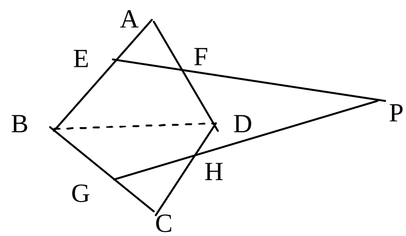
廖老师网上千题解答分类九、大纲立几

9、已知球面上的四点 P、A、B、C，PA、PB、PC 的长分别是 3，4，5，且这三条线段两两垂直，求球半径

解：补成长方体，设球半径为 R

则 $2R=$ 长方体的对角线长＝$\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}, R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

96、如图 已知 E、F、G、H 本别是空间四边形 ABCD 各边 AB 、AD 、CB 、CD 上的点，如果 EF 与 HG 交于点 P 那么 P 点是否在直线 BD 上？请说明你的理由。

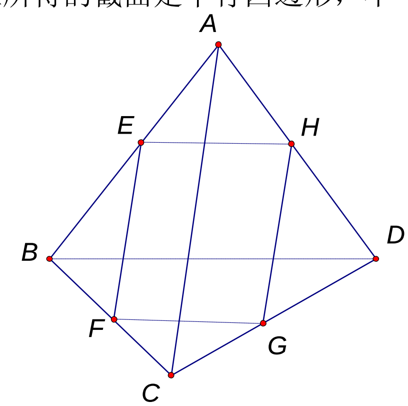


解：$P\in$ 直线$EF \Rightarrow P\in$ 平面ABD

同理 $P\in$ 平面CBD

故 $P\in$ 平面$ABD \cap$ 平面CBD＝直线BD

141、平行于三棱锥的两条相对棱的平面截三棱锥所得的截面是平行四边形，不明白为什么？



解：如图截面 ABCD∥AC，截面 ABCD∥BD

由于面 ABC 过 AC，面 ABC∩截面 ABCD=EF

故 EF∥AC，同理 HG∥AC

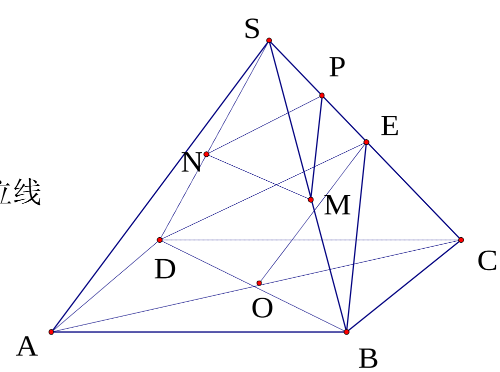
∴EF∥GH

同理 EH∥FG

∴截面 ABCD 是平行四边形

321、正四棱锥 S—ABCD 中，P 是棱 SC 上的点，SP：PC=1：2，M，N 分别是棱 SB，上的 SD 点，BM=DN，当 SA//平面 PMN 时，求 MN：BD 的值。

四棱锥怎么画啊？



解：分别取 BO 和 SC 的中点 O、E

连 OE，则 SA∥OE，故 SA∥面 EBD

分别取 SB 和 SD 的中点 M、N

由于 SP：PC=1：2

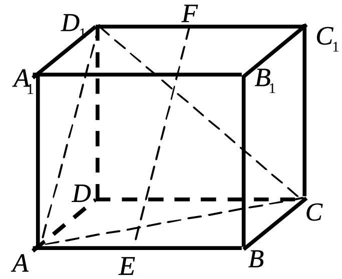
则 MP，PN 分别为△SBE 和△SDE 的中位线

故面 PMN∥面 EBD

SA∥面 PMN，符合条件

这时 MN：BD=1：2

442、已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 AB 和 C_1D_1 的中点，求异面直线 AC 和 EF 所成的角。

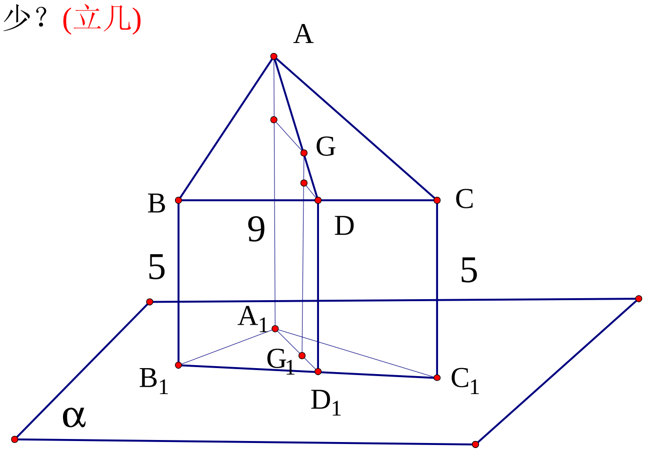


解：平移 EF 到 AD_1，连 CD_1

因 DAD_1C 是等边三角形,Đ$D_1AC=60°$

故 AC 和 EF 所成的角为 $60°$

500、在平面 α 的一侧有一个三角形，若三个顶点到平面 α 的距离分别是 9、5、5。则这个三角形的重心到 α 的距离为多少？(立几)



解：如图设 ΔABC 的重心 G 到平面 a 的距离为 h

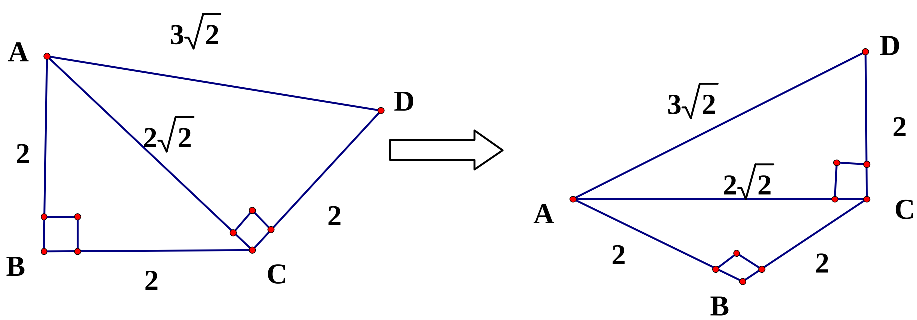
则 $$\frac{h-DD_1}{AA_1-h}=\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$$

$$h=\frac{AA_1+2DD_1}{3}=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{3}$$

$$=\frac{9+5+5}{3}=\frac{19}{3}$$

541、

在平面四边形 ABCD 中,AB=BC=CD=2,∠B=90°，∠C=135°，沿对角线 AC 将四边形折成直二面角。1）求证：AB⊥平面 BCD； 2）过点 C 作 CH⊥平面 ABD 于 H，求 CH 的长；3）求二面角 B-AD-C 的大小。(立几)



644、答几个立几问题(立几)

第一个问题：有一条侧棱与底面两边垂直的棱柱是直棱柱　为什么错呢？

答：作一个平行四边形 ABCD,在平面 ABCD 外作线段 AA_1⊥ AB，但 AA_1 不与 AC 垂直，构造出棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$，一条侧棱 AA_1 与底面两边 AB 和 CD 垂直，但不是直棱柱

第二个问题：

A：各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱

B：各对角面是全等矩形的平行六面体一定是长方体

哪一个错误呢？（什么是棱柱的对角面呢？）

另外一个平行六面体的两个对角都是矩形，则这个平行六面体一定是直平行六面体是正确的？…………为什么呢？不可能是斜的吗？（主要不知道什么是对角面）

答：A、错误命题。你可用四个相连着的正方形，作为棱柱的各侧面，然后折成底面是菱形的棱柱。

B、正确命题。

棱柱的对角面：棱柱的对角面是以棱柱的不在同一个侧面的两条平行侧棱为一组对边的平行四边形。

（2）下面证明 B

1°先看竖直方向侧棱为一组对边的对角面，由于他们是矩形，所以侧棱垂直于底面，平行四边行的对角线，于是侧棱垂直于底面，因此四个侧面为矩形。

因此这个平行六面体为侧面为矩形的直棱柱。只要证出两个底面是矩形就可以了。

2°把上面的两个相对侧面当底面，原来的底面就成了侧面，同理可证新侧面是矩形。

第三个问题：棱锥的高一定落在棱锥内部吗？

答：棱锥的高可以落在棱锥外部。构造方法：

（1）作平面的垂线段 SO，O 为垂足（2）在平面内作△ABC，使垂足 O，在△ABC 的外面，（3）连 SA、SB、SC 所得的三棱锥 S—ABC 的高 SO 就在棱锥外部。

第四个问题：如果是一个四棱锥，相对的两个面是钝角三角形，那么还能构成棱锥吗？

答：能。构造方法：

（1）设 S 是平面 α 外一点，在平面 α 内取两点 A、B，使∠ASB 为钝角。

（2）在平面 α 内再取两点 C、D，使∠CSD 为钝角。并且 C、D 在直线 AB 之外。

（3）连 SA、SB、SC、SD 所得的四棱锥 S—ABCD 的相对的两个侧面 SAB 和 SCD 就是钝角三角形

645、两个平行于底面的平面将棱锥的侧面积分成相等的三个部分,则这两个截面将棱锥的高分成三段(从上到下)之比为多少呢? (立几)

讲解：首先要知道，棱锥被平行于底面的平面所截，截出的小棱锥的侧面积与原棱锥的侧面积的比等于，小棱锥与原棱锥高的比的平方。

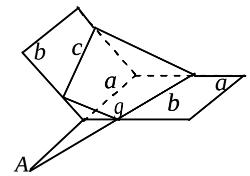
两个平行于底面的平面将棱锥的侧面积分成相等的三个部分,则得到的小棱锥，中棱锥，与原棱锥的侧面积的比等于 1：2：3

于是小棱锥，中棱锥，与原棱锥的高的比等于$\sqrt{1}$：$\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$

因此，截面将原棱锥的高分成三段(从上到下)之比为1：$(\sqrt{2}-1)$：$(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

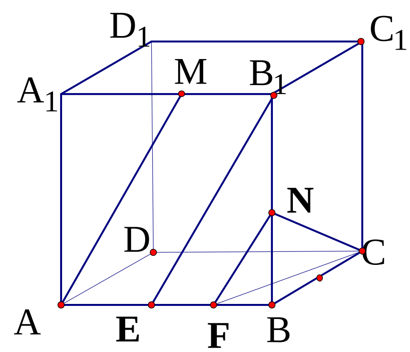
646 、已知三个平面两两相交,有三条交线,若其中有两条相交,则第三条也过这个交点. (立几)

证明：三个平面分别为a,b,g， a **I** $b=a$， a **I** $g=b$， b **I** $g=c$
a **I** $b=A$



因为a **I** $b=A$，所以$A\in a$，而$a\subset b$，因此$A\in b$，同理$A\in g$
于是$A\in b$ **I** $g=c$，所以直线c也过A点

647、在棱长为 1 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 A_1B_1 和 B_1B 的中点，求直线 AM 与 CN 所成角的余弦值(立几)



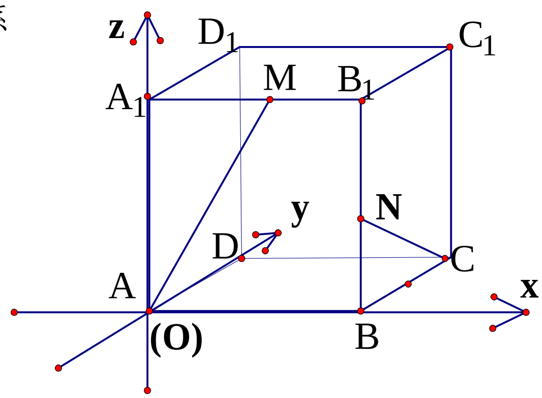
解法 1：取棱 AB 的中点 E，再取 EB 中点 F
连 EB_1，FN，FC 则 FN∥AM
因此直线 FN 与 NC 所成的锐角为所求的角

因为 $FN=\frac{1}{2}B_1E=\frac{\sqrt{5}}{4}$， $CN=\frac{\sqrt{5}}{2}$， $CF=\frac{\sqrt{17}}{4}$

所以 $\cos\angle FNC=\frac{FN^2+NC^2-CF^2}{2FN\bullet NC}$

$=\frac{\frac{5}{16}+\frac{5}{4}-\frac{17}{16}}{2\bullet\frac{\sqrt{5}}{4}\bullet\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{5}$，答：直线 AM 与 CN 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$

解法 2：如图建立空间直角坐标系



则 $\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,1)$

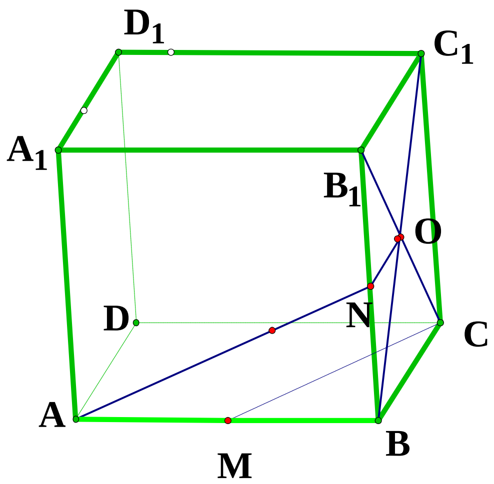
$\overrightarrow{NC}=(0,1,-\frac{1}{2})$

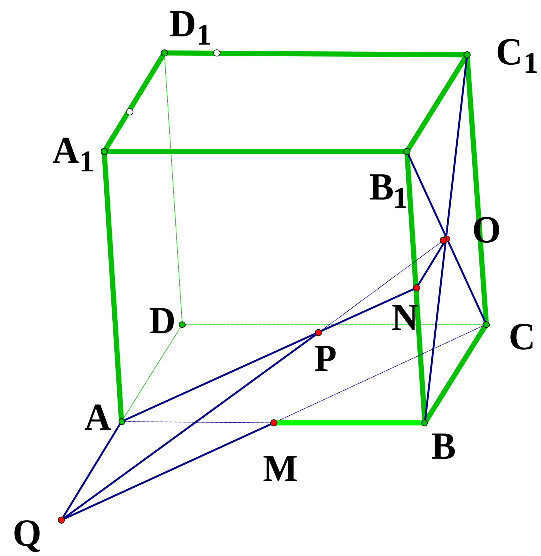
于是 $\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NC}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{NC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{NC}|}$

$=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\bullet\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{2}{5}$

所以，直线 AM 与 CN 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$

652、如图,在棱长为 1 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 AB 的中点,N 为 BB_1 中点,O 为面 BCC_1B_1 的中心.
(1)过 O 作一直线与 AN 交于 P,与 CM 交于 Q(只写做法,不必证明);(2)求 PQ 长.
(立几)





解:(1)延长 DA,CM 交于点 Q
因 ON∥BC,AQ∥BC
故 ON∥AQ
于是 ONAQ 共面
连 OQ 交 AN 于点 P。则直线 OPQ 为所求

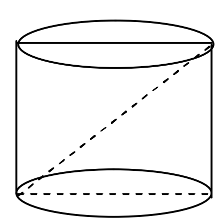
(2)因 ON=$\frac{1}{2}$AQ

故 OP=$\frac{1}{2}$PQ,

$$PQ=\frac{2}{3}OQ==\frac{2}{3}\sqrt{1^2+(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{14}$$

ab1962.com

670、圆柱的轴截面的对角线的长度为定值,它与底面所成的角为 a ,若圆柱的侧面积最大时求 a 的值(立几)



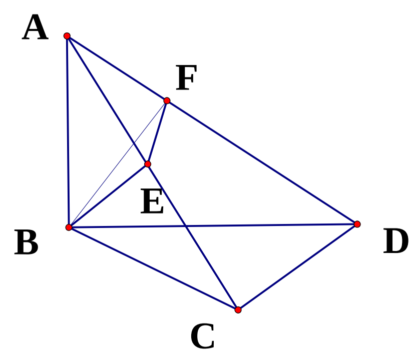
解:设轴截面对角线长为 L
底面圆半径为 R,高为 h,侧面积为 S
则(2R)^2+ h^2=L^2

$$S=2pRh=\frac{1}{2}p\,2(2R)h\le\frac{1}{2}p[(2R)^2+h^2]=\frac{1}{2}pL^2$$

当且仅当 $2R=h$ 时上式取等号,此时 $a=45°$

672、求证：两条异面直线有且仅有一条公垂线。谢谢了。
证明（用反证法）：假设两条异面异面直线有两条公垂线，易证这两条公垂线平行，因此两公垂线共面，并且这两条公垂线与两条异面异面直线有四个交点，于是这四个交点共面，这两条异面异共面，这是不可能的。(立几)

677、过三角形 BCD 顶点 B 作 AB 垂直于平面 BCD,若平面 ABC⊥平面 ACD,
（1）求证:三角形 BCD 是直角三角形.
（2）如果 AB=BC=CD,求二面角 B-AD-C(立几)

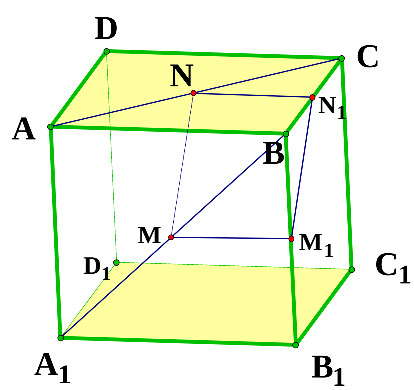


证明:（1）作 $BE\perp AC$ 于点 E
因为，平面 ABC⊥平面 ACD
平面 ABC $\cap$ 平面 ACD= AC
所以， $BE\perp$面 ACD
因为， $CD\subset$面 ACD
所以 $BE\perp$CD
因为， $AB\perp$面 BCD， $CD\subset$面 BCD
所以 $AB\perp$CD，又 AB $\cap$ 平面 BE=B
所以 $CD\perp$面 ABC，又因为 $BC\subset$面 ABC
所以 $CD\perp$BC，故三角形 BCD 是直角三角形
（2）作 $BF\perp$AD 于点 F，连 EF
由三垂线定理的逆定理得， $EF\perp$AD
于是 $\angle BFE$ 是二面角 B-AD-C 的平面角
设 AB=BC=CD=1

在 $Rt\Delta BFE$ 中， $BE=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $BF=\frac{AB\bullet BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

于是 $\sin\angle BFE=\frac{BE}{BF}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\angle BFE=60^\circ$

681、在棱长为 a 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为 A_1B 和 AC 上的点，A_1M=AN。（1）求证：MN∥平面 BB_1C_1C
（2）求 MN 的长的最小值 (立几)



（1）证明：作 $NN_1\parallel AB$， $MM_1\parallel A_1B_1$

则 $NN_1\parallel MM_1$

因 $AC=A_1C=\sqrt{2}a$， $AN=A_1M$

故 $CN=BM$，

因 $NN_1=\frac{\sqrt{2}}{2}CN$， $MM_1=\frac{\sqrt{2}}{2}BM$

故 $NN_1 = MM_1$

因此，四边形 MM_1N_1N 是平行四边行

所以， MN // 平面 BB_1C_1C

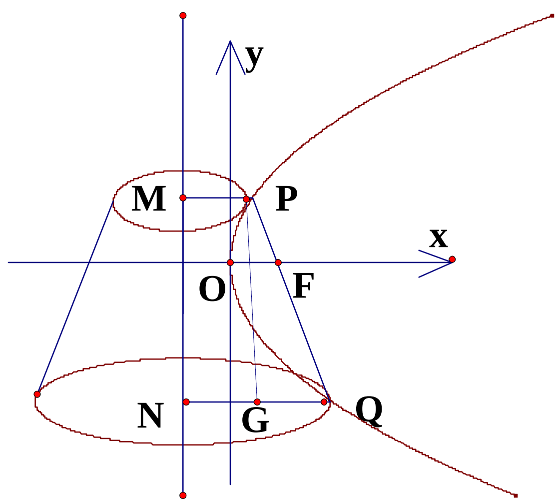
（2）因 $CN_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}CN$ ， $BM_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}BM$ ， $CN = BM$

故 $CN_1 = BM_1$， 设 $CN_1 = BM_1 = x$ （$0 < x < a$）

则 $MN = N_1M_1 = \sqrt{BN_1{}^2 + BM_1{}^2} = \sqrt{(a-x)^2 + x^2} == \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}$

$= \sqrt{2(x-\frac{a}{2})^2 + \frac{1}{2}a^2}$ ， 故当 $x = \frac{1}{2}a$ 时 MN 最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

701、PQ 是抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 过焦点的弦,MN 为 PQ 在准线 l 上的射影，PQ 绕直线 l 旋转一周所得的旋转面的面积为 S_1，以 MN 为直径的球的面积为 S_2, 则 S_1 ,S_2 的大小关系为_______(圆锥曲线)



解：设 $|PF|=|PM|=r_1, |QF|=|QN|=r_2$

$S_1 = p(|PM|+|QN|)|PQ|$

$= p(r_1+r_2)^2$

$S_2 = 4p \bullet (\frac{|MN|}{2})^2 = p|MN|^2 = p|PG|^2$

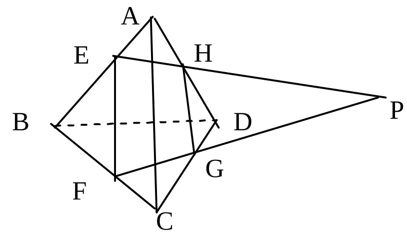
$= p[(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2] = 4pr_1r_2$

$S_1 - S_2 = p(r_1+r_2)^2 - 4pr_1r_2$

$= p(r_1-r_2)^2 \geq 0$,故 $S_1 \geq S_2$

707、空间四边形 ABCD 中，EFG 三点分别在 AB BC CD 上，且

$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FB}=2,\frac{CG}{GD}=3$，过 EFG 作平面交 AD 于 H，求证：EH 、FG、 BD 三线共点(立几)



解：$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FB}=2$，

故 EF∥AC，
因 AC 不在平面 EFG 内，EF 在平面 EFG 内
故 AC∥平面 EFG，

因平面 ACD 过 AC，平面 ACD $\cap$ 平面 EFG=HG

故 AC∥HG，故 EF∥HG，$\frac{HG}{AC}=\frac{GD}{DC}=\frac{1}{4}$

于是 因 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FB}=2$

故 $\frac{EF}{AC}=\frac{1}{3}$，因此 EF≠HG

所以四边形 EFGH 是梯形
因此直线 EH 与直线 FG 相交，设交点为 P

$P\in$ 直线$EF \Rightarrow P\in$ 平面ABD，同理 $P\in$ 平面CBD

故 $P\in$ 平面$ABD \cap$ 平面CBD＝直线BD

因此，EH 、FG、 BD 三线共点于 P
713、不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等，这样的平面有几个(立几)

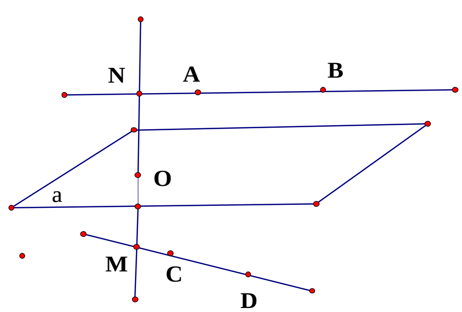


图1

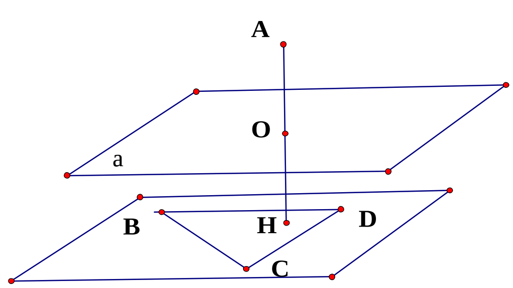
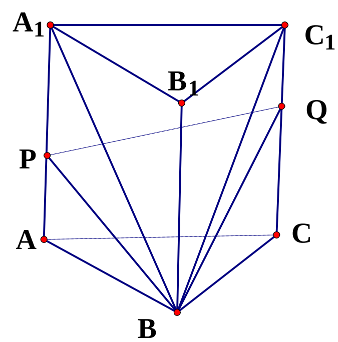


图2

如图 1：把 A、B、C、D 看成是四面体的四个顶点，平面平行与一组对棱且等距离。共有 3 种情况
如图 2：平面平行与四面体的一个面且等距离，共有 4 种情况
综上这样的平面共有 7 个

727、直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的 体积为 V，点 P、Q 分别在侧棱 AA_1 和 CC_1 上，AP=C_1Q，则四棱柱 B-APQC 的体积为多少？怎么算啊？(立几)

解：因为 AP=C_1Q



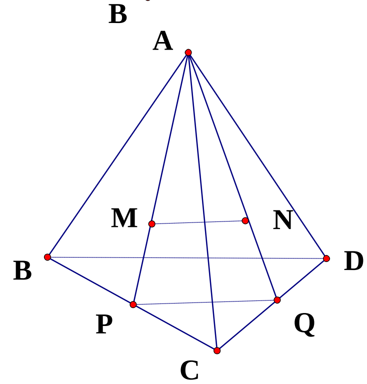
所以，$S_{四边形ACQP}=S_{四边形A_1C_1QP}$

因此 $V_{B-ACQP}=V_{B-A_1C_1QP}$

因为 $V_{B-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V$

于是 $V_{B-ACQP}=V_{B-A_1C_1QP}=\frac{1}{2}(V-\frac{1}{3}V)=\frac{1}{3}V$

728、如图，M、N 是三角形 ABC 和三角形 ACD 的重心，若 BD=a，则 MN=____ (立几)

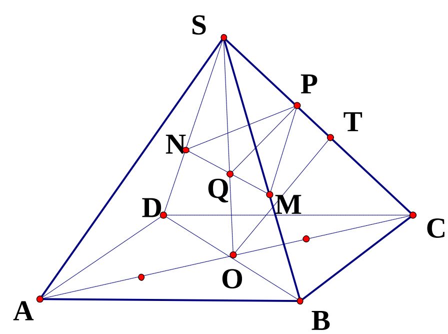


解：如图

$$MN=\frac{2}{3}PQ=\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{2}BD=\frac{1}{3}a$$

735、S 是正方形 ABCD 所在平面外一点,且 SA=SB=SC=SD,点 P 在 SC 上,满足 SP:PC=1:2，又点M，N分别在ＳＢ，ＳＤ上，且ＢＭ＝ＤＮ，求当ＭＮ：ＢＤ为多少时，ＳＡ//平面ＰＭＮ (立几)

解：设平面 SAC $\cap$ 平面 PMN=PQ，如图



要使ＳＡ//平面ＰＭＮ
只要 SA//PQ，
取 SC 的中点 T，连 OT
则 SA//OT，于是 PQ//OT
因 SP:PC=1:2 故可设 SP=2t，PC=4t
于是 ST=3t
SQ：SO= SP：ST =2t：3t=2：3
因此ＭＮ：ＢＤ= SQ：SO =2：3

772、线段 AB 的两个端点分别在直 2 面角α-CD-β的两个平面内，且与α，β分别成 30 度，45 度角，那么 AB 与 CD 所成的角是

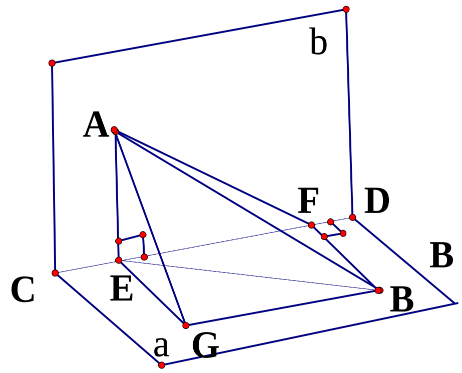
A，30　B，45　C，60　D，90　(立几)

解：如图，设 $AB=2$

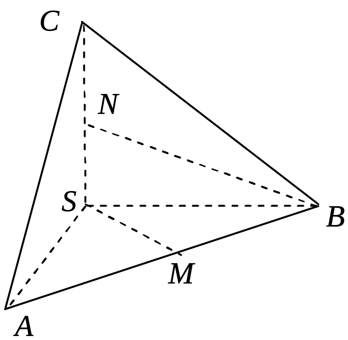
则 $BE=\sqrt{3}$，$BF=\sqrt{2}$

故 $EF=1$，$BG=1$

于是 $\angle ABG=60^\circ$



817、(立几)如图，$SA \wedge SB, SA \wedge SC, SB \wedge SC, AB=BC=CA=\sqrt{2}a$，$SA=SB=SC$，M 与 N 分别是 AB、SC 的中点，求异面直线 SM 与 BN 所成的角的余弦



解 1：这是正方体的一个角,见如图 1，把 BN 平移到 CQ，把 SM 平移到 CP 就很好做了

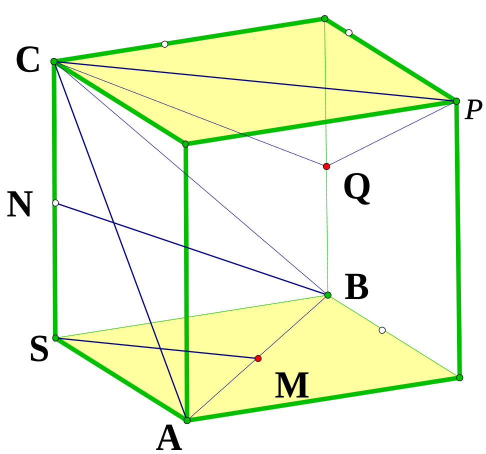


图1

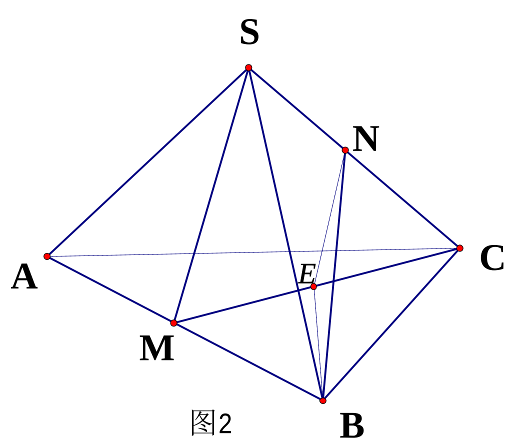
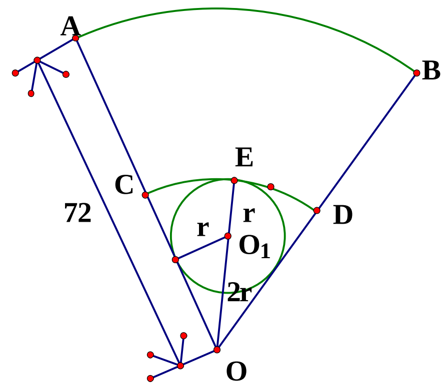


图2

解 2：这是一个顶点上的三条棱两两互相垂直的三棱锥，见图 2，把 SM 平移到 NE

840、一扇形铁皮 AOB,半径 OA=72cm,圆心角 AOB=60 度,现剪下一个扇形 ABCD 作圆台形容器的侧面,并从剩余的扇形 COD 内剪下一个最大的圆刚好做容器的下底(圆台下底面大于上底面),则 OC 应取多少? (立几)



解：弧 AB 的长＝$\frac{1}{6}\times 2\times 72p = 2pr$

故 $r = 12$，于是 $OO_1 = 2r = 24$

故 $OC = OE = 3r = 36$

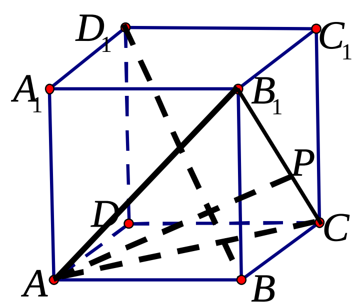
852、如何作好立体几何的证明？？？？

（1）整理一下课本中的定理、公理

（2）整理一下常规的证题方法

（3）做几个题目中常见的几何模具，如正方体，两三角板（30 度，45 度各一块）构成的四面体

860、在正方体 AC_1 中，点 P 在侧面 BCC_1B 及其边界上运动，并且总是保持 AP 垂直于 BD_1,则动点 P 的轨迹是？



解：当 P 在 C 处时有 AP 垂直于 BD_1,

当 P 在 B_1 处时有 AP 垂直于 BD_1,

连 C B_1 可得 BD_1 垂直于面 AB_1C

故当 P 在 C B_1 上运动时时总有有 AP 垂直于 BD_1,

于是动点 P 的轨迹是线段 C B_1

注：从特殊极端开始试验

891、(立几) (函数)

二面角的大小为９０度，M、N分别是线段ＡＢ、ＣＤ上的点（不包括端点），且∠ＡＤＢ＝∠ＤＢＣ＝９０度，ＡＤ＝ＤＢ＝ＢＣ＝１，ＡＭ＝ＤＮ，ＡＭ＝ｘ，ＭＮ＝ｙ

（１）若ＭＮ与平面ＢＣＤ所成的角为４５度，求ｘ的值

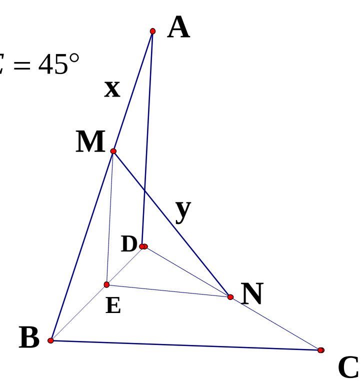
（２）求函数ｙ＝ｆ（ｘ）的解析式及定义域、值域

解：（1）作 $ME \parallel$ AD，因 AD⊥面 BCD

故 MN⊥面 BCD，

于是 $\angle MNE$ 是若ＭＮ与平面ＢＣＤ所成的角，$\angle MNE = 45°$

故 $ME = NE$



$$ME = \frac{MB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}，\quad NE = \frac{DN}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

所以 $\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$ME=\frac{MB}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$，$NE=\frac{DN}{\sqrt{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}$

故 $y=\sqrt{ME^2+NE^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}})^2+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1}$

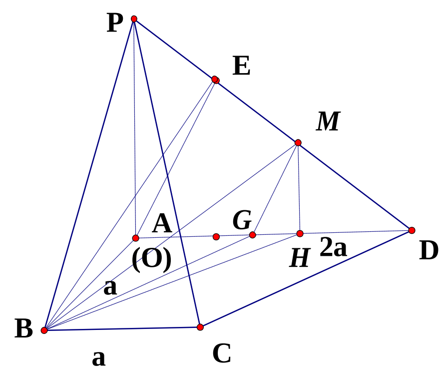
定义域：$0<x<\sqrt{2}$，值域：$\frac{\sqrt{2}}{2}\le y<1$

892、如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一个直角梯形，∠ＢＡＤ＝９０°，$AB=BC=a$，$AD=2a$，且 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，PD 与底面成 30 度角。若 AE⊥PD，E 为垂足，

（１）求证：ＢＥ⊥ＰＤ

（２）求异面直线ＡＥ与ＣＤ所成角的大小（用反三角函数表示）。

解 1：（1）因 $AB\perp PA$，$AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$



故 $AB\perp$ 面PAD，因 $PD\subset$ 面PAD

故 $AB\perp PD$，又因 $AE\perp PD$，$AB\cap AE=A$

故 $PD\perp$ 面ABE，因 $BE\subset$ 面ABE

故 $BE\perp PD$

（2）取 AD 中点 G，作 $GM\perp PD$ 于 M

则 GM // AE

连 BG，则 GB // CD

于是异面直线 AE 与 CD 所成角是，

BG 和 MG 所成的锐角

作 $MH\perp AD$ 于 H

在 $Rt\Delta PAD$ 中，$AE\perp PD$ 于 E，$AD=2a$，$\angle PDA=30°$

$AE=a$，$MG=\frac{a}{2}$

在 $Rt\Delta ABG$ 中，

$BG=\sqrt{AB^2+AG^2}=\sqrt{2}a$

在 $Rt\Delta MGH$ 中，$GH=\frac{1}{2}MG=\frac{a}{4}$，$MH=\sqrt{3}GH=\frac{\sqrt{3}a}{4}$

$BH=AB^2+AH^2=a^2+(\frac{5a}{4})^2$，

$MB^2=BH^2+MH^2=a^2+(\frac{5a}{4})^2+(\frac{\sqrt{3}a}{4})^2=\frac{11a^2}{4}$

$\cos\angle BGM=\frac{BG^2+GM^2-MB^2}{2BG\bullet MG}=\frac{2a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{11}{4}a^2}{2\bullet\sqrt{2}a\bullet\frac{1}{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

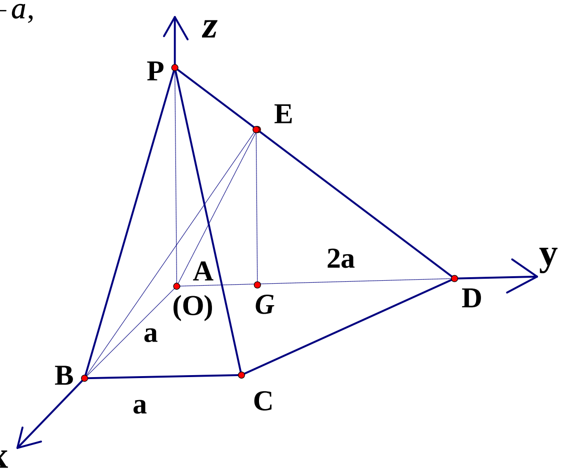
故求异面直线 AE 与 CD 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

解 2：（1）如图建立空间直角坐标系

作 $EG \perp AD$ 于 G

在 $Rt\Delta PAD$ 中， $AE \perp PD$ 于 E， $AD = 2a$， $\angle PDA = 30^\circ$

$|AE| = a, |AG| = \dfrac{1}{2}a, |EG| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a,$



故 $E(0, \dfrac{1}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$，

又 $B(a,0,0)$， $D(0,2a,0)$

则 $\overrightarrow{BE} = (-a, \dfrac{1}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$，

$\overrightarrow{DE} = (0, -\dfrac{3}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$

于是 $\overrightarrow{DE} \bullet \overrightarrow{BE} = 0$，

故 $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{DE}$， 即 $BE \perp PD$

（2）因 $E(0, \dfrac{1}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$， $C(a,a,0)$， $D(0,2a,0)$

故 $\overrightarrow{AE} = (0, \dfrac{1}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$， $\overrightarrow{CD} = (-a, a, 0)$

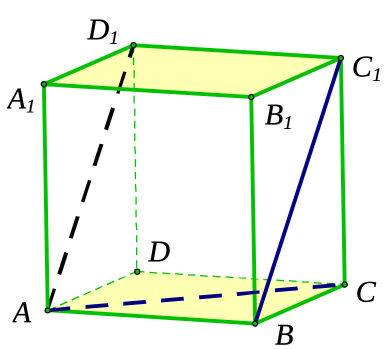
$$\cos\left\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CD} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AE}| \bullet |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a \bullet \sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

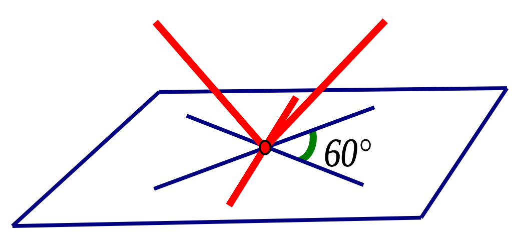
故求异面直线 AE 与 CD 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

969、(立几)

正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中， 过顶点 D_1 在空间作直线 l， 使 l 与直线 AC 和 BC_1 所夹的角都成 60°。那么这样的直线有几条？

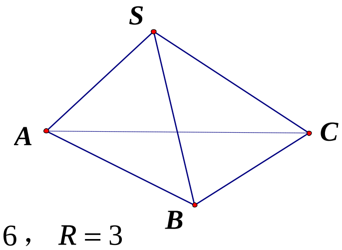
解：直线 AC 和 BC_1 成 60°，移出这两条直线如右图的两条成 60 度角的蓝色线则 3 条红线为所求(要有平移的思想)

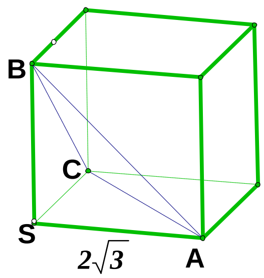




970、(立几)

在正三棱柱 $S-ABC$ 中，侧棱 $SC \perp$ 侧面SAB，侧棱 $SC=2\sqrt{3}$，则此正三棱锥的外接球的表面积为____________





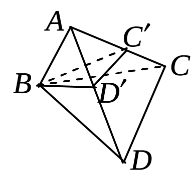
放到正方体中考虑

外接球面积直径 2R$=\sqrt{3\times(2\sqrt{3})^2}=6$，$R=3$

外接球面积 $S=4\pi R^2=36\pi$

986、(立几)

三棱锥 A-BCD 中，AB=1，AC=2，AD=3，$\angle BAC=\angle DAC=\angle BAD=60°$，则二面角 $D-AB-C$ 的大小

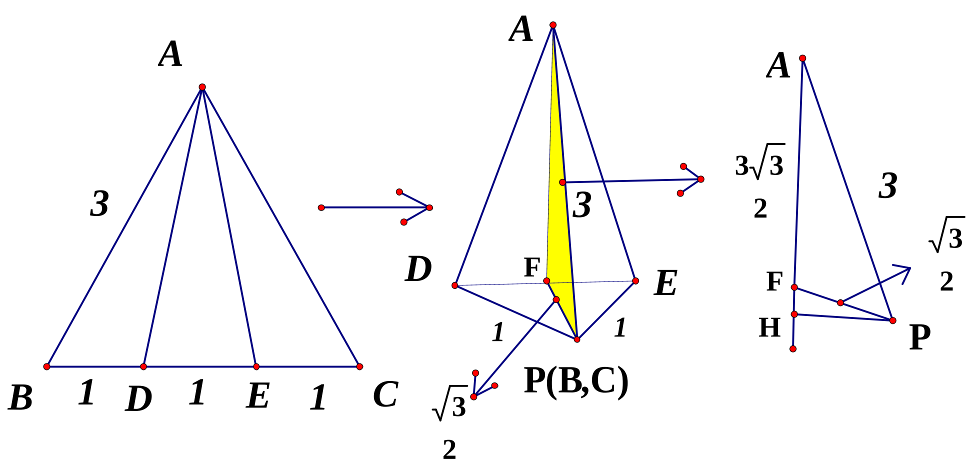


解：截出正四面体，设所求的二面角为 α

则 $\cos\alpha=\dfrac{3+3-4}{2\times3}=\dfrac{1}{3}$，$\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$ (棱长为 2 计算)

999、(立几)

正三角形 ABC 边长是 3，D、E 分别是 BC 边上的 3 等分点，沿 AD，AE 折起，使 B、C 两点重合于点 P，则 P 到面 ADE 的距离为多少？



简答：P 到面 ADE 的距离为 PH

$$\cos\angle AFP=\frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-3^2}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{3}，\quad \sin\angle AFP=\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times PH=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}，\quad PH=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

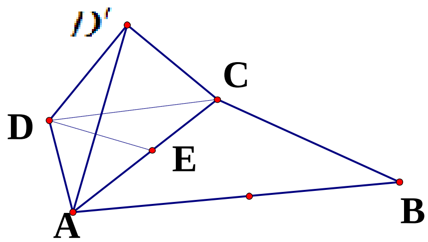
1001、(立几)

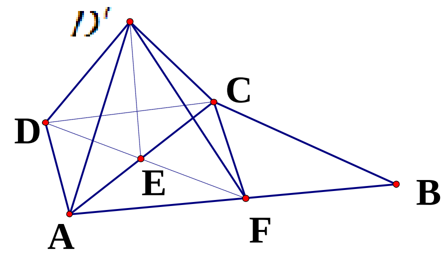
如图所示,∠ADC=∠DAB=90°，AD=DC，AB=2DC，将△DAC 沿对角线 AC 折起,成为△D'AC,使 DD'=DC

(1)证明:平面 D'AC⊥平面 ABCD;

(2)求异面直线 D'C 和 DA 所成角的大小.

解：





(1) 因 AD=DC =DD'，故 D 在面 D'AC 上的射影是$\Delta D'AC$ 的外心 E

因为在$\Delta D'AC$ 中，∠A D'C==90° 故 E 是 AC 的中点

连 DE，则 DE⊥面 D'AC，又 $DE \subset$ 面$ABCD$，故平面 D'AC⊥平面 ABCD

(2)设 CD=1，延长 DE 交 AB 于点 F，连 CF，则 AF=CD=DA=CF=1，CF∥DA

于是直线 D'C 和 CF 所成的锐角为所求

连 D'F。因 D'E 是 DF 的中垂线，于是 D'F=D'D=1

因此△D'CF 是等边三角形，故$\angle FCD' = 60°$

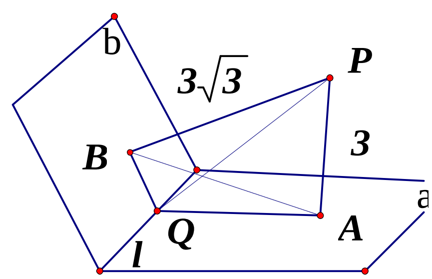
即异面直线 D'C 和 DA 所成的角为$60°$

1008、(立几)

在$135°$二面角 $a-l-b$ 内有一点 P，P 到两个面的距离分别为3和 $2\sqrt{3}$，则 P 到棱l的距离=______

解：易证$l \perp$面PAB，设 面$PAB \cap l = Q$，连 AQ、BQ、AB、PQ

则$l \perp PQ$， PQ为所求。



$\angle AQB = 135°$， $\angle APB = 45°$

$AB^2 = 9+12-6\sqrt{6} = 18+3-2\sqrt{18\times 3} = (\sqrt{18}-\sqrt{3})^2$

$AB = 3\sqrt{2}-\sqrt{3}$

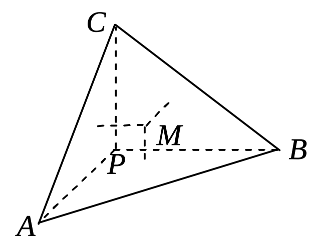
因四边形 PAQB 的外接圆直径为 PQ，故ΔPAB的外接圆直径也为 PQ

于是$PQ = \dfrac{AB}{\sin\angle APB} = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 6-\sqrt{6}$

1009、(立几)

四面体 P-ABC 中，PA、PB、PC 两两垂直，M 是面 ABC 内一点，且 M 到 PAB、PBC、PCA 的距离分别为 2、3、6，

则 M 到顶点 P 的距离为？



解：构造以 M P 为对角线的长方体，

则此长方体的长宽高分别为 6、3、2

于是 M P=$\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$

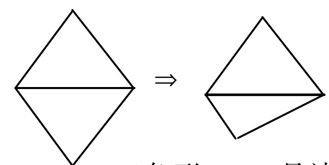
1010、(立几)

若一个三棱锥中，有一条棱长为 a，其余棱长为 1，则其体积 F（a）取最大值的 a 值为？

解：把先棱长为 a 的边去掉，剩下两个边长为 1 的正三角形，

然后把其中一个三角形绕公共边转动使两个正三角形所在的面垂直，就有体积

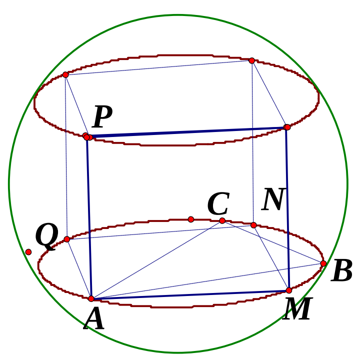
F（a）取最大值，此时 $a=\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

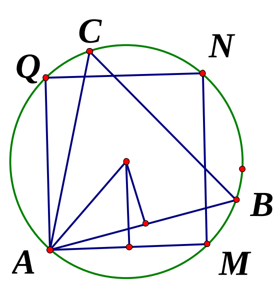


1011、(立几)

球面内接三棱锥 P-ABC，PA 垂直平面 ABC，PA=2，三角形 ABC 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，则球面面积为？

解：内接三棱锥 P-ABC





解：作 ΔABC 所在的小圆，作此圆的内接正方形 AMNQ，把四棱锥 P-AMNQ 补成长方体（如图）

设正方形 AMNQ 为 a，则 $\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60}$，$\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$a=\sqrt{2}$

球半径为 R，则 $(2R)^2=a^2+a^2+PA^2=2+2+4=8$

于是则球面面积= $4pR^2=(2R)^2p=8p$

1022、(立几)

异面直线 a，b，a⊥b，c 与 a 成$30°$，则 c 与 b 成角范围是

A、[60°，90°]　B、[30°，90°]　C、[60°，120°]　D、[30°，120°]

解答：因为 $a \perp b$

所以过 b 可作一个平面 $a \perp a$

在 a 上取一点 P，作 $c' // c$，则 c' 与 a 构成的锐角是 $30°$

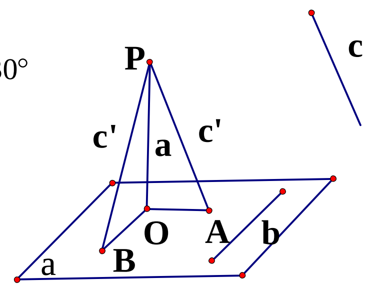
于是 c' 与平面 a 构成的锐角是 $60°$

设 c 与 b 成角为 q，则 c' 与 b 成角为 q

由最小角定理知：$60° \le q$

当 c' 在平面 a 上的射影垂直于 b 时，　$c' \perp b$

因此 $60° \le q \le 90°$



1024、(立几)

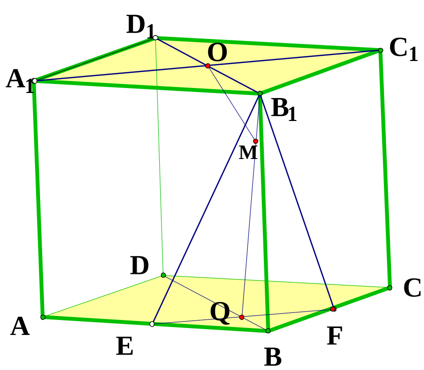
在棱长为 2 的正方体中，E、F 分别是棱 AB、BC 的中点，则点 C_1 到面 B_1EF 的距离是______

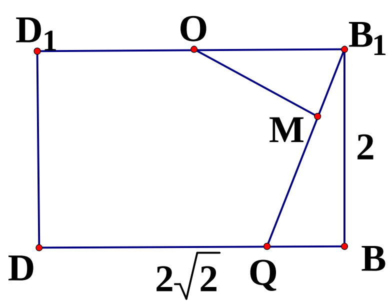
解：过 A_1C_1 中点作 $OM \perp B_1Q$

于 M，则 OM 为所求

移出矩形 BB_1D_1D

$$OM = OB_1 \sin \angle OB_1Q = OB_1 \sin \angle B_1QB = \sqrt{2} \bullet \frac{2}{\sqrt{2^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}} = \frac{4}{3}$$





1040、(立几)

长方体的一条对角线与各平面所成的角分别为 a, b, g

求证：$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 2$

设长宽高分别为 a, b, c，对角线长为 d

则　$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 g = (\frac{a}{d})^2 + (\frac{b}{d})^2 + (\frac{c}{d})^2 = 1$

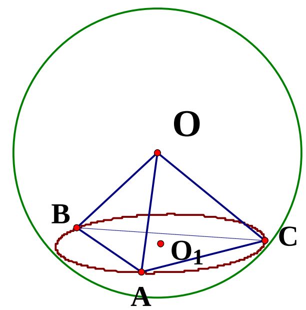
于是 $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 3 - (\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 g) = 2$

1067、(立几) (高考不要求)

球面上有三点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的六分之一，经过这三点的小圆的周长为 4π，则这个球的半径是？？

解：设球半径为 R，则

$R\angle AOB=\frac{2pR}{6}$，则 $\angle AOB=\frac{p}{3}$



于是 $AB=BC=AC=R$

因经过这三点的小圆的周长为 4π

故 $2pr=4p$， $r=2$

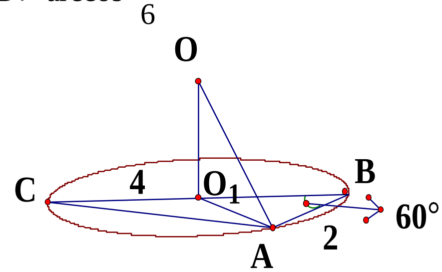
$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$， $AB=2\sqrt{3}$， $R=2\sqrt{3}$

1101、(立几)

A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点，AB=2，BC=4，∠ABC=60°，O 为球心，则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是（　　）

A．$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$　B．$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　C．$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$　D．$\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

解：设球半径为 R,则



$4pR^2=48p$， $R=2\sqrt{3}$

因 AB=2，BC=4，∠ABC=60°

故 $AC^2=4+16-8=12$

故 $AC^2+AB^2=4+12=16=BC^2$

故 $\angle CAB=90°$，于是 BC 是小圆的直径

因此，小圆 O_1 的半径=$\frac{1}{2}BC=2$，故选 B

1102、(立几)

已知 ABCD 是两平行平面 a,b 内的异面线段 $AB=a,CD=b$ 它们所成的角为 q 平面 a 的距离为 h，求证不论 ABCD 在 a,b 内如何移动，三棱锥 A—BCD 的体积不变，并用 a,b,h,q 表示体积。

解：设平面 ABC I 平面b=直线CE

因a // b，故 AB // CE

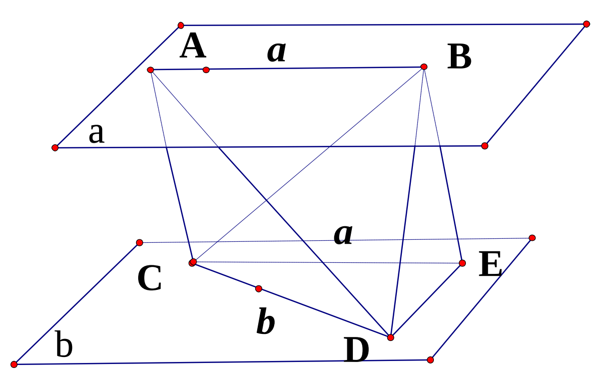
解：取线段 $CE=AB$，连 BE、BC

则四边形 ABEC 是平行四边行

于是 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCE}$

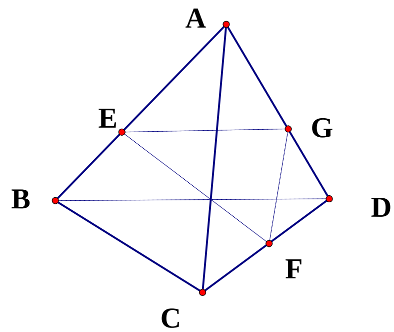
$V_{A-BCD}=V_{D-ABC}=V_{D-BCE}=V_{B-CDE}$

$=\frac{1}{3}S_{\Delta CDE}h=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}ab\sin q)h=\frac{1}{6}abh\sin q$



1156、(立几)

如图，正三棱锥 $A—BCD$ 中，点 E 在棱 AB 上，点 F 在棱 CD 上，并使 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=l$，（ $l>0$），$f(l)=a_l+b_l$， a_l,b_l 分别为 EF 与 AC 和 BD 所成的角，$f(l)$ 是（　　）



解：作 EG // BD，连 GF

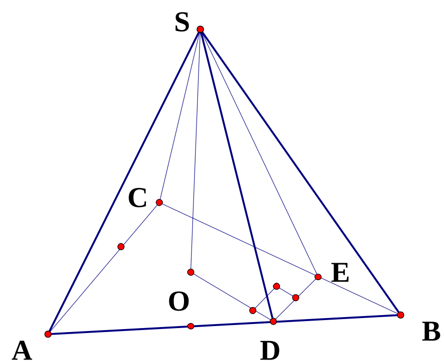
则 $\frac{AG}{GD}=\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=l$

于是 GF // AC

因此 $a_l+b_l=\angle FEG+\angle EFG=90°$

1208、(立几)

正四面体怎样的截面为直角三角形？



答：设底面中心为 O,在 AB 上取一点 D，连 OD
作 DE 垂直于 OD 交 BC 于 E，连 SE
则 $\triangle SDE$ 为直角三角形， $\angle SDE=90°$

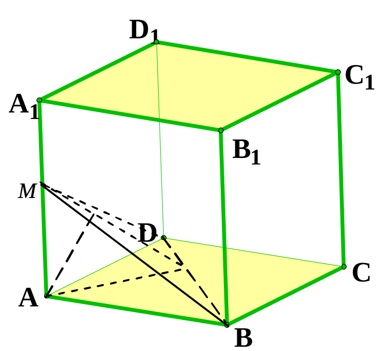
1223、正三棱锥 $V-ABC$ 的底面边长为 $2a$，E、F、G、H 分别是 VA、VB、CB、CA 的中点，则四边形 EFGH 面积的取值范围是(　　　)

A、$(0,+\infty)$　B、$(\frac{\sqrt{3}}{3}a^2,+\infty)$　C.$(\frac{\sqrt{6}}{3}a^2,+\infty)$　D.$(\frac{1}{2}a^2,+\infty)$

答：选 B，把 V 压到底面上为下界

1228、在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AA_1 的中点，则点 A_1 到平面 MBD 的距离是(　　)

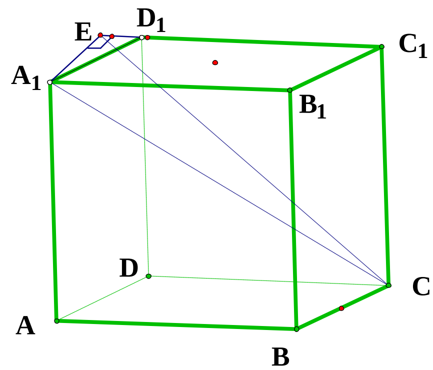
A、$\frac{\sqrt{6}}{3}a$　B、$\frac{\sqrt{3}}{6}a$　C、$\frac{\sqrt{3}}{4}a$　D、$\frac{\sqrt{6}}{6}a$



解：M 是 AA_1 的中点，于是 A_1 到平面 MBD 的距离等于 A 到平面 MBD 的距离,设为 h

$V_{A-MBD}=V_{M-ABD},\frac{1}{6}\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}ah=\frac{1}{6}a\cdot a\cdot\frac{1}{2}a,h=\frac{\sqrt{6}}{6}$

1258、棱长都等于 2 的直平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle BAD=60°$，则对角线 A_1C 与侧面 DCC_1D_1 所成角的正弦值为(　　)



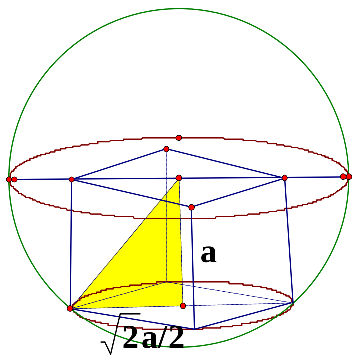
A、$\dfrac{1}{2}$　B、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　C、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　D、$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

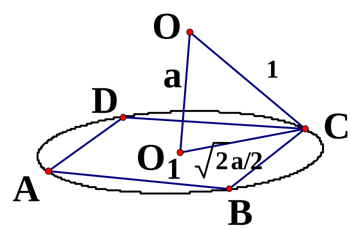
提示：如图，$\angle A_1CE$ O 为所求

$A_1E=\sqrt{3}$，$A_1C=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

选 D

1259、把一个半径为 1 的半球削成一个正方体,则正方体的最大体积为 ______





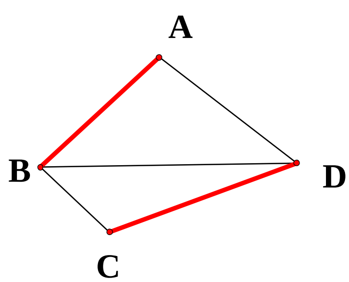
解：设最大体积正方体的边长为 a，

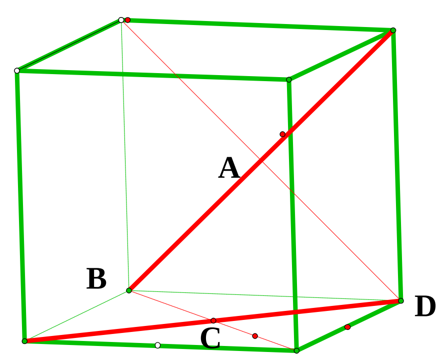
则 $a^2+\dfrac{a^2}{2}=1$，$a^2=\dfrac{2}{3}$，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$v=a^3=\dfrac{2}{3}\bullet\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

1264、(立几)

将正方形 ABCD 沿对角线 BD 折成直二面角 A-BD-C，那么 AB 与 CD 所成得角？

解：

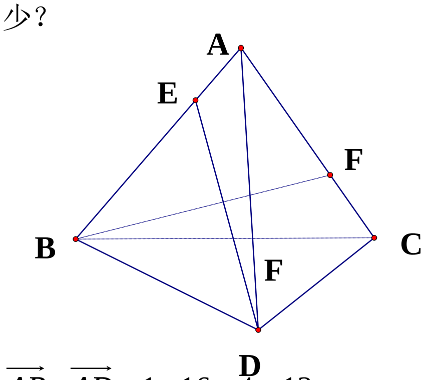




左图在正方体（右图）中可找到，易知所求的角为 60°

1280、(立几) (向量)

已知正四面体 A－BCD 中，AE＝1/4 AB，CF＝1/4 CD，E、F 分别在棱 AB、CD 上，则直线 DE 和 BF 所成角的余弦值为多少?



解：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

设正四面体棱长为 4，则

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AC}=8$

$|\overrightarrow{DE}|^2=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})^2+\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=1+16-4=13$

$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{13}$，同理$|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{13}$

$\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{BF}=(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{16}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}$

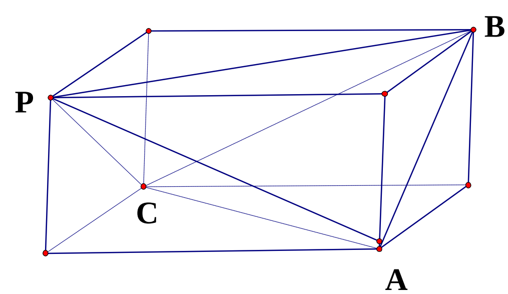
$=\frac{3}{2}-4-6+8=-\frac{1}{2}$

于是$\cos<\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BF}>=\frac{\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{BF}|}=-\frac{1}{26}$，故所求角是$\arccos\frac{1}{26}$

1281、四面体 P-ABC 的三组对棱分别相等，且依次为$2\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$，5，则此四面体的体积是多少?

解：补成长方体，如图设长方体同一个顶点的三条棱长

分别为a,b,c，则



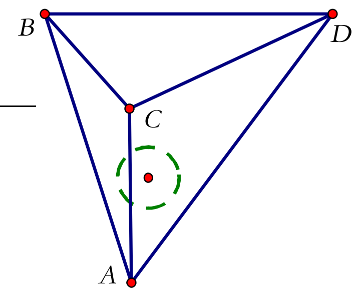
$\begin{cases}a^2+b^2=20\\b^2+c^2=13\\c^2+a^2=25\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4\\b=2\\c=3\end{cases}$

长方体的体积=24

四面体 P-ABC 的体积=$\frac{1}{3}\times24=8$

1300、(立几)

如图，一个倒置的正四面体 $A-BCD$ 容器中放置了一个半径为 1 的小球，小球与相邻的三个侧面均相切，则小球球心 O 到容器底 A 的距离 OA=________



解：这是个好题，答案案是 3

作出平行于上底面的截面，这这样小球就是小正四面体的内切球，于是所求的距离这是小球半径的 3 倍

1328、http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=21038&show=0

若正四面体 SABC 的面 ABC 内有一动点 P 到平面 SAB、平面 SBC、平面 SCA 的距离依次成等差数列，则点 P 的轨迹是

A．一条线段　　B．一个点　　C．一段圆弧　　D．抛物线的一段

解：设点 P 到到平面 SAB、平面 SBC、平面 SCA 的距离依次为 a,b,c

正四面体 S－ABC 的底面积为 S， 高为 h

于是成等 $\frac{1}{3}S(a+b+c)=\frac{1}{3}Sh$， $a+b+c=h$，

又 $a+c=2b$， 故 $3b=h$， $b=\frac{h}{3}$ 于是点 P 的轨迹是一条线段

1330

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22507&show=0

锐角在一平面上的投影角的大小能否与原锐角相等（锐角两边与平面斜交）

提示：在下面的图，$\angle BOC$ 是 $\angle PAC$ 在平面 a 上的射影让 P 点动起来你就能感受到了

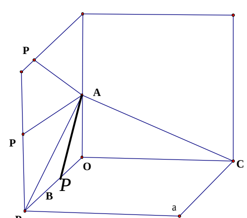


图1

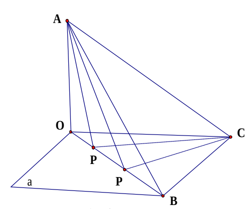


图2

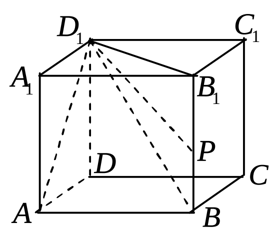


图3

图 1 投影为直角，图 2 投影为锐角

图 3 在棱长为 1 正方体中，P 在 BB_1 上运动，$\angle AD_1P$ 在面 ABCD 上的射影是 $\angle ADB=45°$

设 PB=x, $\angle AD_1P=y$,则 $y=f(x)$ 是一个连续函数，当 D_1P 与面 ABCD 相交时， $0\le x<1$

当 P 与 B 重合时， $y=f(0)<45°$,当 P 与 B_1 重合时， $y=f(1)=60°$

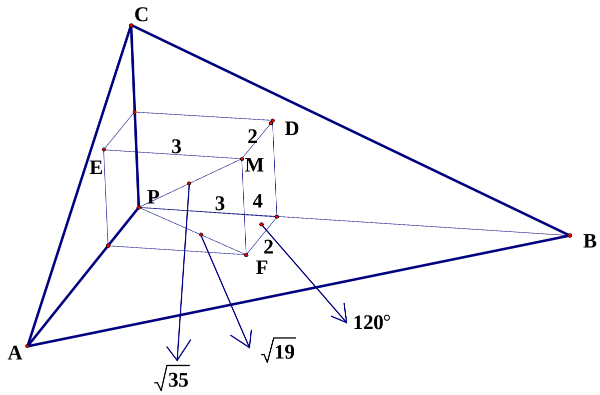
于是存在 $x_0\in(0,1)$ 使， $f(x_0)=45°$

由此可知，锐角在一平面上的投影角的大小能与原锐角相等

1331

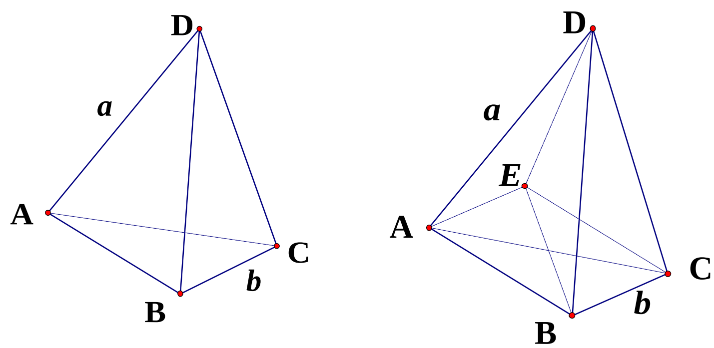
http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=22456&show=0

四体 P - ABC 中，ÐAPB = ÐAPC = ÐBPC = $90°$, M 是平面 ABC 内的一点，过 M 作 PA、PB、PC 的平行线，分别交平面 PBC、PAC、PAB 于 D、E、F，已知 MD=2，ME=3，MF=4，求 PM 的长



1356

http://chat.pep.com.cn/lb5000/topic.cgi?forum=38&topic=23680&show=0



如图所示，已知三棱锥 D - ABC 中， $DA = a, BC = b$ ， 直线 DA 与直线 BC 之间的距离为 c ，夹角为 q ，求 $V_{D\text{-}ABC}$

解：作 AE∥BC 且 AE=BC，则

$$V_{D-ABC} = V_{D-ABE} = V_{B-AED} = \frac{1}{3} S_{\Delta ADE} \bullet c = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} ab \sin q) \bullet c = \frac{1}{6} abc \sin q$$

1374

http://bbs.pep.com.cn/thread-278932-1-2.html

1　空间有 5 个点，其 4 个点在同一平面，另一个在此平面外，且这 5 点中任意 3 点都不共线，这样的 5 点可确定的平面个数

答:估计你还没有学习排列组合,可数一数:有共面的 4 个点定一面,共面的 4 个点中每两点与第 5 点都确定一个平面

2　在四边形 ABCD 中，AB=BC=CD=DA=BD=1，则成为空间四边体时，AC 的取值范围

答:四边形 ABCD 可看成是由正三角形 ABC 和 ACD 拼成的用手拿一着这两个三角形,沿着 AC 折起或摊开就能得到答案了

1395

http://bbs.pep.com.cn/thread-287660-1-1.html

ａ， ｂ为两异面直线

１．过线外一点Ｐ有几个与ａ， ｂ平行／垂直的平面？

答：把ａ， ｂ移成相交，确定一个平面，平移此平面，只要不过，a 或 b 就与 a,b 平行

若平面 M 与 a,b 都垂直则ａ与ｂ平行，这与 a 与 b 异面矛盾

２．过线外一点Ｐ有几条与ａ， ｂ垂直的直线？

答：无数条。把ａ， ｂ平移成相交，确定一个平面，作此平面珠垂线与 a,b 都垂直

３．过ａ可作几个与ｂ平行／垂直的平面？

答：（1）过ａ可作 1 个平面与ｂ平行。把ａ， ｂ平移成相交，确定一个平面，平移此平面，使其过 a 就与 b 平行。可用反证法证明只有一个

（2）0 个或 1 个，当ａ与ｂ不垂直时，0 个，反证法

当ａ与ｂ不垂直时，1 个

1396

求证：两异面直线公垂线的单一性．

证明**(立几反证)**：把异面直线ａ， ｂ移成相交，确定一个平面 M。

假设异面直线ａ， ｂ有两条公垂线 AB 与 CD，则 AB 与 CD 都垂直于 M,于是 AB 与 CD 平行，于是ａ与ｂ平行，这与 a 与 b 异面矛盾

1415、

http://bbs.pep.com.cn/thread-289391-1-1.html

已知四面体 $P-ABC$ 中，$\angle APB=\angle BPA=\angle APC=90^\circ$，M 是平面 ABC 内一点，$\angle APM=60^\circ, \angle BPM=45^\circ$，求 $\angle CPM=$_______

解：以 MP 为对角线构造长方体，利用余弦平方和为 1 求之

$$\cos^2\alpha+\cos^2 60^\circ++\cos^2 45^\circ=1$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{4},\cos\alpha=\frac{1}{2},\alpha=60^\circ$$

1426

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=291651&pid=3026563&page=1&extra=pageD1#pid3026563

正三凌锥 P-ABC 的底边长为 a，侧棱长为 b，经过棱 PA 和 PB 的两个中点 D、E 作一个平行与 PC 的截面，则截面面积是

提示：截面是正方形，边长为 a/2

1427、

http://bbs.pep.com.cn/thread-291566-1-3.html

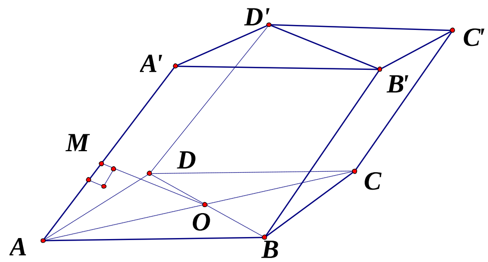
四棱柱 ABCD-A'B'C'D'的底面为正方行,侧棱与底面边长均为 2a,且∠A'AD=∠A'AB=60 度,求棱 AA'和截面 B'D'DB 间的距离.

解，设 AA' 与底面所成的角为 q

则 $\cos q=\dfrac{\overrightarrow{AA'}\bullet(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{AA'}||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\overrightarrow{AA'}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\bullet\overrightarrow{AD}}{2a\times2\sqrt{2}a}=\dfrac{2a^2+2a^2}{4\sqrt{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

于是 AA'和截面 B'D'DB 间的距离.

$OM=OA\sin q=\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a$



1450、

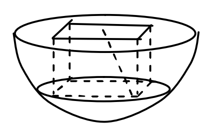
http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=279441&extra=&page=1

已知半球 O 的半径为 1，它的内接长方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的一个面 ABCD 在半球 O 的底面上，则该长方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的体积的最大值为________

解：设长 a，宽 b，高 c，则 $(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2+c^2=1$，体积 $V=abc$

$(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2+c^2\geq3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}\times\frac{b^2}{4}\times c^2}=3\sqrt[3]{\frac{V^2}{16}}$

于是 $3\sqrt[3]{\frac{V^2}{16}}\leq1,\quad 27\times\frac{V^2}{16}\leq1,\quad V^2\leq\frac{16}{27},\quad V\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$



1451

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=279359&page=1#pid2911864

1、如图,在四面体 ABCD 中，△ABD、△ACD、 △BCD、 △ABC 都全等，且 AB=AC=$\sqrt{3}$，BC=2，求以 BC 为棱以平面 BCD 和平面 BCA 为面的二面角的大小.

2.正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、P 分别是棱 AB、BC、DD_1 的中点

(1)求证 :平面 PAB 垂直平面 MNB_1

(2)求二面角 M-B_1N-B 的正弦值

提示：1、把全等三角形 BCD,三角形 ABC 沿 BC 折一折，折到使 AD 的距离为 2 就有结论了

2、（1）让 PB 射到 ABB_1A_1 和 BCC_1B_1 用三垂线(2)简单

1462

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=286437&page=1#pid2977813

已知平面 a,b 所成的二面角为 $80°$，P 为 a,b 外一定点,过点 P 的直线与 a,b 所成的角是 $30°$，则这样的直线有且仅有(　　)

A、1 条　B、2 条　C、3 条　D、4 条

答：转为与法向量所在的直线都成 60 度角

1465、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=283651&extra=&page=1

已知直线 l 与平面 a 所成角为 70 度，过空间一点 O 与直线 l 和平面 a 都成 45 度的直线共有多少条。

答：过点 O 直线 l 的平行线 m，作平面 a 的垂线 n，于是直线 m 与 n 的夹角为 20 度。则过点 O 与直线 l 和平面 a 都成 45 度的直线与 m 和 n 的都成 45 度，于是共有 2 条

1467

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=287712&page=1#pid2989807

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AC_1 交平面 A_1BD 与 G

(1) 求 G 分 AC_1 所成比

(2) 求证 G 是△A1BD 的重心

答：(1)方法很多，其中一方法是先证 AC_1 与面 A_1BD 垂直，再用体积法求出 AG

(2)由斜线段 $AA_1=AB=AD$，得射影长 $A_1G=BG=CG$，得 G 是三角形 A_1BD 的外心，由于三角形 A_1BD 是等边三角形，故 G 是重心

1470、

http://bbs.pep.com.cn/viewthread.php?tid=289495&page=1#pid3006944

正三棱锥的三条棱两两垂直,求该三棱锥内切圆与外接圆半径之比

提示：

解 1：用体积法求 r,用整体法求 R

解 2：内接球心在直角顶点的高上，于是

一方面：高＝$r+\sqrt{3}r=(\sqrt{3}+1)r$，另方面：高＝$\dfrac{2R}{3}$

于是 $(\sqrt{3}+1)r=\dfrac{2R}{3},\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{3(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$

我的解 2 中一方面：高＝$r+\sqrt{3}r$ 中的 $\sqrt{3}r$ 就是以内切球球心与直角顶点为对角线的小正方体的对角线长

另方面：高＝2R/3 中的 2R 就是大正方体之对角线长