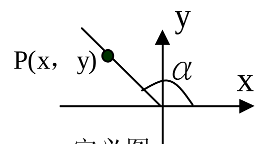
第一节　三角公式及证明



定义图

1、定义：点 $P(x，y)$是角 α 的终边上的任意一点，$|OP|=r$，则

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\cot a=\frac{x}{y}$　$\sec a=\frac{r}{x}$　$\csc a=\frac{y}{r}$

当 $r=1$时 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$

2、同角公式

(1)倒数关系　$\csc a=\frac{1}{\sin a}$，$\sec a=\frac{1}{\cos a}$，$\cot a=\frac{1}{\tan a}$，

(2)商数关系 $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}$，$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a}$，

(3)平方关系 $\sin^2 a+\cos^2 a=1$，$1+\tan^2 a=\sec^2 a$，　$1+\cot^2 a=\csc^2 a$

证明：(1)(2)由定义直接得到

(3)由 $x^2+y^2=r^2$ 得 $(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1,\ 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2,$

于是 $\sin^2 a+\cos^2 a=1$，$1+\tan^2 a=\sec^2 a$，　$1+\cot^2 a=\csc^2 a$

3、诱导公式：

(1)终边在横轴的角加减 a 的三角函数等于 a 的同名三角函数添符号

如：　$\sin(kp\pm a)=\pm\sin a$ (k 是整数), 正负号的确定：把 a 当成锐角，看 $kp\pm a$ 所在的象限而定。

证明：取 a 终边上的一点 $P(x，y)$，

1° 因角 $p+a$ 与 a 终边关于原点对称，

则 $P_1(-x,-y)$ 在 $p+a$ 的终边上，且 $|OP|=|OP_1|$

因此 $\sin(p+a)=-\sin a$，$\cos(p+a)=-\sin a$，$\tan(p+a)=\tan a$

2° 因角 $p-a$ 与 a 终边关于 y 轴对称则 $P_2(-x,y)$ 在 $p-a$ 的终边上，且 $|OP|=|OP_2|$

因此 $\sin(p-a)=\sin a$，$\cos(p+a)=-\sin a$，$\tan(p+a)=-\tan a$

3° 因角 $-a$ 与 a 终边关于 x 轴对称则 $P_3(x,-y)$ 在 $p-a$ 的终边上，且 $|OP|=|OP_3|$

因此 $\sin(-a)=-\sin a$，$\cos(-a)=\cos a$，$\tan(-a)=-\tan a$

4° $2kp+a$ 与 a 终边相同，于是

$\sin(2kp+a)=\sin a$，$\cos(2kp+a)=\cos a$，$\tan(2kp+a)=\tan a$

综上，终边在横轴的角加减 a 的三角函数等于 a 的同名三角函数添符号

(2) 终边在纵轴的角加减α 的三角函数等于α 的余函数添符号

如： $\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha$ 添符号，k 是整数

证明：取α 终边上的一点 $P(x, y)$

1° 因角$\frac{\pi}{2}-\alpha$与α 终边关于直线 $y=x$ 对称，

则 $P_1(y,x)$ 在$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边上，且$|OP|=|OP_1|$

因此$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$， $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$

2° 因角$\frac{\pi}{2}+\alpha$是α 逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$而得，则$P_2(-y,x)$在$\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边上，且$|OP|=|OP_2|$

因此$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$， $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$， $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

3° 因为$\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)$添符号，所以$\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha$ 添符号

其它的类似

综上，终边在纵轴的角加减α 的三角函数等于α 的余函数添符号

注：正弦与余弦，正切与余切，正割与余割互为余函数

口决：纵变横不变，符号看象限。

4、和差角公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ (2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ (4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (5) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

证明： 先证(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

因为α,β 的终边与单位圆的交点分别 $A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$

1° 当$0\le\alpha-\beta\le\pi$ 时,则$\alpha-\beta$ 是向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角，于是

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

2° 当$\pi<\alpha-\beta<2\pi$ 时，向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为$2\pi-(\alpha-\beta)$

于是$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\pi-(\alpha-\beta)]=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

3° 当 $a-b \notin [0,2p)$ 时，必存在整数 k 使得，$2kp+a-b \in [0,2p)$ 于是结论也成立

综上，公式(4)成立

$$\text{证}(3)\text{:}\cos(a+b)=\cos[a-(-b)]=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)$$
$$=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\text{证}(1)\text{:}\sin(a+b)=\cos[(\frac{p}{2}-a)-b]=\cos(\frac{p}{2}-a)\cos b+\sin(\frac{p}{2}-a)\sin b$$
$$=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

证(2)与证(3)类似

证(5)：$\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

证(6)与证(3)类似

5、倍角公式

$(1)\sin 2a=2\sin a\cos a=\dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

$(2)\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$(3)\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

注：只要在和角公式中令 $b=a$ 就可得上面的公式

6、降次公式$(1)\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$　　$(2)\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

注：这是倍角余弦公式的变形

7、半角公式

$(1)\cos\dfrac{a}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$　　$(2)\sin\dfrac{a}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$

(3)　$\tan\dfrac{a}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$　　(4)　$\tan\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sin a}{1+\cos a}=\dfrac{1-\cos a}{\sin a}$

证明 (4)　$\tan\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\dfrac{\sin a}{1+\cos a}$

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}=\frac{1-\cos a}{\sin a}$$

8、万能公式

(1) $\sin a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　(2) $\cos a=\dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　(3) $\tan a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

证明: (1) $\sin a=\dfrac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}}=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

(2) $\cos a=\dfrac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

9、积化和差

(1) $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$　　(2) $\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

(3) $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$　(4) $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

证明：(1)(2)

由 $\sin a\cos b+\cos a\sin b=\sin(a+b)$　　$\sin a\cos b-\cos a\sin b=\sin(a-b)$

相加再除以 2 得：$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

相减再除以 2 得：$\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

(3)(4)

由 $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$

$\cos a\cos b+\sin a\sin b=\cos(a-b)$

相加再除以 2 得：$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

相减再除以 2 得：$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

10、和差化积

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　　(2) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$　　(4) $\cos x-\cos y=-\frac{1}{2}[\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}]$

证明：(1)在 $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$ 中，令 $a+b=x, a-b=y$ 得

$a=\frac{x+y}{2}, b=\frac{x-y}{2}$，代入原式得 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(2)(3)(4)分别由

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\cos a\sin b$，

$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$

$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b$　作与(1)一样的代换可得