第一节　数列的极限

一、求数列的极限

1、极限的意思：**如果当项数 n 无限增大时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 无限趋近于某个常数 A，那么就说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$**

例 1、判断下列数列 $\{a_n\}$ 是否有极限，若有，写出极限；若没有，说明理由

（1）1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，… ；　　（2）$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…；

（3）−2，−2，−2，…，−2，…；　　（4）−0.1，0.01，−0.001，…，$(-0.1)^n$，…；

（5）1，2，3，…，n, …　　（6）−2，2，−2，2，…，$(-1)^n\times 2$，…

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(-2)=-2$（4）$\lim\limits_{n\to\infty}(-0.1)^n=0$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty} n$ 不存在　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\times 2$ 不存在

2、基本极限① 若 A 是常数,则 $\lim\limits_{n\to\infty} A = A$,② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,③若 $|q|<1$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

3、性质:若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$ ② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$ ③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$ ④ $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^a = A^a$

4、求整式比的极限

例 2、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+100}{5n^2+n-4}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+100}{5n^2+n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{100}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{2}{5}$

练习、求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{10n+100}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+100}{5n^2+n-4}$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+n+1}{12n^3+100}$

5、求指数比的极限

例 3、求(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}+3^n}{5^n+3^{n-1}}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{5})^{n-1}+(\frac{1}{3})^n}{(\frac{1}{5})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}}$

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}+3^n}{5^n+3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}+(\frac{3}{5})^n}{1+\frac{1}{3}(\frac{3}{5})^n}=\frac{1}{5}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{5})^{n-1}+(\frac{1}{3})^n}{(\frac{1}{5})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(\frac{3}{5})^n+1}{(\frac{3}{5})^n+3}=\frac{1}{3}$

练习、求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+5^n}{3^n+5^{n-1}}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{n-1}+(\frac{1}{3})^n}{(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^{n-1}}$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n-1}+b^n}{a^n+2b^{n-1}}$

6、求根式比的极限

例 4、求(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+9}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+3}-n)$

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+9}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{9}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+1}=\dfrac{3}{\sqrt{4}+1}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+3}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}+1}=\dfrac{3}{2}$

7、散式的极限

例 5、求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})$

分析：化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$ *=0* 对吗？这是不对的

如 $1=\overbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}^{n个}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，但是和的极限却是 1

因此，求散式的极限，应先将散式化为聚式

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$

例 6、**求** $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}[1-(\dfrac{1}{2})^n]=1$

练习、求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$

8、**无穷等比数列的各项和**

(1)设无穷数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 叫做这个等比数列的各项和，

记作 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$

(2)若无穷等比数列$\{a_n\}$**的**公比为 q，前 n 项和为 S_n，$|q|<1$，则

$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\dfrac{a_1}{1-q}$

例 7、求**无穷**数列的各项和

(1) $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$ (2) $2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}+\cdots$

解：(1)$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1}--\dfrac{1}{n+1})=1$

(2) 因为 $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots$ 是首项为 3 公比为 $\frac{1}{3}$ 的无穷等比数列的各项和

故 $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$

例 8、将无限循环小数 $0.\dot{1}\dot{2}$ 化为分数

解：$0.\dot{1}\dot{2}=0.12+0.0012+0.000012+\cdots=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{0.12}{0.99}=\frac{4}{33}$

练习、填空

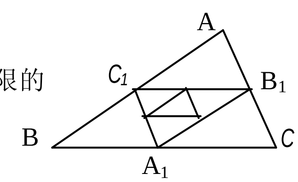
(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=$ __________

(2) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3^4}+\cdots-\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{2}{3^{2n}}+\cdots=$ _________

(3) 一个球从 10 米高处自由落下,每次着地后又跳回到原来高度的 $\frac{2}{3}$ 再落下当球停止时,球共经过了 ________ 米

(4) ΔABC 的周长和面积分别为 c、s，取 ΔABC 三边的中点连成 $\Delta A_1B_1C_1$，取 $\Delta\ A_1B_1C_1$ 三边的中点连成 $\Delta A_2B_2C_2$，如此无限的进行下去，则所有这些三角形的周长和=______

面积的和=______



二、数列极限的理论

1、数列极限的定义

(1)数列极限的几何意义：把无穷数列 $\{a_n\}$ 的每个项标在数轴上,若数轴上存在一个定点 A,以 A 点为圆心,任意长为半径作圆,不论圆的半径多么小,总是只有有限个项在圆外,则点 A 对应的实数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

注：无穷数列 $\{a_n\}$ 存在极限则称数列 $\{a_n\}$ 收敛

(2)数列极限的代数定义：对于无穷数列 $\{a_n\}$，存在实数 A, ,任意多么小的正数 e，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $|a_n-A|<e$，实数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

例 1、用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

证明：任取正数 e，要使 $|\frac{n}{n+1}-1|=|\frac{-1}{n+1}|=\frac{1}{n+1}<e$，只要 $n>\frac{1}{e}-1$，

取 $N=[\frac{1}{e}-1]+1=[\frac{1}{e}]$，当 $n>N$ 时，$|\frac{n}{n+1}-1|<e$ 成立

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

例 2、用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$

证明：任取正数 e，要使 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1<e$，

只要$\sqrt[n]{a}<1+e \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\log_a(1+e) \Leftrightarrow n>\frac{1}{\log_a(1+e)}$，

取$N=[\frac{1}{\log_a(1+e)}]$，当$n>N$时，$|\sqrt[n]{a}-1|<e$总成立

故$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$

2、收敛数列的性质

定义1、设数集$S\subseteq R$,若存在实数M，使得对$\forall x\in S$,都有$x\le M$,则称数集S有上界

定义2、设数集$S\subseteq R$,若存在实数L，使得对$\forall x\in S$,都有$x\ge L$,则称数集S有下界

定义3、设数集$S\subseteq R$,若数集S既有上界，又有下界，则称数集S有界

定理1、若无穷数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界。

证明：无穷数列$\{a_n\}$收敛，设$\lim_{n\to\infty}a_n=A$

对于$e=1$，存在正整数N,当$n>N$时，都有$|a_n-A|<1, A-1<a_n<A+1,$

取$\mathrm{M}=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_N|,|A-1|,|A+1|\}$

则对任意正整数n，$|a_n|<M$,于是数列$\{a_n\}$有界

定理2、若$\lim_{n\to\infty}a_n=A, A>0, c\in(0,\mathrm{A})$,则存在正整数$N$,当$n>N$时，有$a_n>c$

证明：对于$e=A-c>0$，存在正整数N,当$n>N$时，都有$|a_n-A|<A-c,$

$\mathrm{c}-A<a_n-A<A-c,\ \mathrm{c}<a_n<2A-c,$ 于是$a_n>c$

定理3、若$\lim_{n\to\infty}a_n=A, A<0, c\in(\mathrm{A},0)$,则存在正整数$N$,当$n>N$时，有$a_n<c$

证明：对于$e=c-A>0$，存在正整数N,当$n>N$时，都有$|a_n-A|<c-A,$

$A-c<a_n-A<c-A,\ 2A-\mathrm{c}<a_n<c,$ 于是$a_n<c$

定理4、若$\lim_{n\to\infty}a_n=A, A\ne 0, c\in(0,|\mathrm{A}|)$,则存在正整数$N$,当$n>N$时，有$|a_n|>c$

证明：对于$e=|A|-c>0$，存在正整数N,当$n>N$时，都有$|a_n-A|<|A|-c,$

$|a_n|=|A+(a_n-A)|\ge|A|-|a_n-A|>|A|-(|A|-c)=c$，即$|a_n|>c$

3、收敛数列的四则运算

若$\lim_{n\to\infty}a_n=A, \lim_{n\to\infty}b_n=B$,求证：

①$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$ ②$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=AB$ ③$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

证明：**任取正数**e，则存在$N_1,N_2\in N^+$，

当$n>N_1$时，$|a_n-A|<e$，当$n>N_2$时，$|b_n-B|<e$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时

①$|a_n+b_n-(A+B)|\leq|a_n-A|+|b_n-B|<2e$

②$|a_nb_n-AB|=|a_nb_n-b_nA+b_nA-AB|\leq|a_nb_n-b_nA|+|b_nA-AB|$
$=|b_n||a_n-A|+|A||b_n-B|<e|b_n|+e|A|$

因$\{b_n\}$收敛，于是存在正数 M，使$|b_n|<$ M，$|a_nb_n-AB|<eM+e|A|=e(M+|A|)$

③只要证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}(B\neq 0)$,当$n>N$时,$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}|=\frac{|B-b_n|}{|Bb_n|}<\frac{e}{|Bb_n|}$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B(B\neq 0)$,于是存在 N₃∈$N^+$,当$n>N_3$时，有$|b_n|>\frac{|B|}{2}$

取$T=\max\{N,N_3\}$,则当$n>T$时$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}|<\frac{e}{|Bb_n|}<\frac{2e}{B^2}$

4、**夹值定理：若**$a_n\leq b_n\leq c_n$对$n\in N^*$恒成立，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$

证明：对$\forall e>0$，因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，故$\exists N_1\in N^*$,当$n>N_1$时，

$|a_n-A|<e$，$A-e<a_n<A+e$ ①

因$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，故$\exists N_2\in N^*$,当$n>N_2$时，

$|c_n-A|<e$，$A-e<c_n<A+e$ ②

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时$A-e<a_n\leq b_n\leq c_n<A+e$，故$|c_n-A|<e$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$

例 1、求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(5^n+6^n+7^n)^{\frac{1}{n}}=7$

证明：$(5^n+6^n+7^n)^{\frac{1}{n}}<(7^n+7^n+7^n)^{\frac{1}{n}}=(3\times 7^n)^{\frac{1}{n}}=7\times 3^{\frac{1}{n}}$，$(5^n+6^n+7^n)^{\frac{1}{n}}>(7^n)^{\frac{1}{n}}=7$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}7\times 3^{\frac{1}{n}}=7,\lim\limits_{n\to\infty}7=7$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}(5^n+6^n+7^n)^{\frac{1}{n}}=7$

一般地$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}(a_1,a_2,\cdots,a_p\ge 0)$

例 2、求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证明：设$\sqrt[n]{n}=1+a_n(a_n>0,n>1),n=(1+a_n)^n>\dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2$

$0<a_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$,于是$1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}})=1,\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例 3、求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

常规求散式的极限要先求和化成聚式，但本例散式无法求和，于是可考虑**夹值定理**

解：因$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$

例 4、求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

解：因$1<(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}<n^{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}=1$

5、实数e

定理 1、数轴上每一点对应于一个实数

证明：对数轴上的一点 M，存在整数 T，使点 M∈ [T,T+1);把[T,T+1)十等分，得左闭右开的十个区间，从左到右的区间的号码为 0，1，3，…，9。则设点 M 在区间号为 p_1 的区间内；再把此区间十等分，得左闭右开的十个区间，从左到右的区间的号码为 0，1，3，…，9。设点 M 在区间号为 p_2 的区间内，如此一直作下去知：点 M 对应于数 T+$0.p_1p_2\cdots p_n\cdots$ 为实数

定义 1、设数集$S\subseteq R$,m 是数集S的上界，若对$\forall p<m$，都存在$x_0\in S$,使得$x_0>p$，则 m 是数集S的最小上界，m 叫数集S的上确界。记作$\sup S=m$

定义 2、设数集$S\subseteq R$,l是数集S的下界，若对$\forall p>l$，都存在$x_0\in S$,使得$x_0<p$，则l是

数集 S 的最大下界，l 叫数集 S 的下确界。记作 $\inf S = l$

定理 2、若数集 S 有上界，则必有上确界

证明：因 S 有上界，故存在整数 T，使

$\exists x_0 \in S$ 使 $x_0 \in [\mathrm{T}, \mathrm{T}+1)$，且 $\forall x \in S$ 都有 $x \notin [\mathrm{T}+1, +\infty)$ S∈ [T,T+1)；

把 [T,T+1)十等分，得左闭右开的十个区间，从左到右的区间的号码为 0，1，3，…，9。

则必存在区间号为 p_1 的区间含有 S 的元素，其右边无区间含有 S 的元素。

再把此区间十等分，得左闭右开的十个区间，从左到右的区间的号码为 0，1，3，…，9。

则必存在区间号为 p_2 的区间含有 S 的元素，其右边无区间含有 S 的元素。如此一直作下去

可得实数 m =T+ $0.p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$，则此实数 m 为数集 S 有上确界

若存在 $\exists x_0 \in S$, 使 $x_0 > m$，由 m 的构造知 x_0 的整数部分为 T，于是 $x_0 = T + 0.q_1 q_2 \cdots q_n \cdots$

$x_0 > m$ 于是必存在正整数 k,使 $p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_{k-1} = q_{k-1}, p_k < q_k$ 这与 m 的构造相矛盾

于是对 $\forall x \in S$，都有 $x \le m$

对 $\forall p < m$，当 p 的整数部分小于 T，易知必存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > p$。当 p 的整数部分等于 T，设 $p = T + 0.t_1 t_2 \cdots t_n \cdots$，由 $p < m$ 则必存在正整数 k,使 $p_1 = t_1, p_2 = t_2, p_{k-1} = t_{k-1}, p_k > t_k$

，由于存在 $\exists x_0 \in S$, 使 $x_0 \ge \mathrm{T} + 0.p_1 p_2 \cdots p_k > t$

综上，实数 m 为数集 S 有上确界

定理 3、若数集 S 有下界，则必有下确界

定理 4、无穷数列 $\{a_n\}$ 不减且有上界，则 $\{a_n\}$ 必收敛

证明：因为无穷数列 $\{a_n\}$ 有上界，所以 $\{a_n\}$ 有上确界，设为 A

对于任意的正数 e，都存在正整数 N,使得 $a_N > A - e$

因为 $\{a_n\}$ 不减，于是当 $n > N$ 时，$a_n \ge a_N > A - e$，又 $a_n \le A < A + e$

故 $|a_n - A| < e$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

定理 5、无穷数列 $\{a_n\}$ 不增且有下界，则 $\{a_n\}$ 必收敛

证明：因为无穷数列 $\{a_n\}$ 有下界，所以 $\{a_n\}$ 有下确界，设为 A

对于任意的正数 e，都存在正整数 N,使得 $a_N < A + e$

因为 $\{a_n\}$ 不增，于是当 $n > N$ 时，$a_n \le a_N < A + e$，又 $a_n \ge A > A - e$

故$|a_n - A| < e$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

上面两个定理可统一说成：**单调有界数列必有极限**

定理 6、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

证：

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3$$，故$(1+\frac{1}{n})^n$有界

$$(1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot 1 < [\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}]^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$故$(1+\frac{1}{n})^n$递增

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在，记为$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$，令$\frac{1}{n} = t$于是$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

例 1、证明数列$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}, \cdots$收敛，并求其极限

证明：设$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，易知$\{a_n\}$递增

下面用数学归纳法证明$a_n < 2$。

$a_1 = \sqrt{2} < 2$，假设$a_n < 2$，$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$

故$a_n < 2$对$\forall n \in N^*$都成立，于是$\{a_n\}$有上界

因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

由$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$两边取极限得，$x = \sqrt{2+x}$，解得$x = 2$，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

例 2、数列$\{a_n\}$中，$0 < a_1 < 1$，$a_{n+1} = a_n(1-a_n)$，求证数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限

证明：$0 < a_1 < 1$，假设$0 < a_n < 1$，则$a_{n+1} = a_n(1-a_n) \in (0,1)$

于是对一切正整数$0 < a_{n+1} < 1$

$a_{n+1} - a_n = a_n(1-a_n) - a_n = -a_n^2 < 0$，于是$\{a_n\}$递减

故数列$\{a_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

由$a_{n+1} = a_n(1-a_n)$两边取极限得，$x = x(1-x)$，解得$x = 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$