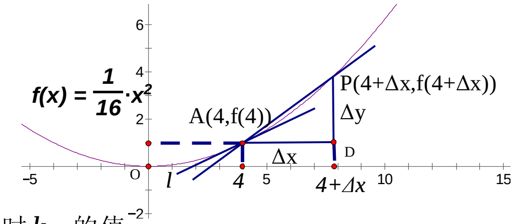
第一节 导数

一、导数的意义



引例、求函数 $f(x)=\dfrac{1}{16}x^2$ 的图象在 $x=4$ 处切线

解：因 $f(4)=1$，故切点 A(4,1),设切线为 l

由点斜式知其方程为 $y-1=k_{切}(x-4)$

切线为 l 是 $P\to A$ 时割线 PA 的位置，于是 $k_{切}$ 是 $P\to A$ 时 k_{PA} 的值

$$k_{PA}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{16}(4+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{16}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\Delta x\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}\frac{1}{2}$$

于是 $k_{切}=\dfrac{1}{2}$，切线为 l： $y-1=\dfrac{1}{2}(x-4)$

把在 $\Delta x\to 0$ 时 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$ 时极限叫 $f(x)$ 在 $x=4$ 处的导数，记作 $f'(4)$

1、定义：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$

例 1、已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f'(x_0)$

$$解：\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}-\frac{1}{{x_0}^2},\ f'(x_0)=-\frac{1}{{x_0}^2}$$

例 2、求自由落体的运动的下落路程 $S=5t^2$ 在 t=1 处的瞬时速度

解：先求 t=1 处的平均速度 $\bar{v}=\dfrac{5(1+\Delta t)^2-5\times 1^2}{\Delta t}=\dfrac{10\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=10+\Delta t$

再求 t=1 处的瞬时速度 $\bar{v}=10+\Delta t\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}10$,故 $t=1$ 时的瞬时速度 $v=10$ 它就是 $S'|_{t=1}$

2、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫均变化率，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 瞬时变化率， $f'(x_0)$ 就是数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率

3、导函数：设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 由例 1 得 $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0}$，让 x_0 当自变量它也是一个函数这个函数

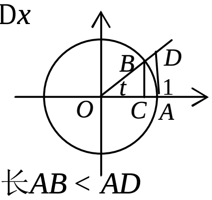
$f'(x)=-\dfrac{1}{x}$ 叫 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 也可记为 $\dfrac{dy}{dx}$

二、常用导数

(1) 若 $f(x)=c$，则 $f'(x)=0$ **(2)** 若 $f(x)=x^n$，则 $f'(x)=nx^{n-1}$

$$证：\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots}{\Delta x}$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}nx^{n-1},\ f'(x)=nx^{n-1}$$



(3) $\sin' x=\cos x$

先证：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，设角 t 是很小的正数，由单位圆知 $BC<弧长AB<AD$

则 $\sin x<x<\tan x, 1<\dfrac{t}{\sin t}<\dfrac{1}{\cos t}$， $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\cos t}=1$，于是 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$， $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\Delta x}=\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\xrightarrow{\Delta x\to 0}\cos x\text{,故}\sin' x=\cos x\text{，}$$

(4) $\cos' x=-\sin x$ 证：$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}-\sin x$，故 $\cos' x=-\sin x$

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

证明：$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\frac{\frac{x}{\Delta x}\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{x}=\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}}{x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}\frac{\ln e}{x}=\frac{1}{x}$，故 $\ln' x=\frac{1}{x}$

(6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ **，证：** $(\log_a x)'=(\frac{\ln x}{\ln a})'=\frac{1}{x\ln a}$

(7) $(e^x)'=e^x$，证：设 $y=e^x$，则 $x=\ln y$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}=\frac{1}{e^x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^x$

(8) $(a^x)'=a^x\ln a$

证：设 $y=a^x$，则 $x=\log_a y$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y\ln a}=\frac{1}{a^x\ln a}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=a^x\ln a$，故 $(a^x)'=a^x\ln a$

三、导数的运算法则 当 $f(x),g(x)$ 可导

(1) $[cf(x)]'=cf'(x)$ **(2)** $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(3) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **(4)** $[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

证(3)

$$\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}+\frac{g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(5)链式法则：在 $y=f(\varphi(x))$中，设 $u=\varphi(x)$，则 $y=f(u)$，于是 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

四、求导公式二

(9) $(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

(10) $(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(11) $(\sec x)'=(\frac{1}{\cos x})'=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$

(12) $(\csc x)'=(\frac{1}{\sin x})'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x$

(13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

证：设$y=\arctan x$，则 $x=\tan y,\frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

(14) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

证：设$y=\arcsin x$，则 $x=\sin y,\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) (16)设$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 则 $(\cosh x)'=\sinh x$，$(\sinh x)'=\cosh x$

证：$(\cosh x)'=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x,(\sinh x)'=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$

五、求导数

例 1、求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 1：$\because y=\ln u, u=\sin x.\ \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

解 2：$y'=\frac{1}{\sin x}\times\sin' x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

例 2、求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数 .

解：$y'=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9$

例 3、求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$

例 4、求函数 $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解$\because y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(x-2),\ \therefore\ y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$

例 5、求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数 .

解 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$

例 6、求函数 $y=f^n(\sin x)$ 的导数.

$y'=nf^{n-1}(\sin x)\cdot[f(\sin x)]'=nf^{n-1}(\sin x)\cdot f'(\sin x)(\sin x)'=nf^{n-1}(\sin x)\cdot f'(\sin x)\cos x$

四、 高阶导数的概念

1.定义 $(f'(x))'$存在,则称为函数$f(x)$在点x处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数，$f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数，$f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$.

一般地，函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数，记作

$f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$或$\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地，$f(x)$称为零阶导数；$f'(x)$称为一阶导数.

2、 直接求高阶导数

例 1 设 $f(x)=\arctan x$，求$f''(0)$, $f'''(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$y'''=\left(\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'$，

$\therefore\ f''(0)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0}=0$；　$f'''(0)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\Big|_{x=0}=-2$.

例 2　设 $y=\ln f(x)$,其中 $f(x)$二阶可导，求 y''

解 $y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$，$y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$

3、常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a\quad(a>0)$　　$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$　(3) $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $(x^n)^{(n)}=n!$

(5) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$　(6) $\left(\dfrac{1}{x\pm a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{(x\pm a)^{n+1}}$

4、**高阶导数的运算法则:** 设函数u和v具有n阶导数，则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$　　(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$

(3)莱布尼兹公式$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$

例 3 设 $y=x^2e^{2x}$，求$y^{(20)}$. **解** 设$u=e^{2x}$, $v=x^2$，则由莱布尼兹公式知

$y^{(20)}=(e^{2x})^{(20)}\cdot x^2+20(e^{2x})^{(19)}\cdot(x^2)'+\dfrac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)}\cdot(x^2)''+0$

$=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot2^{19}e^{2x}\cdot2x+\dfrac{20\cdot19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot2=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$

例4　已知$y=\dfrac{3x}{x^2-x-2}$，求$y^{(n)}$.

解　$y=\dfrac{3x}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$

$\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{(x+1)^{(n+1)}}$，　$\left(\dfrac{2}{x-2}\right)^{(n)}=\dfrac{2(-1)^nn!}{(x-2)^{n+1}}$, $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{2\cdot(-1)^nn!}{(x-2)^{n+1}}$