A\in(\frac{3}{5},1)$

284、求函数 $y=\dfrac{\sin q-1}{\cos q-2}$ 的最小值和最大值.

解法 1：由 $y=\dfrac{\sin q-1}{\cos q-2}$ 得 $y\cos q-2y=\sin q-1$

$y\cos q-\sin q=2y-1 \qquad \sqrt{y^2+1}\cos(q+j)=2y-1$

$\cos(q+j)=\dfrac{2y-1}{\sqrt{y^2+1}} \qquad |\cos(q+j)|\le 1$

故 $\dfrac{|2y-1|}{\sqrt{y^2+1}}\le 1$，$(2y-1)^2\le y^2+1$

解得：$0\le y\le \dfrac{4}{3}$

解法 2：设 $x'=\cos q$ ，$y'=\sin q$ ，则 $x'^2+y'^2=1$

$y=\dfrac{\sin q-1}{\cos q-2}=\dfrac{y'-1}{x'-2}$ 表示圆 $x'^2+y'^2=1$ 上的点 $M(x'，\ y')$

与定点 $A(2,1)$ 连线的斜率

由直线 $y'-1=y(x'-2)$ 与圆有公共点得

圆心（0，0）到直线 $yx'-y'+1-2y=0$ 的距离

$d=\dfrac{|1-2y|}{\sqrt{y^2+1}}\le 1$ 以下同解 1

$y\cos q-\sin q=2y-1 \qquad \sqrt{y^2+1}\cos(q+j)=2y-1$

$\cos(q+j)=\dfrac{2y-1}{\sqrt{y^2+1}} \qquad |\cos(q+j)|\le 1$

故 $\dfrac{|2y-1|}{\sqrt{y^2+1}}\le 1$，$(2y-1)^2\le y^2+1$

解得：$0\le y\le \dfrac{4}{3}$

340、已知 A,B 为锐角,sinA=x,cosB =y, $\cos(A+B)=-\frac{3}{5}$,写出 y 和 x 的关系式以及定义域（高考不要求）

解：因 A,B 为锐角, sinA=x , $\cos(A+B)=-\frac{3}{5}$

故 $\cos A=\sqrt{1-x^2}$ =x， $\sin(A+B)=\frac{4}{5}$

故 $y=\cos B=\cos[(A+B)-A]=\cos(A+B)\cos A+\sin(A+B)\sin A$

$=-\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}x$

因 $\cos(A+B)=-\frac{3}{5}$， A,B 为锐角

故 $A+B=p-\arccos\frac{3}{5}$

$A=p-\arccos\frac{3}{5}-B$， $B\in(0,\frac{p}{2})$

故 $B\in(\frac{p}{2}-\arccos\frac{3}{5},p-\arccos\frac{3}{5})$

又因 $A\in(0,\frac{p}{2})$， 故 $A\in(\frac{p}{2}-\arccos\frac{3}{5},\frac{p}{2})$

因此 $x=\sin A\in(\frac{3}{5},1)$

341、锐角三角形，求 secA+secB+secC 之和的取值范围(联赛)

解：因为函数 $f(x)=\sec x$ 在 $(0,\frac{p}{2})$ 是下凸函数，所以

由琴生不等式得

$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\geq f(\frac{A+B+C}{3})=f(\frac{p}{3})=2$

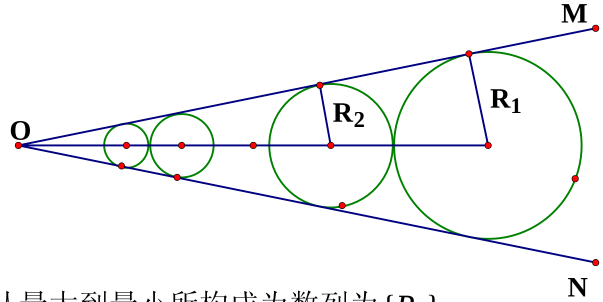
当且仅当 $A=B=C=\frac{p}{3}$ 时等号成立

故 secA+secB+secC≥ 6

又当 $A\to\frac{p}{2}$ 时 secA+secB+secC$\to+\infty$

故 secA+secB+secC 的范围是$[6,+\infty)$

378 、如图，1999 个圆分别与∠MON 的两边都相切，而这些圆一个相切于另一个，如果最大圆与最小圆半径分别为 1998，222，那么他们中的最中间的圆的半径为______(竞赛)



解：设所有圆的半径从最大到最小所构成为数列为$\{R_n\}$

则$R_1=1998$，$R_{1999}=222$，由于$\dfrac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}+R_n}=\sin\dfrac{1}{2}\angle MON$

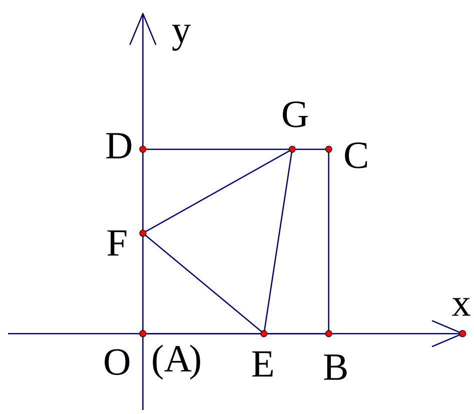
故$\dfrac{R_n}{R_{n-1}}=\dfrac{1-\sin\dfrac{\angle MON}{2}}{1+\sin\dfrac{\angle MON}{2}}$故$\{R_n\}$是等比数列，公比为$q=\dfrac{1-\sin\dfrac{\angle MON}{2}}{1+\sin\dfrac{\angle MON}{2}}$

$R_{1000}{}^2=R_1R_{1998}=111^2\times 36$，故$R_{1000}=666$

468、设有边长为 1 的正方形,试在这个正方形的内接等边三角形中,找出一个面积最大的和一个面积最小的,并求出它们的面积(联赛)

解：如图建立直角坐标系

设正方形的内接等边三角形 EFG 的三个顶点对应的复数分别是$m, ni, p+i$（$m,n,p\in[0,1]$）



则$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FE}(\cos 60°+i\sin 60°)$

即 $p+i-ni=(m-ni)\ (\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

$p+(1-n)i=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{\sqrt{3}}{2}n+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}m-\dfrac{1}{2}n)i$

故 $p=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{\sqrt{3}}{2}n$（1），$1-n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m-\dfrac{1}{2}n$（2）

由（2）得$n=2-\sqrt{3}m$，

故$S_{\Delta EFG}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|EF|^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(m^2+n^2)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}[m^2+(2-\sqrt{3}m)^2]$

$=\sqrt{3}[m^2-\sqrt{3}m+1]=\sqrt{3}[(m-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}]$

因　$0\le m\le 1$

故当 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时 $S_{\Delta EFG}$最小＝$\frac{\sqrt{3}}{4}$，此时 $n=\frac{1}{2}, p=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当 $m=1$ 时 $S_{\Delta EFG}$最大＝$\sqrt{3}[1^2-\sqrt{3}+1]=2\sqrt{3}-3$

此时 $n=2-\sqrt{3}$，$p=\sqrt{3}-1$

(此题也可用解几或三角法做)

474、在ΔABC 中，a、b、c 分别是角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，$a^2+b^2=mb^2$，$\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=\frac{3}{2}$，求 m　(竞赛)

解：$\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=\frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}}=\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}\cos C=\frac{ab}{c^2}\bullet\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{mc^2-c^2}{2c^2}=\frac{m-1}{2}=\frac{3}{2}, m=4$

544、$\tan A_1\tan A_2\cdots\cdots\tan An=1$,求 $\sin A_1\sin A_2\cdots\cdots\sin An$ 的最大值______

(不等式) (竞赛)

解：不妨设 $An\in(0,\frac{p}{2})$

因 $\tan A_1\tan A_2\cdots\cdots\tan An=1$,故 $\cot A_1\cot A_2\cdots\cdots\cot An=1$

$1/(\sin A_1\sin A_2\cdots\cdots\sin An)^2=\csc^2 A_1\csc^2 A_2\cdots\cdots\csc^2 An$

$=(1+\cot^2 A_1)(1+\cot^2 A_2)\cdots\cdots(1+\cot^2 An)\ge 2\cot A_1\bullet 2\cot A_1\bullet\cdots\cdots 2\cot A_1=2^n$

$(\sin A_1\sin A_2\cdots\cdots\sin An)^2\le\frac{1}{2^n}$，$\sin A_1\sin A_2\cdots\cdots\sin An\le\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

当且仅当 $\tan A_1=\tan A_2=\cdots\cdots=\tan An=1$ 时上式取等号

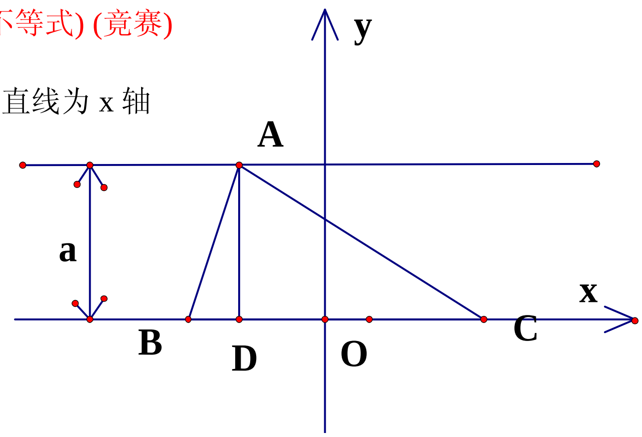
于是 $\sin A_1\sin A_2\cdots\cdots\sin An$ 的最大值是 $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

599、三角形 ABC 中，BC=a，而 A 点在平行于 BC 上的直线且他们之间的距离是 a（即高为 a）上移动

求：AB∶AC 的取值范围。(函数不等式) (竞赛)

解：设 AB＝c，AC=b，BC=a

以 BC 的中点为原点，BC 所在的直线为 x 轴建立直角坐标系（如图）



则 $B(-\frac{a}{2},0)$，$C(\frac{a}{2},0)$，设 $A(x,a)$

则 $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+a^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+a^2}}$

$=\sqrt{\frac{x^2+ax+\frac{5a^2}{4}}{x^2-ax+\frac{5a^2}{4}}}$ 设 $t=\frac{x^2+ax+\frac{5a^2}{4}}{x^2-ax+\frac{5a^2}{4}}$

则 $(t-1)x^2-a(t+1)x+\frac{5a^2}{4}(t-1)=0$

当 $t=1$ 时 x=0，于是 $t=1$ 能取到

当 $t\neq 1$ 时 $\Delta=a^2(t+1)^2-5a^2(t-1)^2\geq 0$

$-4t^2+12t-4t^2\geq 0$，$t^2-3t+1\leq 0$

解得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leq t\leq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$（$t\neq 1$），综上 $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\leq t\leq\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$，

于是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq\sqrt{t}\leq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{|AB|}{|AC|}$ 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$

解2: $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{a^2+2bc\cos A}{bc}=\frac{a^2}{bc}+2\cos A=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}+2\cos A$

$=\frac{S_{DABC}\sin A}{S_{DABC}}+2\cos A=\sin A+2\cos A=\sqrt{5}\sin(A+j)\text{ £ }\sqrt{5}$

设 $t=\frac{b}{c}$，则 $t+\frac{1}{t}\text{ £ }\sqrt{5},t^2-\sqrt{5}t+1\text{ £ }0$,解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq t\leq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

640、若 $\arccos x+\arccos y+\arccos z=p$ ，求证 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (三角) (竞赛)

证明：设 $\arccos x=a$ ， $\arccos y=b$ ， $\arccos z=p-(a+b)$

于是 $\cos a=x$， $\cos b=y$， $\cos(a+b)=-z$

$x^2+y^2+z^2$

$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2(a+b)$

$=\frac{1+\cos 2a}{2}+\frac{1+\cos 2b}{2}+\cos^2(a+b)$

$=1+\frac{\cos 2a+\cos 2b}{2}+\cos^2(a+b)$

$=1+\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos^2(a+b)$

$=1+\cos(a+b)[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

$=1+\cos(a+b)\bullet 2\cos a\cos b=1-2xyz$　　故原式成立

641、设函数 $y=\sin[\arccos(x-p)]$ 的的图象与 x 轴交于 A、B 两点，C 是图象上任意一点，且 $CD\perp AB$，垂足为 D，求 $|CA|+|CB|+|CD|$ 最大值

定义域是______(三角) (竞赛)

解： $y=\sin[\arccos(x-p)]$ 的定义域是

由 $-1\le x-p\le 1$ 得，定义域 $p-1\le x\le p+1$

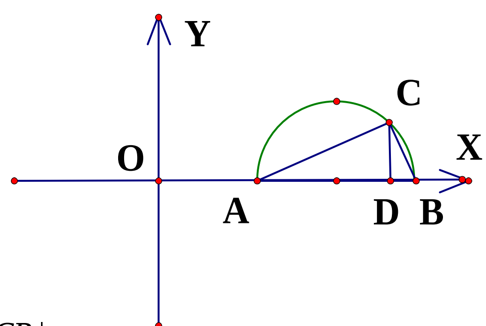
因 $0\le\arccos(x-p)\le p$ ，故

$y=\sin[\arccos(x-p)]=$

$\sqrt{1-\cos^2[\arccos(x-p)]}=\sqrt{1-(x-p)^2}$

即 $(x-p)^2+y^2=1$ （ $y\ge 0$ ）

它的图象是半圆，如图



$|CA|^2+|CB|^2=(2R)^2=4, |CD|=\frac{1}{2}|CA||CB|$

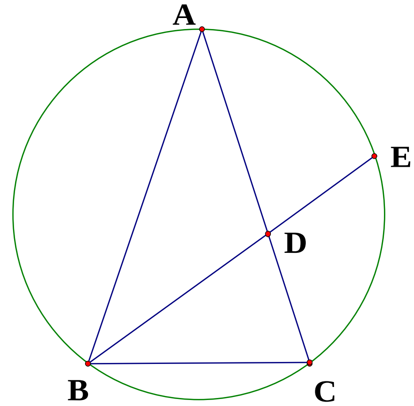
$|CA|+|CB|+|CD|=|CA|+|CB|+\frac{1}{2}|CA||CB|$

$\le\sqrt{2(|CA|^2+|CB|^2)}+\frac{1}{4}(|CA|^2+|CB|^2)=\sqrt{2\times 4}+\frac{1}{4}\times 4=2\sqrt{2}+1$

当且仅当 $|CA|=|CB|=\sqrt{2}$ 时上式取等号

综上， $|CA|+|CB|+|CD|$ 最大值是 $2\sqrt{2}+1$

686、三角形 ABC 内接于圆
过 B 点作角 B 的角平分线交 AC 于 D,交圆与 E
BD=BC=22,AB=35,求 DE 长(解三角形)



解： 因 BE 平分角 ABC
故可设 $AD=35t$， $BC=22t$
因 $\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$

故 $\dfrac{22^2+(35t)^2-35^2}{2\times22\times35t}+\dfrac{22^2+(22t)^2-22^2}{2\times22\times22t}=0$

$(35t)^2+22\times35t^2=35^2-22^2$

$t^2=\dfrac{13}{35}$

$BD\bullet DE=AD\bullet DE$

$22\times DE=35\times22t^2$， $DE=35t^2=13$

711、a,b,c 是三角形 A,B,C 角所对的边长,且 AC 边上的高为 c-a,则 $\sin\dfrac{C-A}{2}+\cos\dfrac{C+A}{2}=$______(解三角形)

解：设 AC 边上的高是 h

则 $c-a=h$， $\dfrac{c}{h}-\dfrac{a}{h}=1$， $\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\sin C}=1$， $\sin C-\sin A=\sin A\sin C$

$2\cos\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}=-\dfrac{1}{2}[\cos(C+A)-\cos(C-A)]$

$2\cos\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}=-\dfrac{1}{2}[2\cos^2\dfrac{C+A}{2}-1-1+2\sin^2\dfrac{C-A}{2}]$

$(\cos\dfrac{C+A}{2}+\sin\dfrac{C-A}{2})^2=1$

因 $2\cos\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}=\sin A\sin C>0$， $\cos\dfrac{C+A}{2}>0$

故 $\cos\dfrac{C+A}{2}+\sin\dfrac{C-A}{2}>0$， 于是 $\cos\dfrac{C+A}{2}+\sin\dfrac{C-A}{2}=1$

764、 $\sin A+\sin B=\dfrac{1}{2}$ 求 cosA+cosB 的范围(三角)

解 1：设 $\cos A+\cos B=t$ （1） $\sin A+\sin B=\dfrac{1}{2}$ （2）

由（1）平方+（2）平方得, $t^2=\dfrac{7}{4}+2\cos(A-B)\in[-\dfrac{1}{4},\dfrac{15}{4}]$

$t^2\le\dfrac{15}{4}$， $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

解 2：设 $\cos A+\cos B=t$ 则 $\cos A=t-\cos B$

由 $\sin A+\sin B=\frac{1}{2}$ 得 $\sin A=\frac{1}{2}-\sin B$,于是 $(t-\cos B)^2+(\frac{1}{2}-\sin B)^2=1$

$t^2+\frac{1}{4}-2t\cos B-\sin B=0$，$t^2+\frac{1}{4}=\sqrt{4t^2+1}\sin(B+j)$，$\sin(B+j)=\frac{t^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{4t^2+1}}\le 1$

$t^4-\frac{7}{2}t^2-\frac{15}{16}\le 0$，$(t^2-\frac{15}{4})(t^2+\frac{1}{4})\le 0$，$t^2\le\frac{15}{4}$，$-\frac{\sqrt{15}}{2}\le t\le\frac{\sqrt{15}}{2}$

766、求 tan20°（csc10° -1) (三角)

解：$\tan 20°(\csc 10° - 1) = \tan 20° \cdot \frac{1 - \sin 10°}{\sin 10°}$

$= \tan 20° \cdot \frac{1 - \cos 80°}{\sin 80°} \cdot \frac{\sin 80°}{\cos 80°} = \tan 20°\tan 40°\tan 80° = \frac{\sin 20°\sin 40°\sin 80°}{\cos 20°\cos 40°\cos 80°}$

$\cos 20°\cos 40°\cos 80° = \frac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°} = \frac{\sin 80°\cos 80°}{4\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{8\sin 20°} = \frac{1}{8}$

$\sin 20°\sin 40°\sin 80° = \sin 20°\cos 10°\sin 40° = \frac{1}{2}(\sin 30° + \sin 10°)\sin 40°$

$= \frac{1}{4}\sin 40° + \frac{1}{2}\sin 40°\sin 10° = \frac{1}{4}\sin 40° - \frac{1}{4}(\cos 50° - \cos 30°) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

因此，原式=$\sqrt{3}$

767、若 $n\sin 1>5\cos 1+1$，$n\in N$ 则 n 的最小值是_______ (三角) (竞赛)

解：$n>\frac{5\cos 1+1}{\sin 1}=5\cot 1+\frac{1}{\sin 1}$

$5\cot 1+\frac{1}{\sin 1}>5\cot 60°+\frac{1}{\sin 60°}=\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}>\sqrt{\frac{48}{3}}=4$

$5\cot 1+\frac{1}{\sin 1}<5\cot 45°+\frac{1}{\sin 45°}=5+\frac{1}{\sqrt{2}}<5$

于是 n 的最小值是_______5

768、已知$0 \le x \le 1$， $a = \mathbf{arcsin(cos}\ x\mathbf{)}$，b=cos(arcsinx)，求証：$a > b$

(三角) (高考不要求)

证明：（1）重要定理

$0 \le x \le \frac{p}{2}$时， $y = \sin x$递增， $y = \cos x$递减

$0 < x \le \frac{p}{2}$时， $x > \sin x$

$0 \le x \le 1$时， $y = \arcsin x$递增， $y = \arccos x$递减

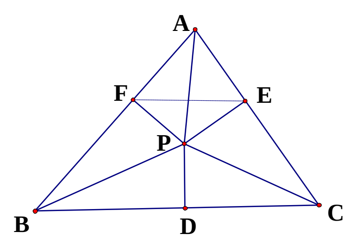
（2）$0 < x \le 1 \Rightarrow \sin x < x \Rightarrow \arcsin(\sin x) < \arcsin x \Rightarrow x < \arcsin x$

$\Rightarrow \cos x > \cos(\arcsin x)$①

$\cos x > \sin(\cos x) \Rightarrow \arcsin(\cos x) > \arcsin[\sin(\cos x)] = \cos x$②

由①②得$\arcsin(\cos x) > \cos(\arcsin x)$，即$a > b$

814、已知 P 为三角形 ABC 内部或边界上任一点，
过 P 向三角形三边作垂线，交三边于 DEF，
求证：PA+PB+PC≥2（PD+PE+PF）
证明：因 P、E、A、F 四点共圆 (平几) (解三角形) (竞赛)



故 $PA = \frac{EF}{\sin A} = \frac{\sqrt{PE^2 + PF^2 + 2PE \bullet PF \cos A}}{\sin A}$

$$= \frac{\sqrt{PE^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + PF^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2PE \bullet PF \cos(B + C)}}{\sin A}$$

$= \frac{\sqrt{(PE \sin C + PF \sin B)^2 + (PE \cos C - PF \cos B)^2}}{\sin A} \ge \frac{\sqrt{(PE \sin C + PF \sin B)^2}}{\sin A}$

$= \frac{PE \sin C + PF \sin B}{\sin A}$ 即 $PA \ge \frac{PE \sin C}{\sin A} + \frac{PF \sin B}{\sin A}$

同理 $PB \ge \frac{PF \sin A}{\sin B} + \frac{PD \sin C}{\sin B}$， $PC \ge \frac{PD \sin B}{\sin C} + \frac{PE \sin A}{\sin C}$

于是

$PA + PB + PC \ge \frac{PD \sin C}{\sin B} + \frac{PD \sin B}{\sin C} + \frac{PE \sin C}{\sin A} + \frac{PE \sin A}{\sin C} + \frac{PF \sin B}{\sin A} + \frac{PF \sin A}{\sin B}$

$\ge 2PD + 2PE + 2PF$

818、(解三角形) (竞赛)已知ΔABC中， $0<A<\frac{p}{2},0<B<\frac{p}{2}$， $0<C<\frac{p}{2}$， 且 A+B+C=$\frac{p}{2}$，求证： $\cos A+\cos B+\cos C>2$

证明：设$\angle B=x$，则$\angle C=\frac{p}{2}-A-x\in(0,\frac{p}{2}),0<A+x<\frac{p}{2},-A<x<\frac{p}{2}-A$

又$0<x<\frac{p}{2}$， $0<x<\frac{p}{2}-A$，

则$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos x+\cos(\frac{p}{2}-x-A)$

$=\cos A+\sin(\frac{p}{2}-x)+\sin(x+A)=\cos A+2\sin(\frac{p}{4}+\frac{A}{2})\cos(x+\frac{A}{2}-\frac{p}{4})$

$0<x<\frac{p}{2}-A\Rightarrow\frac{A}{2}-\frac{p}{4}<x+\frac{A}{2}-\frac{p}{4}<\frac{p}{4}-\frac{A}{2}$

于是$\cos A+2\sin(\frac{p}{4}+\frac{A}{2})\cos(x+\frac{A}{2}-\frac{p}{4})>\cos A+2\sin(\frac{p}{4}+\frac{A}{2})\cos(\frac{p}{4}-\frac{A}{2})$

$=\cos A+2\sin^2(\frac{p}{4}+\frac{A}{2})=\cos A+1-\cos(\frac{p}{2}+A)=\sin A+\cos A+1>2$

即$\cos A+\cos B+\cos C>2$

819、计算$8\sin^2\frac{p}{7}\sin^2\frac{2p}{7}\sin^2\frac{3p}{7}$

解： $\cos\frac{p}{7}\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{3p}{7}=\frac{\sin\frac{2p}{7}\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{3p}{7}}{2\sin\frac{p}{7}}=\frac{\sin\frac{4p}{7}(-\cos\frac{4p}{7})}{4\sin\frac{p}{7}}=\frac{-\sin\frac{8p}{7}}{8\sin\frac{p}{7}}=\frac{1}{8}$

$8\sin^2\frac{p}{7}\sin^2\frac{2p}{7}\sin^2\frac{3p}{7}=(1-\cos\frac{2p}{7})(1-\cos\frac{4p}{7})(1-\cos\frac{6p}{7})$

$=1-\cos\frac{2p}{7}-\cos\frac{4p}{7}-\cos\frac{6p}{7}+\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{4p}{7}+\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{6p}{7}+\cos\frac{4p}{7}\cos\frac{6p}{7}$

$-\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{4p}{7}\cos\frac{6p}{7}$

$=1-\cos\frac{2p}{7}+\cos\frac{3p}{7}+\cos\frac{p}{7}+\frac{1}{2}(\cos\frac{6p}{7}+\cos\frac{2p}{7})+\frac{1}{2}(\cos\frac{8p}{7}+\cos\frac{4p}{7})$

$+\frac{1}{2}(\cos\frac{10p}{7}+\cos\frac{2p}{7})-\cos\frac{p}{7}\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{3p}{7}$

$=1-\cos\frac{2p}{7}+\cos\frac{3p}{7}+\cos\frac{p}{7}+\frac{1}{2}(-\cos\frac{p}{7}+\cos\frac{2p}{7})+\frac{1}{2}(-\cos\frac{p}{7}-\cos\frac{3p}{7})$

$+\frac{1}{2}(-\cos\frac{3p}{7}+\cos\frac{2p}{7})-\cos\frac{p}{7}\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{3p}{7}=1-\cos\frac{p}{7}\cos\frac{2p}{7}\cos\frac{3p}{7}=\frac{7}{8}$

825、A、B、C 为三角形 ABC 的三个内角，$y=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

(1)证明:任意交换 A、B、C 的位置,y 的值不变;
(2)求 y 的最大值 (三角)

（1） $y=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2(A+B)$

$=2-\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=2-\cos(A+B)(2\cos A\cos B)=2+2\cos A\cos B\cos C$

（2） $y=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C=-[\cos^2 C-\cos C\cos(A-B)]+2$

$=-[\cos^2 C-\frac{1}{2}\cos(A-B)]^2+2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\le 2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\le\frac{9}{4}$

当且仅当 $A=B=C=\frac{p}{3}$ 时等号成立，因此 $y_{\max}=\frac{9}{4}$

925、(三角) (集合)

w 是正实数，设 $S_w=\{q\mid f(x)=\cos[w(x+q)]\text{是奇函数}\}$，若对每个实数 a，S_w $\mathbf{I}$（a，$a+1$）的元素的不超过 2 个，且有 a 使 S_w $\mathbf{I}$（a，$a+1$）含有 2 个元素，则 w 的取值范围是_________

解：当 $f(x)=\cos[w(x+q)]$是奇函数 时

$f(0)=\cos wq=0$，于是 $wq=\frac{p}{2}+kp$，$q=\frac{\frac{p}{2}+kp}{w}$，$k\in z$

于是 $S_w=\{q\mid q=\frac{\frac{p}{2}+kp}{w},k\in z\}$

因为 S_w $\mathbf{I}$（a，$a+1$）的元素的不超过 2 个，

所以 $S_w=\{q\mid q=\frac{\frac{p}{2}+kp}{w},k\in z\}$ 中三个相邻元的距离大于或等于 1

故 $\frac{2p}{w}\ge 1$，$w\le 2p$

因为有 a 使 S_w $\mathbf{I}$（a，$a+1$）含有 2 个元

所以 $S_w=\{q\mid q=\frac{\frac{p}{2}+kp}{w},k\in z\}$ 中两个相邻元素的距离小于 1

故 $\frac{p}{w}<1$，$w>p$，综上，w 的取值范围是 $p<w\le 2p$

注：$S_w=\{q\mid q=\frac{\frac{p}{2}+kp}{w},k\in z\}$ 中两个相邻元素的距离，可取 $k=0$和1

954、(三角)

已知 A,B 是锐角，且 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin(A+B)$，求 $A+B$

解：$\sin^2 A+\sin^2 B=\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}=1-\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

$=1-\cos(A+B)\cos(A-B)=\sin(A+B)$

平方得

$1-2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)\cos^2(A-B)=1-\cos^2(A+B)$

于是 $\cos(A+B)[\cos(A+B)\cos^2(A-B)+\cos(A+B)-2\cos(A-B)]=0$

$\cos(A+B)=0$ ①或 $\cos(A+B)\cos^2(A-B)+\cos(A+B)-2\cos(A-B)=0$ ②

因 A,B 是锐角

由①得 $A+B=90°$

由②得 $\cos(A+B)[\cos^2(A-B)+1]=2\cos(A-B)$ ③

因 $\cos^2(A-B)+1<2$， $\cos(A+B)<\cos(A-B)$ 故③不成立舍去

综上所述 $A+B=90°$

1023、(三角)

求证：$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

证明：$\tan^2\theta\sin^2\theta+\sin^2\theta$

$=\sin^2\theta(\tan^2\theta+1)=\sin^2\theta\sec^2\theta=\tan^2\theta$

因此 $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

1039、(三角)

△ABC 中，A=$\dfrac{\pi}{3}$，BC=3 则△ABC 的周长为多少?

A. $4\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{6}+B)+3$ B. $4\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi}{3}+B)+3$ C. $6\sin(\dfrac{\pi}{6}+B)+3$ D. $6\sin(\dfrac{\pi}{3}+B)+3$

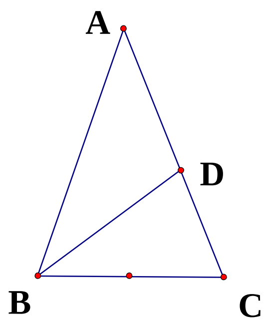
解： $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$

$$b+c=2R(\sin B+\sin C)=4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\frac{6}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{2B-\frac{2\pi}{3}}{2}$$

$=6\cos(B-\dfrac{\pi}{3})=6\cos(\dfrac{\pi}{3}-B)=6\sin(\dfrac{\pi}{6}+B)$，因此 $a+b+c=6\sin(\dfrac{\pi}{6}+B)+3$

1075、(三角)

求证 $\sin 18°$ 为无理数



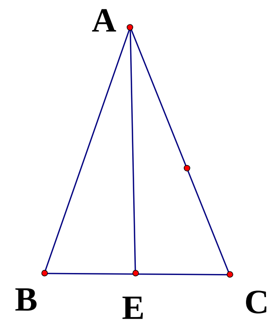


图 1 中， $AB = AC = a$， $\angle A = 36°$， $\angle CBD = 36°$

则 $\Delta BCD \backsim \Delta BCD$， 由于 $AD = BD = BC$

故 $AD^2 = AC \bullet DC$

设 $AD = x$， 则 $x^2 = a(a - x)$

解得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

图 2 中，E 是 BC 的中点

$\sin \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$， $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 故为无理数

1125、(三角)

已知 $0 < x < \frac{p}{2}$， $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x(\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 (2)若 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$， 求 x 的值

解： $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x g \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin^2 x g \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin(2x + \frac{p}{3})$

以下略

1175、(三角)

w 是正实数，设 $S_w=\{q \mid f(x)=\cos[w(x+q)]是奇函数\}$，若对每个实数 a , $S_w\ \mathbf{I}\ (a，a+1)$ 的元素的不超过 2 个，且有 a 使 $S_w\ \mathbf{I}\ (a，a+1)$ 含有 2 个元素，则 w 的取值范围是________

解：当 $f(x)=\cos[w(x+q)]$是奇函数时

$f(0)=\cos wq=0$，于是 $wq=\dfrac{p}{2}+kp$，$q=\dfrac{\frac{p}{2}+kp}{w}$，$k\in z$

于是 $S_w=\{q \mid q=\dfrac{\frac{p}{2}+kp}{w}, k\in z\}=$

此集合元素有：……，$\dfrac{\frac{p}{2}+0p}{w}$，$\dfrac{\frac{p}{2}+1p}{w}$，$\dfrac{\frac{p}{2}+2p}{w}$，$\dfrac{\frac{p}{2}+3p}{w}$，……

于是，相邻 2 元素距离都是 $\dfrac{\frac{p}{2}+3p}{w}-\dfrac{\frac{p}{2}+2p}{w}=\dfrac{p}{w}$

∵对每个实数 a , $S_w\ \mathbf{I}\ (a，a+1)$ 元素的不超过 2 个

∴ S_w 中三个相邻元的距离大于或等于 1

故 $\dfrac{2p}{w}\geq 1$，$w\leq 2p$

∵有 a 使 $S_w\ \mathbf{I}\ (a，a+1)$ 含有 2 个元素

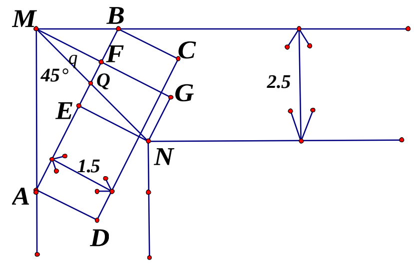
∴ S_w 中两个相邻元素的距离小于 1

故 $\dfrac{p}{w}<1$，$w>p$，综上，w 的取值范围是 $p<w\leq 2p$

1181、(三角)

宽 2.5cm 的巷道内有一直角转弯，宽为 1.5cm 的汽车驶入该巷道，要使汽车顺利转弯，汽车车身长不能超过多少米？

（保留整数，参考数据 $\sqrt{2}$=1.414,$\sqrt{3}$=1.732 ）



解：如图设 $AB=l$， $\angle NMG=q$ ，

则 $MG=MN\times\cos q=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\cos q$ ，

$$MF=MB\times\sin(45^\circ+q)=l\cos(45^\circ+q)\sin(45^\circ+q)=\frac{1}{2}l\sin(90^\circ+2q)=\frac{1}{2}l\cos 2q$$

$NE=GF=MG-MB=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\cos q-\dfrac{1}{2}l\cos 2q\geq\dfrac{3}{2}$ 对 $q\in(-45^\circ,45^\circ)$ 恒成立

即 $l\leq\dfrac{5\sqrt{2}\cos q-3}{\cos 2q}=\dfrac{5\sqrt{2}\cos q-3}{2\cos^2 q-1}$ 对 $q\in(-45^\circ,45^\circ)$ 恒成立

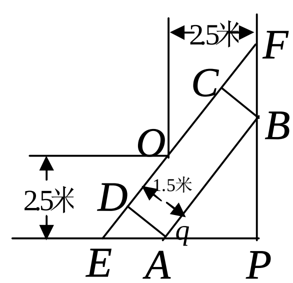
设 $t=5\sqrt{2}\cos q-3\in(2,5\sqrt{2}-3]$

则 $\cos q=\dfrac{t+3}{5\sqrt{2}}$， 于是 $l\leq\dfrac{25t}{t^2+6t-16}=\dfrac{25}{t-\dfrac{16}{t}+6}$ 对 $t\in(2,5\sqrt{2}-3]$ 恒成立

故 $l\leq\dfrac{25}{t-\dfrac{16}{t}+6}$ 的最小值， 因 $f(t)=\dfrac{25}{t-\dfrac{16}{t}+6}$ 在 $t\in(2,5\sqrt{2}-3]$ 递减，

于是 $f(t)_{最小}=f(5\sqrt{2}-3)=\dfrac{5\sqrt{2}\cos 0-3}{\cos(2\times 0)}=5\sqrt{2}-3$，此时 $q=0$， 故 $l\leq 5\sqrt{2}-3$

解 2：如图，设 $AB=f(q)$，则



$f(q)=\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\mathrm{OE}+\mathrm{O}F-DE-DF$

$=\dfrac{2.5}{\sin q}+\dfrac{2.5}{\cos q}-\dfrac{1.5}{\tan q}-1.5\tan q=\dfrac{2.5(\sin q+\cos q)-1.5}{\sin q\cos q}$

设 $t=\sin q+\cos q=\sqrt{2}\sin(q+\dfrac{p}{4})$,

则 $t^2=1+2\sin q\cos q,\sin q\cos q=\dfrac{t^2-1}{2}$

$y=\dfrac{5t-3}{t^2-1},t=\sqrt{2}\sin(q+\dfrac{p}{4}),0<q<\dfrac{p}{4},1<t\leq\sqrt{2},$

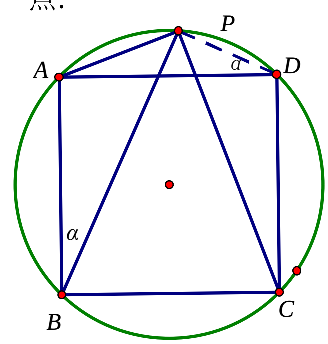
$y'=\dfrac{5(t^2-1)-2t(5t-3)}{(t^2-1)^2}=\dfrac{-5t^2+6t-5}{(t^2-1)^2}=-\dfrac{5(t^2-1.2t+1)}{(t^2-1)^2}=-\dfrac{5[(t-0.6)^2+0.64]}{(t^2-1)^2}<0,$

于是 $\mathrm{h(t)}=\dfrac{5t-3}{t^2-1}$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上递减，当 $t=\sqrt{2}$ 时， $y_{\min}=5\sqrt{2}-3$, 故车长 $l\leq 5\sqrt{2}-3$

1196、(解三角形)

如图圆 O 外接于正方形 ABCD,P 为劣弧 AD 上任一点:

求证：$\dfrac{PA+PC}{PB}$ 为一定值.



解：设 $\angle PAB=\alpha$，则 $\angle PDA=\alpha$,$\angle PDC=90^\circ+\alpha$

$\angle PAD=45^\circ-\alpha$，$\angle PAB=135^\circ-\alpha$

$$\frac{PA+PC}{PB}=\frac{\sin\alpha+\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin(135^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\sqrt{2}$$

1224、(三角) (竞赛)

$f(x)=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|$ 的最大值与最小值的差是多少?

解：$f(-x)=|\sin(-x)|+\sin^4 2(-x)+|\cos(-x)|=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|=f(x)$

$$f(x+\frac{\pi}{2})=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+\sin^4 2(x+\frac{\pi}{2})+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|=|\cos x|+\sin^4 2x+|\sin x|=f(x)$$

于是 $f(x)$ 是偶函数，周期 $\frac{\pi}{2}$，

当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时 $y=|\sin x|, y=\sin^4 2x, y=|\cos x|$ 都递增

于是 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上递增，由于是偶函数故 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0]$ 上递减，

因此 $f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{4})=1+\sqrt{2}, f(x)_{\min}=f(0)=1, f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\sqrt{2}$

1225、(三角) (竞赛)

求值 $\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ$

解： $\cos 6^\circ\cos 42^\circ\cos 66^\circ\cos 78^\circ$

$=(\cos 6^\circ\cos 66^\circ)(\cos 42^\circ\cos 78^\circ)$

$=\frac{1}{4}(\cos 72^\circ+\cos 60^\circ)(\cos 120^\circ+\cos 36^\circ)$

$=\frac{1}{4}[\cos 72^\circ\cos 36^\circ+\frac{1}{2}(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)-\frac{1}{4}]$

$=\frac{1}{4}[\cos 72^\circ\cos 36^\circ+\sin 54^\circ\sin 18^\circ-\frac{1}{4}]=\frac{1}{4}[2\cos 72^\circ\cos 36^\circ-\frac{1}{4}]$

$2\cos 72^\circ\cos 36^\circ=\dfrac{\cos 72^\circ\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\dfrac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ}=\dfrac{1}{2}$

原式 $=\frac{1}{4}[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}]=\frac{1}{16}$

1240、(三角) (竞赛)

已知 $\sin a\cos b=\frac{1}{2}$，求 t=$\cos a\sin b$ 的变化范围

解：因为 $\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin a\cos b$

$$\sin(a+b)\leqslant 1，\sin a\cos b=\frac{1}{2}$$

所以 $\cos a\sin b\leqslant\frac{1}{2}$　　当 $a=b=\frac{p}{4}$ 时取等号

因为 $\cos a\sin b=\sin a\cos b-\sin(a-b)$

$$\sin(a-b)\geqslant -1，\sin a\cos b=\frac{1}{2}$$

所以 $\cos a\sin b\geqslant -\frac{1}{2}$ 当 $a=\frac{3p}{4},b=\frac{p}{4}$ 时取等号

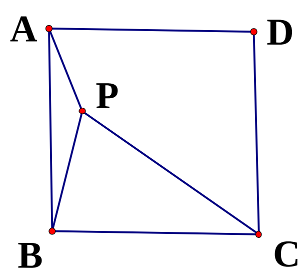
综上所述，$-\frac{1}{2}\leqslant\cos a\sin b\leqslant\frac{1}{2}$

1241、(解三角形) (竞赛)

设 P 是正方形 ABCD 内部的一点，P 到顶点 A、B、C 的距离分别是 1、2、3，求正方形的边长。此题是考查什么知识点？
有什么简捷作法吗？

答：考余弦定理，可列方程解

解：设边长为 x，则



因 $\cos\angle ABP=\frac{x^2+3}{4x}$，$\cos\angle CBP=\frac{x^2-5}{4x}$

$\angle ABP+\angle CBP=\frac{p}{2}$

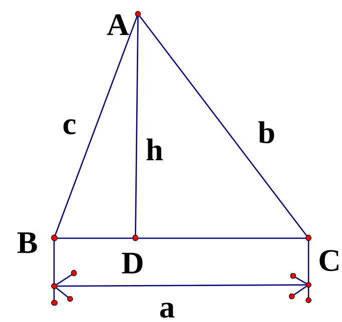
故 $(\frac{x^2+3}{4x})^2+(\frac{x^2-5}{4x})^2=1$

$(x^4+6x^2+9)+(x^4-10x^2+25)=16x^2$

$x^4-10x^2+17=0$

$x^2=\frac{10\pm\sqrt{32}}{2}=5\pm2\sqrt{2}$，$x=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

1244、(解三角形) (不等式)在三角形ABC中,AD垂直BC,D为垂足,且AD=BC=a,求$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$的最大值



解 1(从泥塘中解出)：不妨设$b\ge c$，

$a=1$设 BD=x（$x\le\frac{1}{2}$），则$DC=1-x$

$$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{1+(1-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+\frac{1-2x}{1+x^2}}$$

设$1-2x=t\ge 0$，$x=\frac{1-t}{2}$

当$t=0$时，$\frac{b}{c}=1$

当$t>0$时，

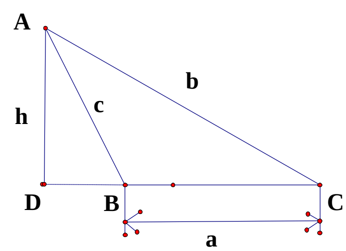
$$\frac{b}{c}=\sqrt{1+\frac{t}{1+(\frac{1-t}{2})^2}}=\sqrt{1+\frac{4t}{5+t^2-2t}}=\sqrt{1+\frac{4}{\frac{5}{t}+t-2}}\le\sqrt{1+\frac{4}{2\sqrt{5}-2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

当$t=\sqrt{5}$，即$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（D在CB的延长线上）取等号

设$\frac{b}{c}=m$，则$1\le m\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=f(m)=m+\frac{1}{m}$在$[1,\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$上递增，于是

$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$最大值$=f(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}$



解 2：好的方法

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{a^2+2bc\cos A}{bc}=\frac{a^2}{bc}+2\cos A=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin A}+2\cos A$$

$$=\frac{S_{DABC}\sin A}{S_{DABC}}+2\cos A=\sin A+2\cos A=\sqrt{5}\sin(A+j)$$

$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$最大值$=\sqrt{5}$

1255、(三角) (竞赛)

已知$6\sin 2a = \sin 2$，求$\dfrac{\tan(a+1)}{\tan(a-1)}$

解：因为$6\sin 2a = \sin 2$

$$\sin 2a = \sin[(a+1)+(a-1)] = \sin(a+1)\cos(a-1)+\cos(a+1)\sin(a-1)$$

$$\sin 2 = \sin[(a+1)-(a-1)] = \sin(a+1)\cos(a-1)-\cos(a+1)\sin(a-1)$$

所以$5\sin(a+1)\cos(a-1) = -7\cos(a+1)\sin(a-1)$

故$\dfrac{\tan(a+1)}{\tan(a-1)} = -\dfrac{7}{5}$

1260、(解三角形)

三角形 ABC 中，$\sin^2 A+\sin^2 C = 2\sin^2 B$

求$\cot A, \cot C, \cot B$之间的关系

解：$\sin^2 A+\sin^2 C = 2\sin^2 B$，$a^2+c^2 = 2b^2$，$\cos B = \dfrac{-b^2}{ac} = \dfrac{-\sin^2 B}{\sin A\sin C}$，

$$\cot B = \frac{-\sin B}{\sin A\sin C} = -\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin A\sin C} = -(\cot A+\cot C)$$

于是$\cot A+\cot C+\cot B = 0$

1314

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=19806&start=24&show=0

在三角形 ABC 中，a,b,c为三边长，$p = \dfrac{a+b+c}{2}$，R 为外接圆半径，r 为内切圆半径，求证：$ab+bc+ac = p^2+4Rr+r^2$

证明：$R = \dfrac{abc}{4S}$，$r = \dfrac{S}{p}$，$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (S 是三角形的面积)

$$p^2+4Rr+r^2 = p^2+\frac{abc}{p}+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$= p^2+\frac{abc}{p}+\frac{p^3-(a+b+c)p+(ab+bc+ac)p-abc}{p}$$

$$= 2p^2-(a+b+c)p+(ab+bc+ac)$$

$$= 2p^2-2p^2+(ab+bc+ac) = ab+bc+ac$$

1342

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21158&show=0

求证：$\dfrac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \mathbf{L} + 180\sin 180^\circ}{90} = \cot 1^\circ$

证明：设 $f(x) = \cos 2x + \cos 4x + \mathbf{L} + \cos 180x$

则 $2\sin x f(x) = 2\cos 2x \sin x + 2\cos 4x \sin x + \mathbf{L} + 2\cos 180x \sin x$

$= \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \mathbf{L} + \sin 181x - \sin 179x$

$= \sin 181x - \sin x$

于是 $f(x) = \cos 2x + \cos 4x + \mathbf{L} + \cos 180x = \dfrac{\sin 181x}{2\sin x} - \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = -(2\sin 2x + 4\sin 4x + \mathbf{L} + 180\sin 180x) = \dfrac{181\cos 181x \sin x - \sin 181x \cos x}{2\sin^2 x}$

故 $f'(1^\circ) = -(2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \mathbf{L} + 180\sin 180^\circ) = \dfrac{181\cos 181^\circ \sin 1^\circ - \sin 181^\circ \cos 1^\circ}{2\sin^2 1^\circ}$

$= \dfrac{-181\cos 1^\circ \sin 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{2\sin^2 1^\circ} = -90\cot 1^\circ$

于是 $\dfrac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \mathbf{L} + 180\sin 180^\circ}{90} = \cot 1^\circ$

1343 、

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21158&start=0#bottom

在 ΔABC 中，求证：$\dfrac{a^2(p-a)}{1+\cos A} + \dfrac{b^2(p-b)}{1+\cos B} + \dfrac{c^2(p-c)}{1+\cos C} = abc$（$p = \dfrac{b+c+a}{2}$）

证明：$1+\cos A = 1 + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

$= \dfrac{2p \bullet 2(p-a)}{2bc} = \dfrac{2p(p-a)}{bc}$

$\dfrac{a^2(p-a)}{1+\cos A} = \dfrac{a^2bc}{2p}$，同理 $\dfrac{b^2(p-b)}{1+\cos B} = \dfrac{b^2ac}{2p}$，$\dfrac{c^2(p-c)}{1+\cos C} = \dfrac{c^2ab}{2p}$

$\dfrac{a^2(p-a)}{1+\cos A} + \dfrac{b^2(p-b)}{1+\cos B} + \dfrac{c^2(p-c)}{1+\cos C} = \dfrac{a^2bc}{2p} + \dfrac{b^2ac}{2p} + \dfrac{c^2ab}{2p} = \dfrac{abc(a+b+c)}{2p} = abc$

1344

已知：$M = \{(x,y) \mid \arctan x + \arctan y = p, x \in R, y \in R\}$

$N = \{(x,y) \mid \sec^2 x + \csc^2 y = 1, x \in R, y \in R\}$,求证 N 是 M 的真子集

解：$\arctan x + \arctan y = p$，

$\arctan x = p - \arctan y$

$\tan(\arctan x) = \tan(p - \arctan y)$

$x = -y$，$x + y = 0$，$\{(x,y) \mid \arctan x + \arctan y = p\} = \{(x,y) \mid x + y = 0\}$

因 $\sec^2 x \ge 1, \csc^2 y \ge 1$,故 $\sec^2 x + \csc^2 y \ge 2$，

因此 $\{(x,y) \mid \sec^2 x + \csc^2 y = 1, x \in R, y \in R\} = f$

于是 N 是 M 的真子集

1353
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23651&show=0

$$(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2})(\cos\frac{A}{4}+\cos\frac{B}{4})\cdots(\cos\frac{A}{2^n}+\cos\frac{B}{2^n})$$

$$=(2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4})(2\cos\frac{A+B}{8}\cos\frac{A-B}{8})\cdots(2\cos\frac{A+B}{2^{n+1}}\cos\frac{A-B}{2^{n+1}})$$

$$=2^n(\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+B}{8}\cdots\cos\frac{A+B}{2^{n+1}})(\cos\frac{A-B}{4}\cos\frac{A-B}{8}\cdots\cos\frac{A-B}{2^{n+1}})$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2^{n-1}}=\frac{\cos B-\cos A}{2^n}$$

1354
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23641&show=25

$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，比较$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}$与$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

证明：因$0<\alpha,\beta<\pi$，故$0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$，$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0$

于是$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

因$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，故$0<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}<\pi$，

同理$\frac{\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\le\sin\frac{\alpha+\beta+4\gamma}{6}$

相加得$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}+\frac{\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\le\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta+4\gamma}{6}$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cos\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{6}\le2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

即$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2}+\frac{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{2}\le2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

1357
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23684&show=0

已知三角形外接圆半径 r=1，三角形面积为$\frac{1}{4}$， a,b,c是三角形三边长，令 S=$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$， $T=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，求证：T>S

证明：$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\bullet\frac{c}{2r}=\frac{abc}{4}$

于是$abc=1$

$$T=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{abc}}{a}+\frac{\sqrt{abc}}{b}+\frac{\sqrt{abc}}{c}=\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}}{2}+\frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}}{2}+\frac{\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}}{2}\geq\sqrt{c}+\sqrt{a}+\sqrt{a}=S$$

取等号的条件是$a=b=c=1$，但此时外接圆半径 r$\neq$1

于是 T>S

1359
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23685&show=0

已知 tan(x+y)=7, tanxtany=$\frac{2}{3}$, 求 cos(x-y).

解：$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\frac{2}{3}}=3(\tan x+\tan y)=7$

故$\tan x+\tan y=\frac{7}{3}$,

$(\tan x-\tan y)^2=(\tan x+\tan y)^2-4\tan x\tan y=\frac{49}{9}-\frac{8}{3}=\frac{25}{9}$

$\tan x-\tan y=\pm\frac{5}{3}$,

于是$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{\pm\frac{5}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\pm1$

于是$x-y=\frac{kp}{2}+\frac{p}{4}(k\in Z)$

于是$\cos(x-y)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

1361

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23678&show=25

$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$，求出所有符合的实数 x.

解：$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\cos^2 2x=1$

$\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2}+\cos^2 2x=0$， $\cos 4x\cos 2x+\cos^2 2x=0$

$\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)=0$， $2\cos 2x\cos 3x\cos x=0$

于是$\cos x=0$,或$\cos 2x=0$或$\cos 3x=0$

$x=kp+\frac{p}{2}$,或$2x=kp+\frac{p}{2}$或$3x=kp+\frac{p}{2}$

故方程的解集是$\{x\,|\,x=kp+\frac{p}{2}$或$x=\frac{kp}{2}+\frac{p}{4}$或$x=\frac{kp}{3}+\frac{p}{6},k\in z\}$

注：高考不作要求

1373

http://bbs.pep.com.cn/thread-278293-1-2.html

是否存在实数a,b，使得 $f(x)=ax+b$ 对于所有的 x Î $[0,2p]$ 都有

$[f(x)]^2-\cos xf(x)<\frac{1}{4}\sin^2 x$ 成立？

解：假设存在a,b，使得 $f(x)=ax+b$ 对所有 x Î $[0,2p]$ 都有

$[f(x)]^2-\cos xf(x)<\frac{1}{4}\sin^2 x$

则$[f(0)]^2-f(0)<0$，$[f(p)]^2+f(p)<0$，$[f(2p)]^2-f(2p)<0$

$0<f(0)<1$ (1)， $-1<f(p)<0$ (2)， $0<f(2p)<1$ (3)

由(1) (2)得 $f(x)=ax+b$ 递减

由(2) (3)得 $f(x)=ax+b$ 递增

这是不可能的，故不存在a,b满足条件

1413、

http://bbs.pep.com.cn/thread-289319-1-1.html

三角形中，求 $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin B\sin A}$

解：$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin B\sin A}$

$=-\frac{\cos(B+C)}{\sin B\sin C}-\frac{\cos(A+C)}{\sin A\sin C}-\frac{\cos(A+B)}{\sin B\sin A}$

$=-\cot B\cot C+1-\cot A\cot C+1-\cot B\cot A+1$

$=-\cot C(\cot B+\cot A)-\cot B\cot A+3$

$=\frac{\cos(A+B)}{\sin(B+A)}\bullet\frac{\sin(B+A)}{\sin B\sin A}-\cot B\cot A+3$

$=\cot B\cot A-1-\cot B\cot A+3=2$