廖老师网上千题解答分类八、超纲向量

771、如何证明空间四边形中四边的平方和大于对角线的平方和 (空间向量)

如图 ABCD 是空间四边形，求证： $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2>BD^2+AC^2$

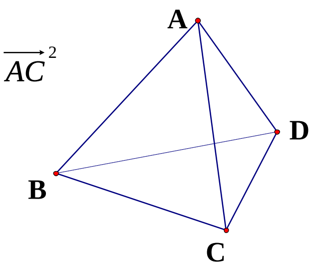
证明： $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-BD^2-AC^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BD}^2-\overrightarrow{AC}^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2+\overrightarrow{AD}^2-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2-\overrightarrow{AC}^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}\bullet AC+2\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})^2\geq 0$



当且仅当 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 时上式取等号

因 ABCD 是空间四边形故 $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

故 $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2>BD^2+AC^2$

965、(向量)

若 O 与 H 分别是 ΔABC 的外心与垂心， $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=l\,\overrightarrow{OH}$ ，则 $l=$____

解 1：设 G 是 ΔABC 的重心

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})$

$=3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$

由欧拉线定理是 $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ ， 又 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

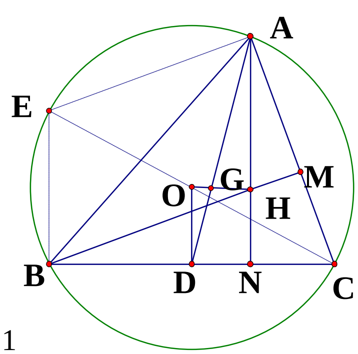
于是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ ， 因此 $l=1$

解 2：设

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CM}$

因 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp\overrightarrow{AB}$ 于是 $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}$, 同理 $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}$

于是 M 是垂心, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}$



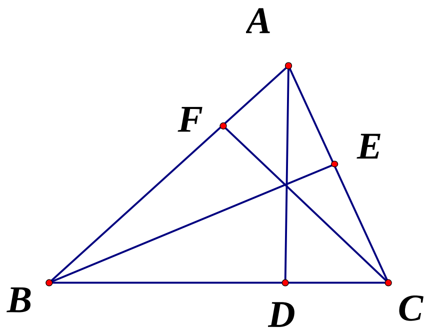
考题是出成选择题，可用直角三角形为特例得出 $l=1$

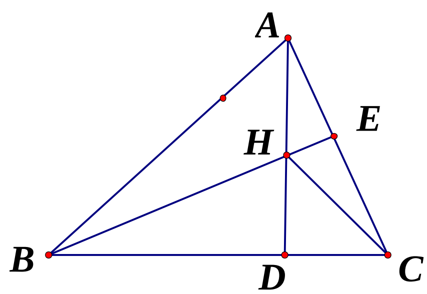
993、(平几向量)

求证三角形三条高交于一点

如图：AD，BE，CF 是△ABC 的三条高。求证：AD、BE、CF 相交于一点。

证明：设 AD 与 BE 相交于点 H，下面证点 H 在高 CF 上。





证明 1：设 AD 与 BE 交于 H 点，连 CH

因为 AD⊥BC，BE⊥AC

所以 $\overrightarrow{HA}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HA}\bullet(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HB})=0$

$\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HB}\bullet(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA})=0$

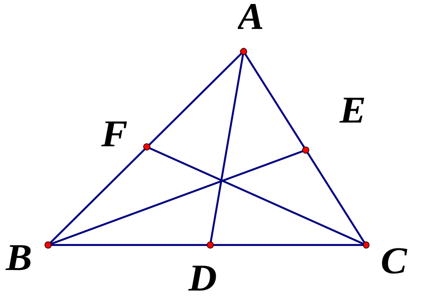
相减得 $\overrightarrow{HA}\bullet\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{HC}=0$

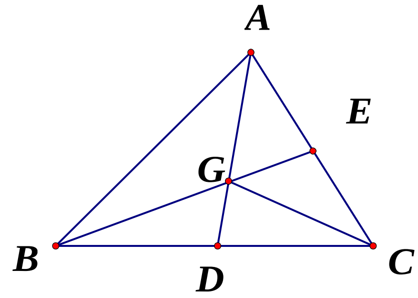
$\overrightarrow{HC}\bullet(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=0$，即 $\overrightarrow{HC}\bullet\overrightarrow{CA}=0$，于是 $\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{CA}=0$，

点 H 在高 CF 上，故 AD、BE、CF 相交于同一点 H

994、求证：三角形的三条中线交于一点

已知：如图：AD，BE，CF 是△ABC 的三条中线。求证：AD、BE、CF 相交于一点。





证 1：设 AD 与 BE 相交于点 G，连 DE，则

$DE // AB, DE = \frac{1}{2}AB$，于是 $\frac{AG}{GD} = \frac{AB}{DE} = 2$， $AG = \frac{2}{3}AD$

再设 AD 与 CF 相交于点 G'，同理可 $AG' = \frac{2}{3}AD$

于是 G 与 G' 重合，因此三条中线交于一点

证 2：设 AD 与 BE 相交于点 G，下面证明 $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$

设 $\overrightarrow{AG} = l\,\overrightarrow{GD}$， $\overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{GE}$， $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{e_1}$， $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{e_2}$ 则

$\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} + l\,\overrightarrow{CD}}{1+l} = \frac{2\overrightarrow{e_1} + l\,\overrightarrow{e_2}}{1+l}$， $\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CB} + m\overrightarrow{CE}}{1+m} = \frac{2\overrightarrow{e_2} + m\overrightarrow{e_1}}{1+m}$

于是 $\begin{cases} \frac{2}{1+l} = \frac{m}{1+m} \\ \frac{l}{1+l} = \frac{2}{1+m} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} l = 2 \\ m = 2 \end{cases}$，故 $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$

设 AD 与 CF 相交于点 G'，同理可证 $\overrightarrow{AG'} = 2\overrightarrow{G'D}$

于是 G 与 G' 重合，故 AD、BE、CF 相交于同一点 G

1057、(向量)

在三角形 ABC 中存在一点 O,已知 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$， 问 O 点是三角形的什么点!证明一下!

解：内心　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$　则

$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

所以 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{bc}{a+b+c}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$,

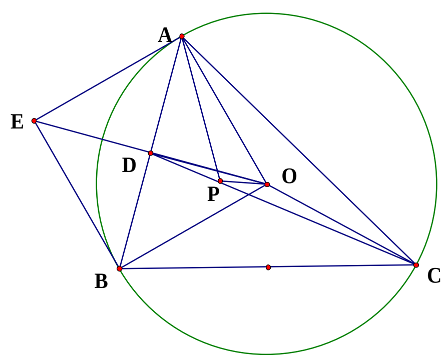
因为 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}\text{与}\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$分别为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$方向上的单位向量，向量 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$与 $\overrightarrow{AO}$ 共线，且平分$\angle BAC$，所以

AO平分$\angle BAC$，同理BO平分$\angle ABC$，BC 平分$\angle ACB$，从而O是ΔABC的内心

1194、(向量)

已知 A,B,C 是平面上不共线的三点，O 为ΔABC外心，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]$ $(\lambda\in R$且$\lambda\neq 0)$，则动点 P 的轨迹一定通过ΔABC的(　　)

A、内心　　B、垂心　　C、重心　　D、AB 边的中点



解：设 D 是 AB 中点

于是$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{CD}$，

因 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]$

故 $3\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}$

$3(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\lambda(2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

于是 $3\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})+\lambda(2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=2\overrightarrow{CD}-2\lambda\overrightarrow{CD}=2(1-\lambda)\overrightarrow{CD}$，

因此点 P 在直线 CD 上，故选 D

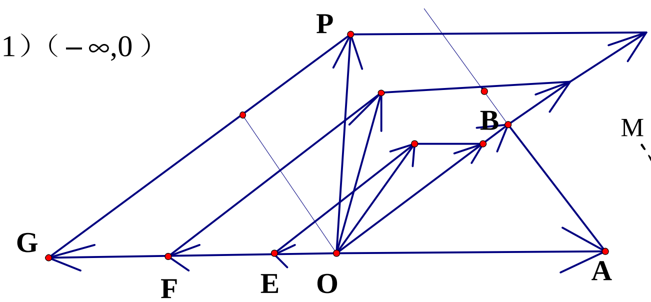
1327

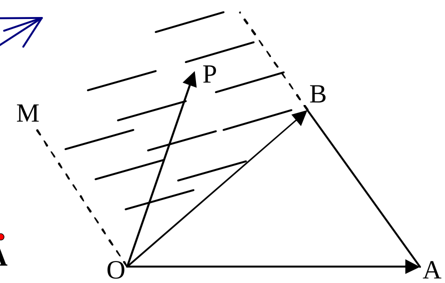
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22484&show=015

如图,OM∥AB,点P在由射线OM、线段OB及AB的延长线围成的阴影区域内(不含边界)运动,且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则$x$的取值范围是__________;

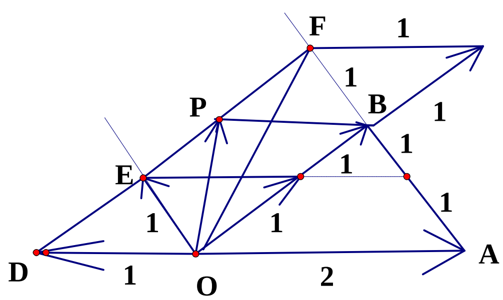
当$x=-\frac{1}{2}$时,y的取值范围是____________.

（1）（$-\infty$,0）





（2）$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

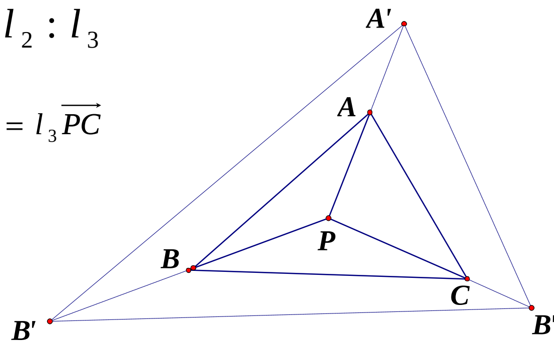


本题：是力学题目的改编，要理解向量的基本定理，能用好平面几何比例的性质，才能做清楚，是个好题。

1420、

已知点 P 在 ΔABC 内部，若 $l_1\overrightarrow{PA}+l_2\overrightarrow{PB}+l_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

求证：$S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}=l_1:l_2:l_3$



证明：

作 $\overrightarrow{PA'}=l_1\overrightarrow{PA}$ $\overrightarrow{PB'}=l_2\overrightarrow{PB}$ $\overrightarrow{PC'}=l_3\overrightarrow{PC}$

则点 P 是 $\Delta A'B'C'$ 的重心，于是

$\Delta PA'B',\Delta PB'C',\Delta PA'C'$ 面积相等设为 S

于是

$$\frac{S_{\Delta PBC}}{S}=\frac{PA\bullet PB}{PA'\bullet PB'}=\frac{1}{l_2l_3}$$

$$\frac{S_{\Delta PCA}}{S}=\frac{1}{l_1l_3}\qquad\frac{S_{\Delta PAB}}{S}=\frac{1}{l_1l_2}$$

于是 $S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}=l_1:l_2:l_3$

注：

如果点 O 为三角形的重心,那么 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

如果点 O 为三角形的内心,那么 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

如果点 O 为三角形的外心,那么 $\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

如果点 O 为三角形的垂心,那么 $\tan A\overrightarrow{OA}+\tan B\overrightarrow{OB}+\tan C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

如果点 P 为三角形内 1 点， $l_1\overrightarrow{PA}+l_2\overrightarrow{PB}+l_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 那么

$S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}=l_1:l_2:l_3$

1439、

http://bbs.pep.com.cn/thread-292196-1-1.html

设 I 为△ABC 的内心，AB=AC=5，BC=6，$\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$ 求 m 和 n 的值

解：$\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$ 可化为 $\overrightarrow{AI}=m(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})+n(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC})$

于是 $(1-m)\overrightarrow{IA}+(m-n)\overrightarrow{IB}+n\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

又考虑到 $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

于是 $\frac{1-m}{6}=\frac{m-n}{5}=\frac{n}{5}$，故 $m=\frac{5}{8},n=\frac{5}{16}$

1480、设 O 是正五边形 ABCDE 的中心,求证: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

证明：设 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OT}$

把正五边形 ABCDE 绕着 O 点旋转 72° 后，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ 不变

即 $\overrightarrow{OT}$ 不变,于是 $\overrightarrow{OT}=\vec{0}$