廖老师网上千题解答分类七、大纲向量

91、已知平行六面体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，同一顶点为端点的三条棱长都等于 1，且彼此的夹角都是 60°，求对角线 AC_1 的长

解：设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$

$AC_1^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+2\vec{a}\bullet\vec{c}+2\vec{b}\bullet\vec{c}=6$

$AC_1=\sqrt{6}$

466、(1)两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$是$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$的什么条件? (向量)

(2)已知$\vec{a}$与$\vec{b}$满足: $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$______

(3)若取两个相互垂直的单位向量$\vec{i}$和$\vec{j}$为基底，且$\vec{a}=(3\vec{i}+2\vec{j})$，$\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}$，求$5\vec{a}\cdot 3\vec{b}$

解：（1）因为$\vec{a}$与$\vec{b}$是非零向量，因此

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$

$\Leftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

（2）因为$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$

所以$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2=1+4-2\vec{a}\bullet\vec{b}=5-2\vec{a}\bullet\vec{b}=4$

$2\vec{a}\bullet\vec{b}=1$

因此$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}^2=1+4+1=6$

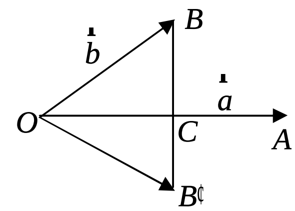
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{6}$

（3）因为$\vec{i}$和$\vec{j}$两个相互垂直的向量

所以$\vec{i}^2=1$，$\vec{j}^2=1$，$\vec{i}\bullet\vec{j}=0$

因此$5\vec{a}\bullet 3\vec{b}=5(3\vec{i}+2\vec{j})\bullet 3(\vec{i}-3\vec{j})=15(3\vec{i}^2-6\vec{j}^2)=15\times(-3)=-45$

479、非零向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$， $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$．若 B 关于 OA 所在直线的对称点为 B',则 $\overrightarrow{OB'}=$____________　（用向量 $\vec{a},\vec{b}$ 表示）(向量)



解：$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影是 $OC=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

故 $\overrightarrow{OC}=(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|})\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2})\vec{a}$，

故 $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2})\vec{a}-\vec{b}$

519、设向量 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是夹角为 $45°$ 的两个单位向量,且向量 $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$， $\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$，求｜$\vec{a}+\vec{b}$ ｜的值.。(向量)

解：$|\vec{e}_1|=1$，$|\vec{e}_2|=1$，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是夹角为 $45°$

故 $\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ｜$\vec{a}+\vec{b}$ ｜^{2}＝（$3\vec{e}_1+3\vec{e}_2$）^{2}＝$9\vec{e}_1^{\,2}+9\vec{e}_2^{\,2}+18\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2=18+9\sqrt{2}$

｜$\vec{a}+\vec{b}$ ｜＝$3\sqrt{2+\sqrt{2}}$

605、已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是空间的一个正交基底，向量 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}$ 是空间的另一个基底，若向量 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 下的坐标是 $(1,2,3)$，求故 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}$ 下的坐标(空间向量)

解：因为 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 下的坐标是 $(1,2,3)$

所以 $\vec{p}=1\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$，设 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}$ 下的坐标是 (x,y,z)

则 $\vec{p}=x(\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}-\vec{b})+z\vec{c}$ $\vec{p}=(x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}+z\vec{c}$

故 $x+y=1,\ \ x-y=2,\ \ z=3$，解得 $x=\dfrac{3}{2},\ \ y=-\dfrac{1}{2},\ \ z=3$

故 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}$ 下的坐标是 $(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 3)$

702、用向量的方法证明矩形的对角线相等(向量)

证明：设 ABCD 是矩形，则 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=0$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2$$

$$|\overrightarrow{DB}|^2=\overrightarrow{DB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2$$

故$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$

729、设空间两个不同的单位向量$\vec{a}$=（x_1，y_1，0），$\vec{b}$=（x_2，y_2，0）与向量$\vec{c}$=（1，1，1）的夹角都等于$45°$，则$\dfrac{x_1+y_1}{x_2+y_2}$等于多少？(空间向量)

解：$\cos<\vec{a},\vec{c}>=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\dfrac{x_1+y_1}{1\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $x_1+y_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

同理 $x_2+y_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，于是$\dfrac{x_1+y_1}{x_2+y_2}$=1

905、(向量)

已知单位向量$\vec{m},\vec{n}$的夹角为$\dfrac{p}{3}$，设$\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n},\vec{b}=3\vec{m}+2\vec{n}$,求$\vec{a},\vec{b}$的夹角θ的大小

解：$\vec{m}^2=\vec{n}^2=1$，$\vec{m}\bullet\vec{n}=1\times1\times\cos\dfrac{p}{3}=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(2\vec{m}+\vec{n})(3\vec{m}+2\vec{n})=6\vec{m}^2+7\vec{m}\vec{n}+2\vec{n}=14$$

$$|\vec{a}|^2=(2\vec{m}+\vec{n})^2=4\vec{m}^2+4\vec{m}\vec{n}+\vec{n}^2=7，\ |\vec{a}|=\sqrt{7}$$

$$|\vec{b}|^2=(3\vec{m}+2\vec{n})^2=9\vec{m}^2+12\vec{m}\vec{n}+4\vec{n}=19，\ |\vec{b}|=\sqrt{19}$$

$$\cos q=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{\sqrt{7}\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{133}}{19}$$

906、. (向量)

若将向量$\vec{a}$=(2,1)绕原点逆时针方向旋转$\frac{p}{4}$ 得到向量$\vec{b}$，求向量$\vec{b}$的坐标

解：设$\vec{a}$=(2,1)=$(\sqrt{5}\cos q,\sqrt{5}\sin q)$，

则$\sqrt{5}\cos q=2,\sqrt{5}\sin q=1$，于是

$$\sqrt{5}\cos(q+\frac{p}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\cos q-\sqrt{5}\sin q)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{5}\sin(q+\frac{p}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\sin q+\sqrt{5}\cos q)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

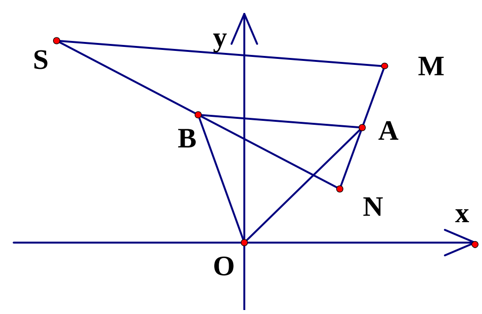
所以$\vec{b}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$

919、(向量)

已知向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$，对任意的点 M，M 关于点 A 的对称点为 N、N 关于点 B 的对称点为 S，用向量$\vec{a}$与$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{MS}$

解：AB是ΔNMS的中位线

故$\overrightarrow{MS}=2\overrightarrow{AB}=2(\vec{a}+\vec{b})$



920、(向量)

已知$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}=(-2\sqrt{3},2)$，$\vec{a}$与$\vec{c}$垂直，$\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为 120°，且$\vec{b}\bullet\vec{c}$=-4，$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，求实数 m,n 的值及$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$q$.

解：$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{c}|=\sqrt{12+4}=4$，$\vec{a}\bullet\vec{c}=0$

$\vec{b}\bullet\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos120^\circ \Rightarrow |\vec{b}|=2$，$\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\bullet\vec{c}=0$

$\vec{c}^{\,2}=m\vec{a}\bullet\vec{c}+n\vec{b}\bullet\vec{c}=-4n=16\Rightarrow\ n=-4$

$\vec{a}\bullet\vec{c}=m\vec{a}^{\,2}+n\vec{a}\bullet\vec{b}=8m-4\vec{a}\bullet\vec{b}=0\cdots$①

$\vec{b}\bullet\vec{c}=m\vec{a}\bullet\vec{b}+n\vec{b}^{\,2}=m\vec{a}\bullet\vec{b}-16=-4\cdots$②

①②$\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{6}\\ \vec{a}\bullet\vec{b}=2\sqrt{6}\end{cases}$ 或$\begin{cases}m=-\sqrt{6}\\ \vec{a}\bullet\vec{b}=-2\sqrt{6}\end{cases}$

当$\vec{a}\bullet\vec{b}=2\sqrt{6}$时，$4\sqrt{2}\cos q\Rightarrow q=30^\circ$

当$\vec{a}\bullet\vec{b}=-2\sqrt{6}$时，$-4\sqrt{2}\cos q=2\sqrt{6}\Rightarrow q=150^\circ$

922、(三角) (向量)

设 $\vec{a}=(1+\cos a,\sin a),\vec{b}=(1-\cos b,\sin b),\vec{c}=(1,0),a\in(0,p),b\in(p,2p)$，

$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为θ_1，$\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为θ_2，且$\theta_1-\theta_2=\frac{p}{6}$，求 $\sin\frac{a-b}{4}$ 的值.

解：$\cos q_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{1+\cos a}{\sqrt{2+2\cos a}}=\cos\frac{a}{2}$

$\because a\in$（0，p），$\therefore\frac{a}{2}\in(0,\frac{p}{2})$，$q_1=\frac{a}{2}$，$\cos q_2=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{1-\cos b}{\sqrt{2-2\cos b}}=\sin\frac{b}{2}=\cos(\frac{b}{2}-\frac{p}{2})$

$\because b\in(p,2p)$，$\frac{b}{2}\in(\frac{p}{2},p)$

$\therefore q_2=\frac{b}{2}-\frac{p}{2}$

$\because q_1-q_2=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{p}{2}=\frac{p}{6}$，$\therefore\frac{a-b}{2}=-\frac{p}{3}$

$\therefore\sin\frac{a-b}{4}=\sin(-\frac{p}{6})=-\frac{1}{2}$

928、(向量)

如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，已知ＢＣ＝a，若长为$2a$的线段PQ

以点Ａ为中心，问向量$\overrightarrow{PQ}$与向量$\overrightarrow{BC}$的夹角θ取值时向，$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$的值最大？并求这个最大值。

分析：（1）问向量$\overrightarrow{PQ}$与向量$\overrightarrow{BC}$的夹角θ取值时，$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$的值最大，于是我们可先尝试以θ为自变量，以$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$为目标函数。由于θ是向量$\overrightarrow{PQ}$与向量$\overrightarrow{BC}$的夹角，于是在向量的计算中选择以$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BC}$为基底，同时要考虑到$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 因此把目标函数$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}$尽可能地化成用$\overrightarrow{AQ}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示，妥当借用$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，消去$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$化为$\overrightarrow{AQ}\bullet\overrightarrow{BC}$转为θ的函数。

解：因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$。

因为线段PQ以点Ａ为中心，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|=a$

所以$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})$

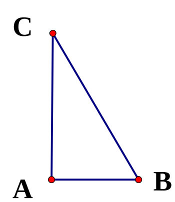
$=(-\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})\bullet(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})$

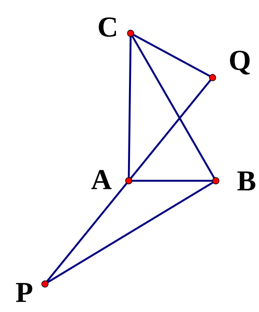
$=-\overrightarrow{AQ}^2+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\bullet\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AQ}^2+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\bullet\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

$=-a^2+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AQ}=-a^2+a^2\cos q$

$=-a^2+a^2\cos q$





故当$\cos q=1$，即$q=0$时，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$最大，其最大值为 0。

1029、(向量)

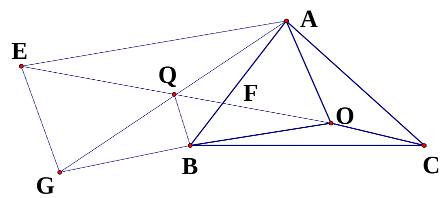
在 ΔABC 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{m},\ \overrightarrow{AC}=\vec{n},$，求证：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\vec{m}^{2}\bullet\vec{n}^{2}-(\vec{m}\bullet\vec{n})^{2}}$

证明：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}|\vec{m}||\vec{n}|\sqrt{1-\cos^{2}<\vec{m},\vec{n}>}$

$=\dfrac{1}{2}|\vec{m}||\vec{n}|\sqrt{1-(\dfrac{\vec{m}\bullet\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|})^{2}}=\dfrac{1}{2}|\vec{m}||\vec{n}|\sqrt{\dfrac{|\vec{m}|^{2}|\vec{n}|^{2}-(\vec{m}\bullet\vec{n})^{2}}{|\vec{m}||\vec{n}|}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\vec{m}^{2}\bullet\vec{n}^{2}-(\vec{m}\bullet\vec{n})^{2}}$

1110、(向量)

已知点 O 在 ΔABC 内部，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔAOB 与 ΔOBC 面积之比为________



解 1：延长 OB 至 G，使 BG=BO

以 OG 与 OA 为邻边作平行四边形 OAEG，设平行四边形 OAEG 的对角线交于点 Q，OE 与 AB 交于点 F，

于是 $2\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=-4\overrightarrow{OC}$

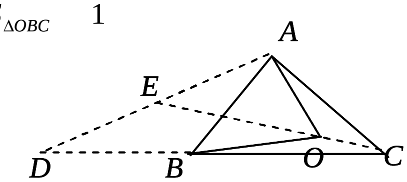
因此，C、O、F、Q、E 在同一条直线上

并且 $|\overrightarrow{OQ}|=2|\overrightarrow{OC}|$，连 BQ，则 BQ 平行且等于 $\dfrac{1}{2}OA$

于是 $\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\dfrac{2}{1}\Rightarrow\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\dfrac{3}{1}$，

$\dfrac{|\overrightarrow{OF}|}{|\overrightarrow{FQ}|}=\dfrac{2}{1}\Rightarrow|\overrightarrow{OF}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{4}{3}|\overrightarrow{OC}|\Rightarrow\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OF}|}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OFB}}=\dfrac{AB}{FB}=3$，$\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OFB}}=\dfrac{OC}{OF}=\dfrac{3}{4}$，相除得 $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OBC}}=\dfrac{4}{1}$



解2:$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$

$7\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB})$

延长CB,使BD = CB,连AD,取AD中点E

则$7\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{CE},\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2}{7}\overrightarrow{CE}$

$S_{\triangle AOB}=\dfrac{2}{7}S_{\triangle AEC}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{2}S_{\triangle ADC}=\dfrac{2}{7}S_{\triangle ABC},\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AEC}}=\dfrac{OC\times CB}{CE\times CD}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{7},S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ABC},$

$S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{7}S_{\triangle ABC},S_{\triangle OAB}=\dfrac{4}{7}S_{\triangle ABC},\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OBC}}=\dfrac{4}{1}$

1134、(向量)

四心的向量表达式

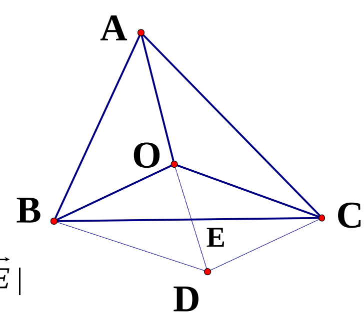
设点 O 是△ABC 所在平面上一点

（1）若 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$，则点 O 是△ABC 的外心

证明：$\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2 \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

$\Rightarrow$ 点 O 是△ABC 的外心

（2）若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则点 O 是△ABC 的重心



证明：以 OB 与 OC 为邻边作平行四边形 OBDC，设平行四边形 OBDC 的对角线 OD 与 BC 交于点 E，则 E 是 BC 中点

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OE}$$

因此，A、O、E、D 在同一条直线上，并且 $|\overrightarrow{AO}|=2|\overrightarrow{OE}|$

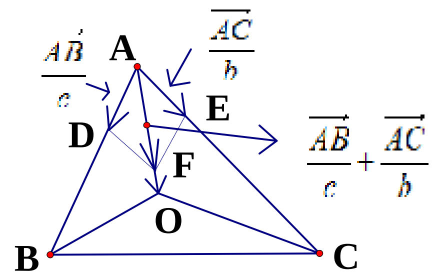
故 O 是△ABC 的重心

（3）若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是△ABC 的垂心

证明：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

故 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$，同理 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，故点 O 是△ABC 的垂心

（4）若 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 O 是△ABC 的内心



证明：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ 则

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

所以 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{bc}{a+b+c}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$，

因为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 分别为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，所以向量 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 平分 $\angle BAC$

因为 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 共线，所以 AO 平分 $\angle BAC$

同理 BO 平分 $\angle ABC$，BC 平分 $\angle ACB$，从而 O 是 ΔABC 的内心

这四个命题的逆命题也成立

1227、(向量)

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，当 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}(t\in R)$的模取最小值时

(1)求 t 的值　　(2)求证：$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 垂直

解：(1)$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})^2=t\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{b}t+\vec{a}^2$

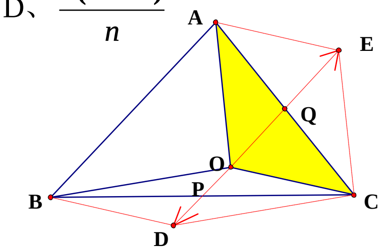
当$|\vec{a}+t\vec{b}|$取最小值时 $t=-\dfrac{2\vec{a}\bullet\vec{b}}{2\vec{b}^2}=-\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\vec{b}^2}$

(2) $\vec{b}\bullet(\vec{a}+t\vec{b})=\vec{a}\bullet\vec{b}+t\vec{b}^2=\vec{a}\bullet\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\vec{b}^2}\times\vec{b}^2=0$，$\therefore \vec{b}\perp\vec{a}+t\vec{b}$

1232、(向量)

设 O 点在ΔABC 内部，且有 $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+(m+n)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta OBC}}=(\quad)$

A、$\dfrac{m+n}{2m}$　　B、$\dfrac{m+n}{2n}$　　C、$\dfrac{2(m+n)}{m}$　　D、$\dfrac{2(m+n)}{n}$



解 1：$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+(m+n)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

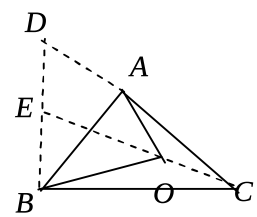
$m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+n(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$

$2m\overrightarrow{OQ}+2n\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{n}{m}\overrightarrow{OP}=-\dfrac{n}{m}(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP})$，$\dfrac{m+n}{m}\overrightarrow{OQ}=\dfrac{n}{m}\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{PQ}$

于是$\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\dfrac{n}{m+n}$，$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta OBC}}=\dfrac{2S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta OBC}}=\dfrac{2|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{2(m+n)}{n}$，选 D

解 2：



$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+(m+n)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$m\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{BC}+(m+n)\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{BC}$

$m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OC}+(m+n)\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{BC}$

$2(m+n)\overrightarrow{OC}=-(m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB})$

$2(\dfrac{m}{n}+1)\overrightarrow{OC}=-(\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

作$\overrightarrow{CD}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CA}$,取$BD$中点$E$,则$\dfrac{m}{n}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CE}$

于是$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{1}{\dfrac{m}{n}+1}\overrightarrow{CE}$

$S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{\dfrac{m}{n}+1}S_{\Delta BCE}=\dfrac{n}{m+n}\times\dfrac{1}{2}S_{\Delta BCD}=\dfrac{n}{m+n}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{m}{n}S_{\Delta ABC}=\dfrac{m}{2(m+n)}S_{\Delta ABC}$，

解 3：做为选择题，可令 $m=1$， $n=2$

1277、(向量)

若将向量$\vec{a}=(2,1)$围绕原点按逆时针方向旋转$\frac{p}{4}$得到向量$\vec{b}$,则向量$\vec{b}$的坐标是什么？

解：$\vec{a}=(2,1)=(\sqrt{5}\cos a,\sqrt{5}\sin a)$，$\sqrt{5}\cos a=2,\sqrt{5}\sin a=1$

则$\vec{b}=(\sqrt{5}\cos(a+45°),\sqrt{5}\sin(a+45°))$

$$\sqrt{5}\cos(a+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\cos a-\sqrt{5}\sin a)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{5}\sin(a+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\sin a+\sqrt{5}\cos a)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

于是$\vec{b}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$

1307、

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=12997

求与向量$\vec{a}$=($\sqrt{3}$,-1)和向量$\vec{b}$=(1，$\sqrt{3}$)的夹角相等，且模$\sqrt{2}$的向量的坐标。

解：向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 90 度，向量$\vec{a}$的方向角为 60 度

因此所求向量之一的方向角为 15 度

故这向量的横坐标＝$\sqrt{2}\times\cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，

纵向量的横坐标＝$\sqrt{2}\times\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

另一个为上面的相反向量

1433、

ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 m =________

解：设$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=OH'$，则，$\overrightarrow{AH'}=\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

于是$\overrightarrow{AH'}\bullet\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\bullet(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2=0$

$\overrightarrow{AH'}\perp\overrightarrow{BC}$，同理$\overrightarrow{BH'}\perp\overrightarrow{AC}$,故$H'$是$\Delta ABC$的垂心，$H'$与$H$重合

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，故$m=1$

1440、

已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$是平面内互相垂直的向量单位，并且向量$\overrightarrow{AB}=4\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=5\vec{a}+5\vec{b}$ $\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+4\vec{b}$，则四边形 ABCD 的面积是多少？

解：因$\overrightarrow{AB}=4\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+4\vec{b}$，故$\overrightarrow{DB}=2\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{DB}=(5\vec{a}+5\vec{b})\bullet(2\vec{a}-2\vec{b})=0$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$

$|\overrightarrow{AC}|=5\sqrt{2},|\overrightarrow{DB}|=2\sqrt{2}$，四边形 ABCD 的面积$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}|=10$

1475、

[**http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292434&page=1#pid3033944**](http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=292434&page=1#pid3033944)

在平行六面体 ABCD--$A_1B_1C_1D_1$中，设$\overrightarrow{AC_1}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{BC}+3z\overrightarrow{CC_1}$，则$x+y+z=$______

答：$\overrightarrow{AC_1}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{BC}+3z\overrightarrow{CC_1}$，又$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$

故 x＝1，2y＝1，3z＝1，于是$x+y+z=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$